교사용 지도서

고|등|학|교

수학 Ⅱ

신항균
이광연
박세원
신범영
이계세
김정화
박문환
윤정호
박상의
서원호
전제동
이동흔

(주)지학사

고 등 학 교

수학 Ⅱ

교사용 지도서

㈜지학사

머리말

현대 과학 문명은 미처 예상하지 못한 분야까지 급속도로 발전하고 있으며, 그 발전의 중심에는 언제나 수학이 자리해 왔습니다. 이러한 상황 가운데 수학 교육의 중요성은 더욱 부각되고 있습니다. 하지만 수학은 일반적으로 어려운 교과로 인식되기 때문에 하고자 하는 의욕이 있음에도 효율적인 학습이 이루어지지 않는 경향이 많습니다. 그 이유는 여러 가지가 있지만 다음과 같이 두 가지로 요약할 수 있습니다.

첫째, 방법론의 문제입니다. 수학은 어느 교과보다도 체계적이고 논리적이기 때문에 단계적인 학습을 통하여 단원 상호 간의 연계적 이해가 이루어져야 합니다. 또한 수학은 누적적인 학문입니다. 오늘날의 수학은 오래전부터 발견되고 발전해 온 수학을 기초로 이루어져 있으므로 이를 무시하면 수학 학습은 마치 사상누각이 되는 것입니다. 따라서 수학은 반드시 기초부터 시작해야 하고, 이를 바탕으로 체계적이고 논리적으로 확장해 나가야 합니다. 그러나 수학을 학습하는 데 이와 같은 수학의 특징을 중요하지 않게 여기는 경향이 있습니다.

둘째, 응용력의 문제입니다. 이미 언급했듯이 수학은 논리적인 전개를 바탕으로 합니다. 그러므로 체계적인 이해를 전제로 하지 않은 단순한 암기와 기계적인 응용은 심도 있는 수학 학습에 한계를 불러옵니다. 즉, 어떠한 문제가 주어졌을 때, 문제의 성격과 해결 과정에 대한 철저한 사고 없이 문제 유형과 공식을 대응하여 해결하려는 식의 요령은 오히려 다양한 문제에 적용하는 데 한계를 가져오고 수학 학습을 보다 어렵게 느끼게 합니다.

본 교사용 지도서는 위와 같은 점들을 고려하여 단원 간의 연계와 원리의 이해 및 적용에 중점을 두고 편찬하였습니다. 그리고 선생님께서 학생들에게 수학을 지도할 때, 학생들이 보다 흥미와 관심을 가지고 쉽게 이해할 수 있도록 교과서 체계에 맞추어 구성하였습니다. 아울러 교과서의 활용에 도움이 되는 사항들을 함께 수록하였으며, 구체적인 활용 방법은 따로 설명하였습니다.

교육 현장에 계신 선생님께서 본 교사용 지도서를 효율적으로 사용하여 보다 알찬 수학 교육의 결실을 거두기 바랍니다.

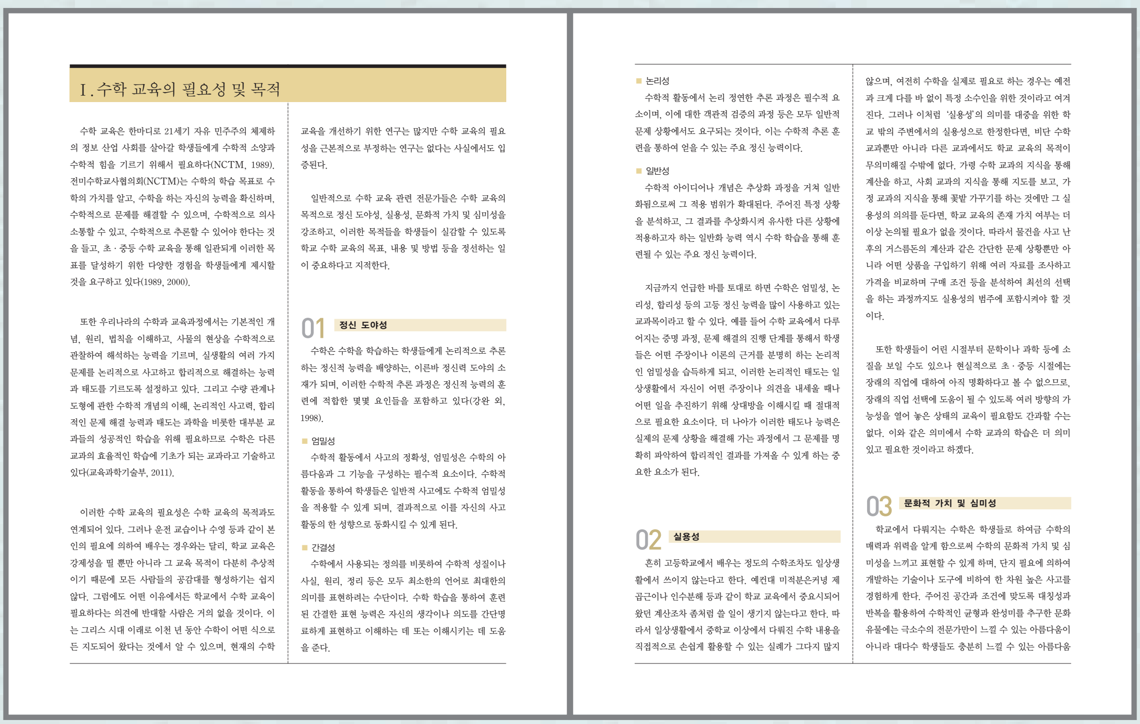
지은이 씀

구성과 특징

교사용 지도서는 크게 총론과 각론으로 나누어, 교사들의 전문성 신장에 도움을 줄 수 있는 내용과 교과서의 각 단원 지도에 유용한 자료들을 제공하였습니다.

총론

수학 교육의 필요성 및 목적, 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해, 수학 교과서의 개발 동향, 수학적 문제 해결, 수학과 평가의 특징 및 방법, 좋은 수업의 의미, 수학과 수업 평가 등을 설명하였고, 교과서의 구성과 연간 지도 계획안을 제시하였습니다.



I. 수학 교육의 필요성 및 목적

수학 교육은 한마디로 21세기 자유 민주주의 체제하의 정보 산업 사회를 살아갈 학생들에게 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 필요하다(NCTM, 1989). 전미수학교사협의회(NCTM)는 수학의 학습 목표로 수학의 가치를 알고, 수학을 하는 자신의 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통할 수 있고, 수학적으로 추론할 수 있어야 한다는 것을 들고, 초 · 중등 수학 교육을 통해 일관되게 이러한 목표를 달성하기 위한 다양한 경험을 학생들에게 제시할 것을 요구하고 있다(1989, 2000).

또한 우리나라의 수학과 교육과정에서는 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르도록 설정하고 있다. 그리고 수량 관계나 도형에 관한 수학적 개념의 이해, 논리적인 사고력, 합리적인 문제 해결 능력과 태도는 과학을 비롯한 대부분 교과들의 성공적인 학습을 위해 필요하므로 수학은 다른 교과의 효율적인 학습에 기초가 되는 교과라고 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011).

이러한 수학 교육의 필요성은 수학 교육의 목적과도 연계되어 있다. 그러나 운전 교습이나 수영 등과 같이 본인의 필요에 의하여 배우는 경우와는 달리, 학교 교육은 강제성을 띨 뿐만 아니라 그 교육 목적이 다분히 추상적이기 때문에 모든 사람들의 공감대를 형성하기는 쉽지 않다. 그럼에도 어떤 이유에서든 학교에서 수학 교육이 필요하다는 의견에 반대할 사람은 거의 없을 것이다. 이는 그리스 시대 이래로 이천 년 동안 수학이 어떤 식으로든 지도되어 왔다는 것에서 알 수 있으며, 현재의 수학 교육을 개선하기 위한 연구는 많지만 수학 교육의 필요성을 근본적으로 부정하는 연구는 없다는 사실에서도 입증된다.

일반적으로 수학 교육 관련 전문가들은 수학 교육의 목적으로 정신 도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성을 강조하고, 이러한 목적들을 학생들이 실감할 수 있도록 학교 수학 교육의 목표, 내용 및 방법 등을 정선하는 일이 중요하다고 지적한다.

01 정신 도야성

수학은 수학을 학습하는 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 배양하는, 이른바 정신력 도야의 소재가 되며, 이러한 수학적 추론 과정은 정신적 능력의 훈련에 적합한 몇몇 요인들을 포함하고 있다(강완 외, 1998).

■ 엄밀성

수학적 활동에서 사고의 정확성, 엄밀성은 수학의 아름다움과 그 기능을 구성하는 필수적 요소이다. 수학적 활동을 통하여 학생들은 일반적 사고에도 수학적 엄밀성을 적용할 수 있게 되며, 결과적으로 이를 자신의 사고 활동의 한 성향으로 동화시킬 수 있게 된다.

■ 간결성

수학에서 사용되는 정의를 비롯하여 수학적 성질이나 사실, 원리, 정리 등은 모두 최소한의 언어로 최대한의 의미를 표현하려는 수단이다. 수학 학습을 통하여 훈련된 간결한 표현 능력은 자신의 생각이나 의도를 간단명료하게 표현하고 이해하는 데 또는 이해시키는 데 도움을 준다.

■ 논리성

수학적 활동에서 논리 정연한 추론 과정은 필수적 요소이며, 이에 대한 객관적 검증의 과정 등은 모두 일반적 문제 상황에서도 요구되는 것이다. 이는 수학적 추론 훈련을 통하여 얻을 수 있는 주요 정신 능력이다.

■ 일반성

수학적 아이디어나 개념은 추상화 과정을 거쳐 일반화됨으로써 그 적용 범위가 확대된다. 주어진 특정 상황을 분석하고, 그 결과를 추상화시켜 유사한 다른 상황에 적용하고자 하는 일반화 능력 역시 수학 학습을 통해 훈련될 수 있는 주요 정신 능력이다.

지금까지 언급한 바를 토대로 하면 수학은 엄밀성, 논리성, 합리성 등의 고등 정신 능력을 많이 사용하고 있는 교과목이라고 할 수 있다. 예를 들어 수학 교육에서 다루어지는 증명 과정, 문제 해결의 진행 단계를 통해서 학생들은 어떤 주장이나 이론의 근거를 분명히 하는 논리적인 엄밀성을 습득하게 되고, 이러한 논리적인 태도는 일상생활에서 자신이 어떤 주장이나 의견을 내세울 때나 어떤 일을 추진하기 위해 상대방을 이해시킬 때 절대적으로 필요한 요소이다. 더 나아가 이러한 태도나 능력은 실제의 문제 상황을 해결해 가는 과정에서 그 문제를 명확히 파악하여 합리적인 결과를 가져올 수 있게 하는 중요한 요소가 된다.

02 실용성

흔히 고등학교에서 배우는 정도의 수학조차도 일상생활에서 쓰이지 않는다고 한다. 예컨대 미적분은커녕 제곱근이나 인수분해 등과 같이 학교 교육에서 중요시되어 왔던 계산조차 좀처럼 쓸 일이 생기지 않는다고 한다. 따라서 일상생활에서 중학교 이상에서 다뤄진 수학 내용을 직접적으로 손쉽게 활용할 수 있는 실례가 그다지 많지 않으며, 여전히 수학을 실제로 필요로 하는 경우는 예전과 크게 다를 바 없이 특정 소수인을 위한 것이라고 여겨진다. 그러나 이처럼 '실용성'의 의미를 대중을 위한 학교 밖의 주변에서의 실용성으로 한정한다면, 비단 수학 교과뿐만 아니라 다른 교과에서도 학교 교육의 목적이 무의미해질 수밖에 없다. 가령 수학 교과의 지식을 통해 계산을 하고, 사회 교과의 지식을 통해 지도를 보고, 가정 교과의 지식을 통해 꽃밭 가꾸기를 하는 것에만 그 실용성의 의의를 둔다면, 학교 교육의 존재 가치 여부는 더 이상 논의될 필요가 없을 것이다. 따라서 물건을 사고 난 후의 거스름돈의 계산과 같은 간단한 문제 상황뿐만 아니라 어떤 상품을 구입하기 위해 여러 자료를 조사하고 가격을 비교하며 구매 조건 등을 분석하여 최선의 선택을 하는 과정까지도 실용성의 범주에 포함시켜야 할 것이다.

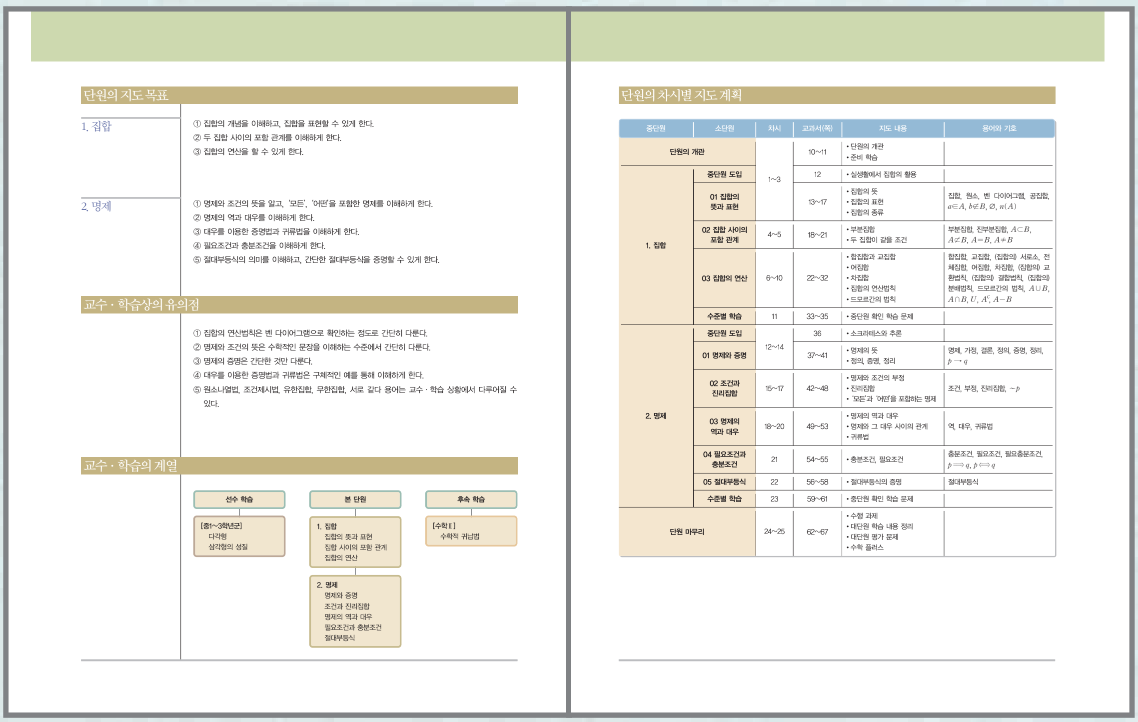
또한 학생들이 어린 시절부터 문학이나 과학 등에 소질을 보일 수도 있으나 현실적으로 초 · 중등 시절에는 장래의 직업에 대하여 아직 명확하다고 볼 수 없으므로, 장래의 직업 선택에 도움이 될 수 있도록 여러 방향의 가능성을 열어 놓은 상태의 교육이 필요함도 간과할 수는 없다. 이와 같은 의미에서 수학 교과의 학습은 더 의미 있고 필요한 것이라고 하겠다.

03 문화적 가치 및 심미성

학교에서 다뤄지는 수학은 학생들로 하여금 수학의 매력과 위력을 알게 함으로써 수학의 문화적 가치 및 심미성을 느끼고 표현할 수 있게 하며, 단지 필요에 의하여 개발하는 기술이나 도구에 비하여 한 차원 높은 사고를 경험하게 한다. 주어진 공간과 조건에 맞도록 대칭성과 반복을 활용하여 수학적인 균형과 완성미를 추구한 문화 유물에는 극소수의 전문가만이 느낄 수 있는 아름다움이 아니라 대다수 학생들도 충분히 느낄 수 있는 아름다움

각론

단원별 지도에 참고할 수 있는 지도 목표, 교수 · 학습상의 유의점, 지도 계획, 이론적 배경, 차시별 교수 · 학습 과정안(예시), 교과서 내용의 해설과 문제 풀이 및 교과서 내용 지도 시 유용한 자료들을 제시하였습니다.



단원의 지도 목표

1. 집합

① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있게 한다.
② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해하게 한다.
③ 집합의 연산을 할 수 있게 한다.

2. 명제

① 명제와 조건의 뜻을 알고, '모든', '어떤'을 포함한 명제를 이해하게 한다.
② 명제의 역과 대우를 이해하게 한다.
③ 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해하게 한다.
④ 필요조건과 충분조건을 이해하게 한다.
⑤ 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 집합의 연산법칙은 벤 다이어그램으로 확인하는 정도로 간단히 다룬다.
② 명제와 조건의 뜻은 수학적인 문장을 이해하는 수준에서 간단히 다룬다.
③ 명제의 증명은 간단한 것만 다룬다.
④ 대우를 이용한 증명법과 귀류법은 구체적인 예를 통해 이해하게 한다.
⑤ 원소나열법, 조건제시법, 유한집합, 무한집합, 서로 같다 용어는 교수 · 학습 상황에서 다루어질 수 있다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습	본 단원	후속 학습
[중1~3학년군] 다각형 삼각형의 성질	1. 집합 집합의 뜻과 표현 집합 사이의 포함 관계 집합의 연산 2. 명제 명제와 증명 조건과 진리집합 명제의 역과 대우 필요조건과 충분조건 절대부등식	[수학 Ⅱ] 수학적 귀납법

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~3	10~11	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 집합	중단원 도입		12	• 실생활에서 집합의 활용	
	01 집합의 뜻과 표현		13~17	• 집합의 뜻 • 집합의 표현 • 집합의 종류	집합, 원소, 벤 다이어그램, 공집합, $a \in A$, $b \notin B$, $\varnothing$, $n(A)$
	02 집합 사이의 포함 관계	4~5	18~21	• 부분집합 • 두 집합이 같을 조건	부분집합, 진부분집합, $A \subset B$, $A \not\subset B$, $A=B$, $A \neq B$
	03 집합의 연산	6~10	22~32	• 합집합과 교집합 • 여집합 • 차집합 • 집합의 연산법칙 • 드모르간의 법칙	합집합, 교집합, (집합의) 서로소, 전체집합, 여집합, 차집합, (집합의) 교환법칙, (집합의) 결합법칙, (집합의) 분배법칙, 드모르간의 법칙, $A \cup B$, $A \cap B$, U, A^C, $A-B$
	수준별 학습	11	33~35	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 명제	중단원 도입	12~14	36	• 소크라테스와 추론	
	01 명제와 증명		37~41	• 명제의 뜻 • 정의, 증명, 정리	명제, 가정, 결론, 정의, 증명, 정리, $p \rightarrow q$
	02 조건과 진리집합	15~17	42~48	• 명제와 조건의 부정 • 진리집합 • '모든'과 '어떤'을 포함하는 명제	조건, 부정, 진리집합, $\sim p$
	03 명제의 역과 대우	18~20	49~53	• 명제의 역과 대우 • 명제와 그 대우 사이의 관계 • 귀류법	역, 대우, 귀류법
	04 필요조건과 충분조건	21	54~55	• 충분조건, 필요조건	충분조건, 필요조건, 필요충분조건, $p \Longrightarrow q$, $p \Longleftrightarrow q$
	05 절대부등식	22	56~58	• 절대부등식의 증명	절대부등식
	수준별 학습	23	59~61	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		24~25	62~67	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 지도 목표

교육과정에 명시된 대단원의 지도 목표를 중단원 별로 제시하였습니다.

교수 · 학습상의 유의점

대단원의 지도에 있어서 유의해야 할 사항 중 교육과정에 명시된 내용을 설명하였습니다.

교수 · 학습의 계열

단원과 관련하여 선수 학습과 후속 학습의 연계성을 제시하였습니다.

단원의 차시별 지도 계획

중단원과 소단원별 교과서 쪽수, 지도 내용, 교육과정에 명시된 용어와 기호 등을 쉽게 알아볼 수 있도록 표로 정리하였습니다.

단원의 이론적 배경

단원의 이론적 배경과 이론이 발전되어 온 수학사적 배경을 설명하였습니다.

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

두 개의 차시에 해당하는 교수 · 학습 과정안을 예로 제시하였습니다.

구성과 특징

중단원을 시작하며

교육과정에 명시된 중단원의 지도 목표를 제시하였습니다.

중단원의 구성

중단원의 소단원명과 각 소단원의 지도 내용을 제시하였습니다.

들어가면서

중단원 도입에 소개된 실생활 소재와 단원과의 관련성을 설명하였습니다.

성취 기준과 성취 수준

교육과정에 제시된 단원의 성취 기준 및 상, 중, 하 수준별 성취 수준을 제시하였습니다.

소단원 지도 목표

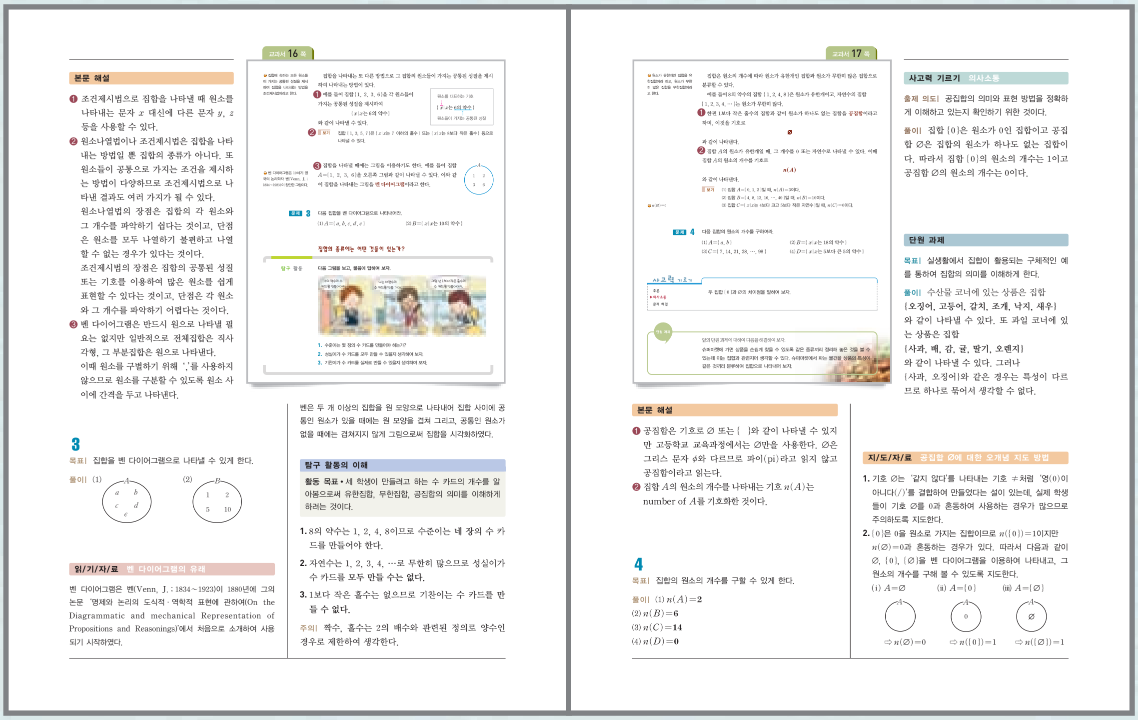
소단원별로 세부적이고 구체적인 지도 목표를 제시하였습니다.

교수 · 학습상의 유의점

소단원의 지도에 있어서 특별히 유의해야 할 사항을 정리하였습니다.

새로 나온 용어와 기호

소단원에서 새로 배우게 될 교육과정에 명시된 용어와 기호를 제시하였습니다.



생각 열기 참고 자료

생각 열기와 관련된 내용에 대한 충분한 설명을 제시하였습니다.

탐구 활동의 이해

탐구 활동의 목표와 자세한 풀이를 제시하였습니다.

본문 해설

교과서에 제시된 학습 내용을 해설하고, 보다 자세한 설명을 덧붙였습니다.

지도 자료

내용 지도 시 필요한 보충 설명이나 기호에 대한 설명을 제시하였습니다.

읽기 자료

수학사, 생활 속 수학 등 각종 읽기 자료를 제시하였습니다.

문제의 해설

교과서 본문에 있는 모든 문제의 출제 의도 및 지도 목표와 자세한 풀이를 제시하였습니다.

수행 과제

수행 과제의 출제 의도와 구체적인 예시 답안을 제시하였습니다.

대단원 학습 내용 정리

단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하였습니다.

대단원 평가 문제

단원 마무리에 나온 대단원 평가 문제의 지도 목표 및 풀이를 제시하였습니다.

수학 플러스

단원과 관련된 수학, 과학, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 등의 이야기를 소개하였습니다.

그들과 이야기를 나누며
가장 크게 깨달은 것은 자기가 진정으로
하고 싶어하는 것이 무엇인지 깨닫는다면
그 일을 미래의 어느 날로 미루지 말고,
또 그 일을 할 수 없는 이유들을 찾지 말고
'바로 지금' 시작해야 한다는 것이다.
흘러가는 시간은 언젠가 이룰 꿈을 위해
마냥 기다려주지 않으니까.

– 용서해의 《삶의 마지막 축제》 중에서 –

차례

총론

Ⅰ. 수학 교육의 필요성 및 목적

수학 교육은 한마디로 21세기 자유 민주주의 체제하의 정보 산업 사회를 살아갈 학생들에게 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 필요하다(NCTM, 1989). 전미수학교사협의회(NCTM)는 수학의 학습 목표로 수학의 가치를 알고, 수학을 하는 자신의 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통할 수 있고, 수학적으로 추론할 수 있어야 한다는 것을 들고, 초 · 중등 수학 교육을 통해 일관되게 이러한 목표를 달성하기 위한 다양한 경험을 학생들에게 제시할 것을 요구하고 있다(1989, 2000).

또한 우리나라의 수학과 교육과정에서는 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르도록 설정하고 있다. 그리고 수량 관계나 도형에 관한 수학적 개념의 이해, 논리적인 사고력, 합리적인 문제 해결 능력과 태도는 과학을 비롯한 대부분 교과들의 성공적인 학습을 위해 필요하므로 수학은 다른 교과의 효율적인 학습에 기초가 되는 교과라고 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011).

이러한 수학 교육의 필요성은 수학 교육의 목적과도 연계되어 있다. 그러나 운전 교습이나 수영 등과 같이 본인의 필요에 의하여 배우는 경우와는 달리, 학교 교육은 강제성을 띨 뿐만 아니라 그 교육 목적이 다분히 추상적이기 때문에 모든 사람들의 공감대를 형성하기는 쉽지 않다. 그럼에도 어떤 이유에서든 학교에서 수학 교육이 필요하다는 의견에 반대할 사람은 거의 없을 것이다. 이는 그리스 시대 이래로 이천 년 동안 수학이 어떤 식으로든 지도되어 왔다는 것에서 알 수 있으며, 현재의 수학 교육을 개선하기 위한 연구는 많지만 수학 교육의 필요성을 근본적으로 부정하는 연구는 없다는 사실에서도 입증된다.

일반적으로 수학 교육 관련 전문가들은 수학 교육의 목적으로 정신 도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성을 강조하고, 이러한 목적들을 학생들이 실감할 수 있도록 학교 수학 교육의 목표, 내용 및 방법 등을 정선하는 일이 중요하다고 지적한다.

01 정신 도야성

수학은 수학을 학습하는 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 배양하는, 이른바 정신력 도야의 소재가 되며, 이러한 수학적 추론 과정은 정신적 능력의 훈련에 적합한 몇몇 요인들을 포함하고 있다(강완 외, 1998).

■ 엄밀성

수학적 활동에서 사고의 정확성, 엄밀성은 수학의 아름다움과 그 기능을 구성하는 필수적 요소이다. 수학적 활동을 통하여 학생들은 일반적 사고에도 수학적 엄밀성을 적용할 수 있게 되며, 결과적으로 이를 자신의 사고 활동의 한 성향으로 동화시킬 수 있게 된다.

■ 간결성

수학에서 사용되는 정의를 비롯하여 수학적 성질이나 사실, 원리, 정리 등은 모두 최소한의 언어로 최대한의 의미를 표현하려는 수단이다. 수학 학습을 통하여 훈련된 간결한 표현 능력은 자신의 생각이나 의도를 간단명료하게 표현하고 이해하는 데 또는 이해시키는 데 도움을 준다.

■ 논리성

수학적 활동에서 논리 정연한 추론 과정은 필수적 요소이며, 이에 대한 객관적 검증의 과정 등은 모두 일반적 문제 상황에서도 요구되는 것이다. 이는 수학적 추론 훈련을 통하여 얻을 수 있는 주요 정신 능력이다.

■ 일반성

수학적 아이디어나 개념은 추상화 과정을 거쳐 일반화됨으로써 그 적용 범위가 확대된다. 주어진 특정 상황을 분석하고, 그 결과를 추상화시켜 유사한 다른 상황에 적용하고자 하는 일반화 능력 역시 수학 학습을 통해 훈련될 수 있는 주요 정신 능력이다.

지금까지 언급한 바를 토대로 하면 수학은 엄밀성, 논리성, 합리성 등의 고등 정신 능력을 많이 사용하고 있는 교과목이라고 할 수 있다. 예를 들어 수학 교육에서 다루어지는 증명 과정, 문제 해결의 진행 단계를 통해서 학생들은 어떤 주장이나 이론의 근거를 분명히 하는 논리적인 엄밀성을 습득하게 되고, 이러한 논리적인 태도는 일상생활에서 자신이 어떤 주장이나 의견을 내세울 때나 어떤 일을 추진하기 위해 상대방을 이해시킬 때 절대적으로 필요한 요소이다. 더 나아가 이러한 태도나 능력은 실제의 문제 상황을 해결해 가는 과정에서 그 문제를 명확히 파악하여 합리적인 결과를 가져올 수 있게 하는 중요한 요소가 된다.

02 실용성

흔히 고등학교에서 배우는 정도의 수학조차도 일상생활에서 쓰이지 않는다고 한다. 예컨대 미적분은커녕 제곱근이나 인수분해 등과 같이 학교 교육에서 중요시되어 왔던 계산조차 좀처럼 쓸 일이 생기지 않는다고 한다. 따라서 일상생활에서 중학교 이상에서 다뤄진 수학 내용을 직접적으로 손쉽게 활용할 수 있는 실례가 그다지 많지 않으며, 여전히 수학을 실제로 필요로 하는 경우는 예전과 크게 다를 바 없이 특정 소수인을 위한 것이라고 여겨진다. 그러나 이처럼 '실용성'의 의미를 대중을 위한 학교 밖의 주변에서의 실용성으로 한정한다면, 비단 수학 교과뿐만 아니라 다른 교과에서도 학교 교육의 목적이 무의미해질 수밖에 없다. 가령 수학 교과의 지식을 통해 계산을 하고, 사회 교과의 지식을 통해 지도를 보고, 가정 교과의 지식을 통해 꽃밭 가꾸기를 하는 것에만 그 실용성의 의의를 둔다면, 학교 교육의 존재 가치 여부는 더 이상 논의될 필요가 없을 것이다. 따라서 물건을 사고 난 후의 거스름돈의 계산과 같은 간단한 문제 상황뿐만 아니라 어떤 상품을 구입하기 위해 여러 자료를 조사하고 가격을 비교하며 구매 조건 등을 분석하여 최선의 선택을 하는 과정까지도 실용성의 범주에 포함시켜야 할 것이다.

또한 학생들이 어린 시절부터 문학이나 과학 등에 소질을 보일 수도 있으나 현실적으로 초·중등 시절에는 장래의 직업에 대하여 아직 명확하다고 볼 수 없으므로, 장래의 직업 선택에 도움이 될 수 있도록 여러 방향의 가능성을 열어 놓은 상태의 교육이 필요함도 간과할 수는 없다. 이와 같은 의미에서 수학 교과의 학습은 더 의미 있고 필요한 것이라고 하겠다.

03 문화적 가치 및 심미성

학교에서 다뤄지는 수학은 학생들로 하여금 수학의 매력과 위력을 알게 함으로써 수학의 문화적 가치 및 심미성을 느끼고 표현할 수 있게 하며, 단지 필요에 의하여 개발하는 기술이나 도구에 비하여 한 차원 높은 사고를 경험하게 한다. 주어진 공간과 조건에 맞도록 대칭성과 반복을 활용하여 수학적인 균형과 완성미를 추구한 문화 유물에는 극소수의 전문가만이 느낄 수 있는 아름다움이 아니라 대다수 학생들도 충분히 느낄 수 있는 아름다움

이 들어 있으며, 매우 간단한 수학적 원리를 활용하여 흥미진진한 게임을 하는 예에서도 그 심미적 가치를 쉽게 찾을 수 있다. 또한 수학의 아름다움이나 매력은 미적분의 기본 정리에서부터 신라 시대의 술병에 이르기까지 다양한 대상과 수준에서 발견될 수 있다. 이와 같은 풍부한 자료와 유연한 해석을 통하여 문화적 가치, 수학 고유의 심미성을 적절한 수준에서 확인하는 경험은 고등학교를 떠남과 동시에 수학과 멀어지는 대부분의 학생들에게 반드시 필요하다.

수학 교육에서 놓치지 말아야 하는 것은 모든 건전한 시민을 위한 공통적으로 기본적이면서도 필수적인 수학 내용이 무엇인가를 분명히 하는 것이다. 따라서 수학 교육은 모든 학생들에게 꼭 필요한 내용이 무엇인지 명확히 정할 필요가 있으며 그것이 다양한 상황과 측면에 적용되면서 철저히 그리고 깊이 있게 이해되도록 돕는 것이 필요할 것이다. 궁극적으로 교육의 목적은 학생의 잠재력을 계발하고, 건전한 사회인으로서의 역할을 수행하도록 돕는 데 있다. 다른 교과 교육이 그러하듯이 수학도 현대 사회와 미래 사회를 살아갈 건전한 시민으로서 그 사회를 지탱하는 문명적, 문화적 기저 중에서 수학을 기반으로 하는 것에 대하여 수학적으로 이해하는 눈을 기르기 위해 배우는 것이다.

결국 수학을 가르쳐야 하는 이유는 수학의 내용이 인간과 환경에 관한 각종 현상을 보는 안목과 수단을 제공해 주기 때문이다. 수학적 안목의 고양이라는 것은 수학의 실용성과도 연결될 수 있지만 그보다는 경제 · 사회 · 문화 등 제 분야에 녹아 있는 수학적 현상이나 원리 · 모델 등을 파악하여 이들 분야를 더욱 깊이 있고 창의적인 방법으로 이해할 수 있도록 하는 것을 의미한다. 또한 수학은 어떤 문제를 여러 가지 수학적 방법으로 해결하게 함으로써 문제 해결의 지혜를 기르고, 한 현상에 담긴 수학적 질서를 이해하기 위해 배우며, 사물의 법칙과 질서에 대한 수학적 이해력을 기르기 위해 배운다고도 할 수 있다. 즉, 조각상의 무게중심, 물건 구매, 유전자의 배열, 황금 비율, 투자에 따른 수익률, 건축, 디지털의 세계, 자동차의 속도와 회전 등 일상생활의 다양한 모습들을 수학적으로 이해하기 위해서 수학을 배우는 것이다(황혜정 외, 2012).

II. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해

2009년 12월 23일에 교육과정 총론이 발표됨에 따라 2011년 8월 9일, 2009 개정 교육과정에 따른 '수학과 교육과정'이 최종 확정 및 공표되었다. 이 교육과정은 2013년부터 현장에 적용되고 있으며, 이에 대한 개정 배경 및 방향, 창의성 강조를 위한 수학적 과정(mathematical process)의 반영, 교육과정 문서의 구성 및 체제, 학교급별 주요 내용 변화에 대해 간략히 살펴보면 다음과 같다.

01 개정의 기본 방향

새로운 수학과 교육과정에서는 우선적으로 2009 개정 교육과정 총론의 취지에 부합하고 기존 수학과 교육과정의 문제점을 극복할 수 있는 새로운 교육과정의 성격, 목표, 내용 등을 개발하는 데 주력하였다. 특히 미래 사회에서 요구되는 핵심 역량의 주요 요소인 창의 중심의 교육과정 운영 및 교과용 도서 구현이 가능하도록 이에 따른 교육 목표와 내용을 개발하는 데에 초점을 두었으며, 다음의 항목을 구현하고자 하는 것이 새로운 교육과정의 주요 개발 방향이다.

가. 수학 교과 내용의 양 20 % 경감

2009 개정 교육과정 총론의 '교육과정 편성 · 운영 지침'의 주요 변화 내용 중 2007 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 대비 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 내용 20 % 경감의 배경이 될 수 있는 근거는 학교의 특성, 학생 · 교사 · 학부모의 요구 및 필요에 따라 학교가 자율적으로 교과(군)별 20 % 범위 내에서 시수를 증감하여 운영할 수 있는 데 있다(교육과학기술부, 2009). 2009 개정 교육과정 총론에서는 각 교과별로 교육과정의 성취 기준을 개발할 경우 학습량이 증가하여 교육 내용의 적정화를 저해할 우려가 있음을 염두에 두고, 교과별 교육과정 개발 시 현행 교육과정 대비 20 %의 내용이 경감되어야 함을 적극 주장하였다(박순경, 2010). 즉, 기준 수업 시수를 감안하되 교과 내용의 양은 현행 교육과정보다 20 % 정도 감축한다고 상정하고 최적한 학습 내용을 정선함으로써 보다 질 높은 교과 교육과정을 추구하도록 하였다.

나. 수학적 창의성 강조에 따른 수학적 과정

(1) 수학적 창의성의 의미

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 수학적 과제를 해결하는 과정에서 다양하고 독창적인 해결 방법을 산출하거나 새로운 관점에서 과제를 탐구하고 지식을 구성하는 능력을 의미한다. 여기서 수학적 과제는 학생들의 수학적 능력 계발을 위한 내용적 배경을 제공하는 것으로서, 예를 들어 학생들이 참여하게 되는 프로젝트, 질문, 문제, 활동 등을 망라한 것이다.

이와 같은 수학적 창의성을 계발하기 위해서는 우선 학생들이 정형화된 틀이나 형식에 얽매이지 않고 자신의 수학적 아이디어를 자유롭게 표현할 수 있는 분위기를 조성해 주어야 한다. 이와 같은 학습 상황에서 학생들은 수학을 학습하고 행하는 과정에서 과제에 대한 호기심, 사고와 판단에서의 독자성, 과제 해결에 대한 집착성과 끈기 등과 같은 창의성의 정의적 측면도 발전시키게 될 것이다.

한편 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 학교 수준에서의 수학적 창의성을 의미하기 때문에, 학습자가 수학적 추론과 통찰을 활용하여 기존의 지식과 경험을 유의미한 방법으로 분석 · 연결 · 통합하는 과정에서 창의성이 발현된다고 본다. 또한 학교 수학을 통해서 수학적 창의성을 계발할 때에는 창의적인 사고와 관련되는 일련의 과정을 수학적으로 의사소통하고 표현하는 능력도 신장시켜야 할 것이다.

⑵ 수학적 과정의 의미 및 반영

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서 말하는 '수학적 과정'은 수와 연산, 도형 등의 내용 영역에서 다루는 수학적 주제를 이해하고 습득하는 데에서, 그리고 그러한 수학적 주제를 활용하여 다양한 현상을 이해하고 문제를 해결하고 의사소통하는 데에서 활성화되어야 하는 능력을 의미한다. 다시 말해서 '수학적 과정'은 학생들 주변의 다양한 현상을 수학과 연결하고 다양한 상황에서 발생하는 문제를 해결할 때 활성화되어야 하는 수학의 과정적 기능을 의미하며, '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통' 등을 구성 요소로 가지는 개념으로 정의하였다.

여기서 '수학적 문제 해결'은 수학의 문제나 문제적 상황에서 그 해를 찾아내기 위하여 이미 알고 있는 수학의 개념, 원리, 법칙 등의 지식이나 기능을 바탕으로 수학적 발견술이나 전략 등의 다양하면서 종합적인 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. '수학적 추론'은 수학적 현상이나 사실 등을 대상으로 그와 관련된 잠재적인 수학적 규칙성이나 원리, 구조 등에 결론적으로 이르기 위한 논리적 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. 그리고 '수학적 의사소통'은 수학의 아이디어나 생각 등을 수학적 표현 수단을 통하여 서로 공유하고 학습하게 되는 과정을 수행하는 것을 의미한다(NCTM, 2000).

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 구성 체제를 살펴보면, '목표', '내용', '교수 · 학습 방법', '평가' 등의 순으로 구성되어 있다. 학교에서 구체적으로 학습해야 할 수학 성취 기준은 '내용'에서 학년(군)별로 제시되어 있다. 한편 '수학적 과정'의 하위 구성 요소로 설정한 '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'은 우리나라의 수학과 교육과정에서 지속적으로 강조되어 온 사항이다. 2007 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서도 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통을 강조하고 있다.

학교의 수학 교수 · 학습의 실질적인 모습을 결정한다고 할 수 있는 교과서의 경우, 그 내용은 주로 수학과 교육과정의 '내용'에 제시되어 있는 성취 기준을 중심으로 구성된다. 현행 수학과 교육과정과 같이 '목표'와 '교수 · 학습 방법'에서 '수학적 과정'과 관련된 제 측면을 과거와 같이 선언적으로만 제시하는 것은, '수학적 과정'과 관련된 제 측면들이 교과서의 내용 구성에 배경으로서 암묵적으로 스며들게 되는 장점이 있다고 볼 수 있지만, 학생들에게 적극적이고 명확하게 지도되지 않는다는 한계점 또한 지니고 있다.

따라서 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 현행 수학과 교육과정의 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 선언적으로 제시되고 있는 '수학적 과정'의 제 측면들을 보다 구체적인 성취 기준을 가지고 '내용'의 진술에 포함시킴으로써 교과용 도서 및 수업 상황에서 수학적 과정과 관련된 제 측면들을 더욱 적극적이고 분명히 다루게 하고 있다. 한마디로 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'을 '수학적 과정'으로 간주하고, 이를 학습 내용 성취 기준 및 교수 · 학습상의 유의점, 그리고 교수 · 학습 방법 등에 반영하였다.

수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통의 특징은 각각 다음과 같다.

〈표 Ⅱ-1〉 수학적 과정의 요소 및 특징

수학적 문제 해결
가. 주어진 문제의 해결에 필요한 정보를 확인 또는 보완하고 적절한 전략이나 사고 과정을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
나. 수학적인 방법으로 문제 해결의 과정과 결과의 타당성을 설명할 수 있다.
다. 문제 해결 과정이나 완결 후 문제 제기를 통하여 문제 해결을 발전적으로 이끌 수 있다.
라. 문제 해결에서 얻은 결과와 사용된 전략을 일반화하여 새로운 문제 상황에 적용할 수 있다.

수학적 추론
가. 수학적 추측이나 주장을 만들고, 수학적 지식에 근거하여 이를 정당화할 수 있다.
나. 수학적 아이디어나 사고 과정을 수학적인 방법으로 검증할 수 있다.
다. 수학적 활동에서 다양하고 독창적인 아이디어가 지니는 가치를 인식할 수 있다.
수학적 의사소통
가. 수학적인 방법을 활용하여 자신의 생각을 논리적으로 정확하게 표현하고, 다른 사람을 이해시킬 수 있다.
나. 수학적 활동 중에 자신의 수학적인 생각을 다른 사람과 주고받는 활동의 중요성을 인식하고, 이를 통하여 자신의 생각을 개선시킬 수 있다.
다. 다른 사람의 수학적 아이디어나 사고 과정을 이해하고 평가할 수 있다.

(3) 학년군제 도입 및 적용

2009 개정 교육과정 총론의 초·중등학교 교육과정 구성의 방침에 의하면 “교육과정 편성·운영의 경직성을 탈피하고, 학년 간 상호 연계와 협력을 통한 학교 교육과정 편성·운영의 유연성을 부여하기 위하여 학년군을 설정한다.”라고 규정하고 있다(교육과학기술부, 2009).

현재 2007 개정 교육과정 체제에서는 학년제를 따르고 있다. 즉, 각 학년에서 배워야 할 내용을 학년별로 제시하였다. 반면 학년군제는 학생들이 배워야 할 내용을 학년별이 아니라 몇 개 학년을 묶어서 제시한다. 예를 들어 초등학교 1학년에서 2학년 사이에 학습할 내용을 초등학교 1~2학년군으로 제시하는 것이다.

학년군제 도입에 따른 가장 큰 변화는 학생들의 수준별 학습이다. 학년군제를 실시하는 것은 학생들의 학습 수준의 차이를 인정하는 것이다. 이해가 빠른 학생들은 더 많은 내용을 혹은 더 깊은 내용을 학습할 수 있고, 이해가 느린 학생들은 기본적인 내용을 집중적으로 학습할 수 있다. 학생들은 자신의 흥미나 적성을 고려하여 필요한 수학 교과를 선택할 수 있으며, 이는 학생들의 진로 선택과 관련될 수 있다.

또 다른 변화는 학년군제에서는 다양한 교과서가 사용될 수 있다는 것이다. 교육과정에서 엄격한 학년의 구분이 없어지고 내용이 통합적으로 제시되기 때문에 관련 내용들을 여러 가지 방법으로 재배치할 수 있게 된다. 예를 들어 초등학교 1학년과 2학년에서 학습할 수와 연산 영역을 초등학교 1학년에서 집중적으로 학습하도록 하는 교과서를 구성할 수 있다. 또는 중학교에서 대수와 함수를 밀접하게 관련시켜서 교과서를 구성할 수 있다. 즉, 수학 교과가 가진 특성을 발휘하여 학생들의 창의력을 발달시킬 수 있는 다양한 교과서의 출현이 가능하게 된다.

그러나 학년군제에 따르는 단점들도 충분히 예상되기 때문에 학년군제를 실행하기 위해서는 다음과 같은 사항들에 대한 해결 방안이 모색되어야 한다.

첫째, 수준별 수업 방안이 마련되어야 한다. 학년제 대신에 학년군제를 실시하는 취지 중의 하나는 학생들의 학습 수준 차를 인정하고 학생들의 수준에 맞는 학습을 통해서 사고 발달과 진로 선택에 긍정적인 효과를 주기 위함이다. 따라서 학생들의 수준에 적합한 수업이 가능한 수준별 수업 방안이 마련되어야 한다.

둘째, 수준별 수업이 원활히 시행되기 위해서는 적절한 평가 기준이 마련되어야 한다. 학생들의 다양한 진로와 흥미를 고려하여 과목을 이수하고 이에 대한 타당한 평가가 이루어져야 한다.

셋째, 교육과정이 학년군으로 구성되더라도 학년별로 교과서가 어떻게 저술되어야 하는지에 대한 기준이 필요하다.

넷째, 전학생들을 위한 보충 학습 과정 등 교수·학습 방안 및 정책이 마련되어야 한다.

02 수학과 교육과정의 특징

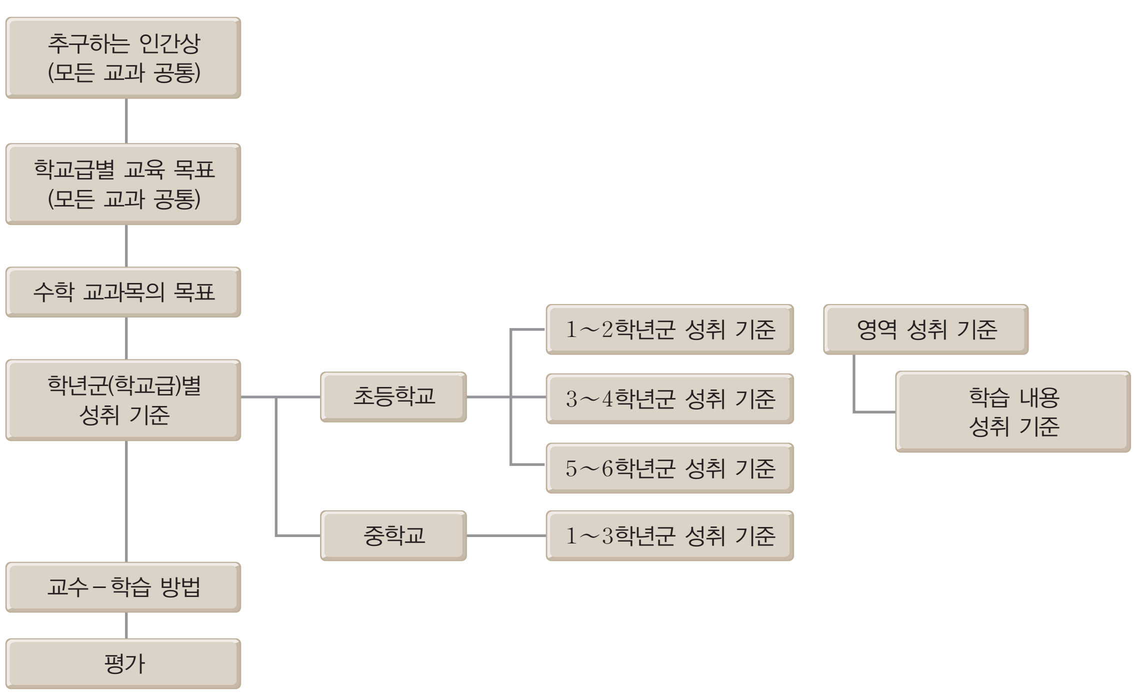
가. 교과목의 구성 및 문서 체제

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 교과목은 공통 교육과정과 선택 교육과정으로 구성되어 있으며, 공통 교육과정에는 초등학교 1학년에서부터 중학교 3학년까지 다뤄지는 「수학」 교과목이 해당되며, 선택 교육과정에는 고등학교 1학년에서 3학년까지 다뤄지는 9개 교과목이 포함되어 있다. 선택 교육과정은 '기본 과목', '일반 과목', '심화 과목'으로 구성되어 있으며, 일반 과목은 모두 5단위의 6개 선택 과목으로 「수학Ⅰ」, 「수학Ⅱ」, 「확률과 통계」, 「미적분Ⅰ」, 「미적분Ⅱ」, 「기하와 벡터」로 구성되어 있다. 그 밖에 기본 과목에는 「기초 수학」, 심화 과목에는 「고급 수학Ⅰ」과 「고급 수학Ⅱ」가 포함된다.

공통 교육과정		
1. 수학		
선택 교육과정		
〈기본 과목〉	〈일반 과목〉	〈심화 과목〉
1. 기초 수학	1. 수학Ⅰ 2. 수학Ⅱ 3. 확률과 통계 4. 미적분Ⅰ 5. 미적분Ⅱ 6. 기하와 벡터	1. 고급 수학Ⅰ 2. 고급 수학Ⅱ

[그림 Ⅱ-1] 수학과 교육과정의 교과목 구성

공통 교육과정 기간에 다뤄지는 수학 교과목의 문서 체제를 예로 들어 도식화하면 다음과 같으며, 선택 교육과정 기간의 9개 교과목의 문서 체제도 이와 동일한 방식으로 구성되어 있다. 여기서 각 교과목의 '3. 목표'는 2007 개정 교육과정의 '1. 성격'과 '2. 목표'의 두 부문의 진술을 통합하여 진술하고 있다. 특히 「수학」 교과목의 목표의 경우, 예전에 분리하여 제시되어 있던 초등학교와 중학교의 교육 목표가 통합, 진술되었다.



[그림 Ⅱ-2] 수학 교과목의 목표 및 성취 기준

나. 영역 구분의 변경

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 제7차 개정의 것과 마찬가지로, 학교급별 특성을 감안하여 초등학교와 중학교 각각의 내용 영역을 구분하였으며, 초등학교의 경우 ‘규칙성과 문제 해결’ 영역을 ‘규칙성’으로 변경하였다. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 모든 학교급 및 모든 수학 교과목에 걸쳐 수학적 과정의 요소로서 문제 해결 활동을 전 영역 및 세부 내용에 걸쳐 적극 반영하도록 강조하고 있기 때문이다.

2007 개정 교육과정			
초등학교	수와 연산	중·고등학교	수와 연산
	도형		문자와 식
	측정		함수
	확률과 통계		확률과 통계
	규칙성과 문제 해결		기하

2009 개정 교육과정			
초등학교	수와 연산	중학교	수와 연산
	도형		문자와 식
	측정		함수
	규칙성		확률과 통계
	확률과 통계		기하

[그림 Ⅱ-3] 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 영역명

03 학교급별 내용 변화

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 학교급별, 학년군별 내용의 변화는 기본적으로 학교 현장에서의 창의성 활동을 실제적이고 효율적으로 실행하기 위한 것으로, 학습 내용의 적정화 및 학년별 내용 분량이 조정되었다. 수학과 교육과정의 총 10개 교과목에 대한 주요 변화 내용을 학교급별로 살펴보면 다음과 같다.

가. 초등학교

(1) 수와 연산

초등학교의 수와 연산 영역에서 가장 큰 변화로는 자연수 및 분수의 지도 시기를 재조정하고, 계산 연습을 통한 단순한 연산 기능 신장이 아니라 연산 감각 및 양적 추론 능력을 강화한 점을 들 수 있다. 또한 사칙연산의 계산 결과를 어림한 후 어림한 값을 확인하거나 소수의 복잡한 계산에 있어서 계산기를 도입하여 활용할 수 있게 함으로써, 지나친 계산 연습에서 기인하는 학습 부담을 경감하고자 하였다.

(2) 도형

2007 개정 교육과정에서 평면도형의 각 구성 요소에 대한 학습 후 도형의 언어적이고 명시적인 정의를 통해서 도형 개념을 도입하는 방식을 대신하여, 2009 개정 교육과정에서는 도형의 모양 인식 및 분류 활동을 토대로 하여 도형 및 그 구성 요소에 대한 직관적인 이해와 더불어 이름을 먼저 학습한 후 점차 분석적, 명시적으로 도형의 개념 및 성질을 학습할 기회를 제공하였다. 한편 2007 개정 교육과정에서 분산되어 지도되었던 각, 삼각형, 사각형 관련 단원의 내용들을 각각 통합적으로 취급함으로써 학생들의 개념 구조의 체계적 형성을 돕고자 하였다. 또 초등학생의 인지 수준에 적합하지 않은 내용으로 간주되는 사각형의 포함 관계나 수학 학습의 계열상 초등 수학에서 다루는 것이 적합하지 않은 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형 및 회전체를 삭제하였다.

(3) 측정

측정 영역은 실생활과 밀접하게 관련되어 있으므로, 실생활과 관련지어 측정의 필요성을 인식하게 하고 측정 및 어림 활동을 통하여 양감을 기르는 데 중점을 두었다. 측정 영역에서의 계산은 측정 결과 간의 단순 연산이나 단위 환산은 축소하고, 측정의 관점에 중점을 두도록 하였다. 길이, 무게, 들이, 넓이의 양감을 기르는 데 중점을 두고, 측정 영역에서 합과 차를 계산하거나 단순한 단위 환산 연습은 약화하였으며, 들이 및 무게의 덧셈과 뺄셈은 실생활 문제 상황을 통하여 다루도록 하였다. 또한 부피의 양감을 강조하고 부피의 단위 사이의 환산이나 부피와 들이의 단위 환산은 삭제하여 학습량을 감축하였다.

(4) 규칙성

2007 개정 교육과정에서 '규칙성과 문제 해결' 영역은 주로 문제 해결 방법, 규칙 찾기, 비와 비율, 비례 등을 포괄하였다. 2009 개정 교육과정에서는 '문제 해결'이 다른 영역의 내용적 성격과 달리 과정적 성격을 띠고 있으며 수학 교과 전 영역에서 고루 지도되어야 한다는 취지에서 '문제 해결' 부분은 전 영역으로 재편하고, 영역명은 '규칙성'으로 설정하였다. 규칙성 영역의 주요 변화로는 각 학년에 분산되어 있던 규칙 찾기 활동을 통합하고 탐구 활동 및 놀이를 활용하고자 하였다. 비율 중 할, 푼, 리나 연비는 그 중요도 및 쓰임새를 재고하여 삭제하였으며, 방정식은 중학교의 학습 내용과 중복하여 다루어지고 있으므로 초등학교에서는 삭제하고 중학교의 '일차방정식'으로 이동 통합함으로써 학습량을 감축하였다.

(5) 확률과 통계

확률과 통계 영역에서의 가장 큰 변화는 줄기와 잎 그림, 경우의 수와 확률을 중학교로 이동 통합하고, 초등학교에 가능성의 개념을 도입한 것이다. 줄기와 잎 그림은 학습량 감축 및 학문 내에서의 개념 간 관련성을 고려하여 중학교의 통계 영역과 의미 있게 연결되도록 상향 이동하였다. 또한 경우의 수와 확률은 초등학교와 중학교에서 내용 중복 및 학습량 감축의 취지에서 중학교로 이동 통합하였고, 확률 개념의 계열적 구성이라는 측면에서 가능성이라는 개념을 초등학교 5~6학년군에 도입하였다.

이상으로 초등학교에서의 주요 변화 내용을 정리하면 다음과 같다.

- 시간의 덧셈과 뺄셈 약화 (3~4학년군)
- 사각형의 포함 관계 삭제 (3~4학년군)
- 할, 푼, 리 삭제 (5~6학년군)
- 등식의 성질 삭제 (5~6학년군), 중학교로 상향 이동
- 방정식 삭제 (5~6학년군), 중학교로 상향 이동
- 연비의 삭제 (5~6학년군)
- 겉넓이와 부피 통합 및 부피와 들이 사이의 관계 삭제 (5~6학년군)
- 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형 삭제 (5~6학년군)
- 회전체 삭제 (5~6학년군), 중학교로 상향 이동
- 가능성 도입 및 확률 삭제 (5~6학년군), 중학교로 상향 이동
- 줄기와 잎 그림 삭제 (5~6학년군), 중학교로 상향 이동

나. 중학교

(1) 수와 연산

수는 수학에서 다루는 대상 중에서 가장 기본이 되는 개념으로서 수의 개념과 연산에 대한 이해는 실생활뿐 아니라 다른 교과나 수학의 다른 영역을 학습하는 데 필수적이다. 따라서 수와 연산 영역은 수의 개념과 연산에 대한 이해를 높이고 이후의 학습과 연계될 수 있는 필수적인 요소만을 선정하였다. 또한 집합은 고등학교로 상향 이동하였고, 근삿값은 삭제하였다.

(2) 문자와 식

문자는 생활 주변이나 자연 및 사회 현상을 수학적으로 간단하게 표현하고 의사소통을 원활히 할 수 있게 해준다. 문자와 식 영역에서는 학생들이 자연스럽게 문자를 사용할 수 있도록 문자와 식을 실생활 문제 해결의 맥

락에서 다루게 하고, 수학이 현실 세계의 상황과 밀접한 관련이 있다는 것을 학생들에게 인식시켜야 한다. 이를 위해 방정식, 부등식과 그의 활용은 독립적인 중영역이 아닌 하나의 영역에서 통합하여 학습하도록 구성하였다. 또한 방정식과 부등식의 학습에 있어서 용어 사용에 대한 학습자의 부담을 고려하여 필요 이상의 용어 정의를 제한하였다.

(3) 함수

2007 개정 교육과정에서는 제7차 교육과정에서 정비례와 반비례를 통해 함수 개념을 도입하면서 발생했던 문제점을 보완하기 위해, 정비례와 반비례를 초등학교 6학년으로 이동시키고 함수 개념을 '한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계'로 도입하고, 실생활을 활용하여 함수 개념의 효용성을 알게 하는 것이 필요하다고 하였다(교육과학기술부, 2007). 이런 점에서 볼 때 중학교 수준의 함수 영역은 현실 세계의 상황을 이해하는 도구로서의 함수 개념에 초점을 맞추고, 고등학교 함수에서 여러 영역을 통합하는 아이디어로서 대응의 관점에서 정의된 형식화된 함수 개념으로 확장될 수 있는 기반이 되도록 하는 것이 바람직하다. 이에 2009 개정 교육과정에서는 함수 개념의 도입 방법의 변화를 도모하고, 정의역, 공역, 치역 등의 용어를 삭제하였다.

(4) 확률과 통계

확률과 통계는 중학교 수학에서 실생활과 관련성이 매우 깊은 영역이다. 중학교에서는 자료의 정리와 표, 그래프의 해석, 통계적 확률과 수학적 확률의 관계, 확률의 계산, 대푯값과 산포도의 내용이 다루어진다. 본 개정안에서는 학생들이 통계를 학습함으로써 분석적이고 비판적인 사고를 도모할 수 있도록 내용의 변화는 최소화하면서, 교수 · 학습 방법의 변화를 도모하였다. 2007 개정 교육과정과 달라진 내용은 학습량 감축을 위해 '누적도수의 분포'를 삭제하고, 탐색적 자료 분석의 한 방법인 '줄기와 잎 그림'을 도수분포와 그래프 학습 내용에 추가한 것이다.

(5) 기하

수학 교육에서 증명은 전통적으로 학생들에게 꼭 가르쳐야 하는 주요 대상으로 인식되어 왔다(NCTM, 2000). 그러나 중학교 수학에서의 증명 교육은 기대하는 만큼의 효과를 거두지 못하고 있음이 알려져 있다. 그 이유는 학생들이 기하에서 다루는 개념에 대한 지식이 부족한 탓도 있겠지만, 공리 체계 내에서 논리 규칙에 따라 명제들을 체계적으로 연결시키는 데 어려움을 느끼기 때문이다.

2009 개정 교육과정에서 기하 영역은 학생들이 도형을 탐구하여 기하학적 성질을 이해하고 이를 통해 추론 능력을 신장시키는 것을 목표로 한다. 또한 기하학적 성질을 이해하고 그 지식을 습득하는 방법에 있어서 학생 활동을 중시하고 증명 대신 추측 활동을 강조한다. 이를 위하여 다음 표에서와 같이 2009 개정 교육과정에서는 '증명할 수 있다' 대신 '이해하고 설명할 수 있다'로 제시하였다.

〈표 Ⅱ-2〉 '추측과 정당화' 강조에 대한 내용 비교

2007 개정 교육과정	2009 개정 교육과정
5 삼각형과 사각형의 성질(2학년) ① 명제의 뜻과 증명의 의미를 이해한다. ② 삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형의 성질을 증명할 수 있다.	5 삼각형과 사각형의 성질 ① 이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. ② 삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. ③ 사각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

2009 개정 교육과정에 제시한 '이해하고 설명할 수 있다'는 '정당화(justification)'를 의미하는데, 이는 자신의 주장 또는 믿음을 타인에게 이해시키려는 시도를 말한다. 이 시도는 일정 수준의 객관성을 담보할 수 있어야 한다. 인식론의 관점에서 정당화는 실험에 의한 정당화, 증거에 의한 정당화, 그리고 논리에 의한 수학적 증명 등으로 대변할 수 있다(http://www.wikipedia.org). 이때 수학적 증명은 논리적 연역법을 의미한다. 기하 교육에서의 증명은 기하 지식을 증거로 삼으며 논리적 형식을 갖춘 정당화를 의미한다(신이섭 외, 2011).

정당화를 유도하는 교수 방법은 다양한 형태로 나타날 수 있다. 예를 들면 학생들의 이해 수준에 합당한 간단한 논리 증명(연역 추론), 계산에 입각한 문제 해결(계산 증명), 그리고 귀납 추론 등이 포함된다. 정당화 교육을 중심으로 한 기하 교육은 기본적으로 학생의 활동에 의존한다. 형식적이고 엄밀한 증명 대신 추측과 정당화 활동을 강조하여, 증명을 하기 위해 익숙해져야 하는 용어와 기호의 사용이나 형식 논리 규칙의 이용에서 생기는 어려움을 줄이고 학생의 기하 지식에 기초한 추론 활동을 강화하는 것이다.

이와 같이 기하 교육에서 객관적 사실의 확인 과정인 논리 증명을 정당화 수준으로 확대함으로써, 논리 형식만을 다루는 것이 아니라 학생들의 인지 수준과 흥미를 고려한 추론 기회를 폭넓게 제공하려 하였다. 이러한 활동은 기하에 대한 이해와 반성적 사고뿐만 아니라 의사소통 능력의 향상에도 도움이 될 것이다.

한마디로 중학교의 기하 영역에서는 학생 활동이 중심이 되는 학생 주도적 수업을 강조하며 형식적 증명보다는 학생의 이해 수준에 입각한 '정당화' 수준의 교육을 지향하고자 하였다. 또한 2007 개정 교육과정의 단발성 주제와 상대적으로 의미가 적은 용어들을 삭제하고, '원과 직선', '원주각' 두 영역을 원의 성질로 묶어 하나의 영역으로 내용을 축소시켜 다루는 등, 전체적으로 학습량을 경감하였다.

이상으로 중학교에서의 주요 변화 내용을 정리하면 다음과 같다.

- 집합 삭제
- 근삿값 삭제
- 십진법과 이진법 삭제
- 수학 개념과 실생활 활용의 통합
- 방정식 관련 용어 약화
- 함수 개념 도입 방법의 변화
- 정의역, 공역, 치역 용어 삭제
- 통계 교수 · 학습 방법의 변화
- 누적도수의 분포 삭제
- 줄기와 잎 그림 추가
- 정당화에 의한 기하 교육 강조
- 작도와 합동, 평면도형의 성질 내용 축소
- 원의 성질 내용 축소

다. 고등학교

(1) 일반 과목

고등학교의 일반 과목에 해당하는 6개 교과목의 주요 변화 내용을 개략적으로 살펴보면 다음과 같다.

■ 수학 I

「수학 I」은 국민 공통 기본 교육 기간인 중학교 3학년까지의 「수학」을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 고등학교에서 개설되는 선택 과목 중에서 가장 기초가 되는 과목이다.

「수학 I」의 내용은 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 1년 동안 필수로 이수하는 과목인 [수학]의 내용 중 '수와 연산', '문자와 식', '기하' 영역의 일부를 재구성한 것으로 크게 '다항식', '방정식과 부등식', '도형의 방정식'의 3개 영역으로 구성된다. '다항식' 영역에서는 다항식의 연산, 나머지정리, 인수분해를, '방정식과 부등식' 영역에서는 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식, 여러 가지 부등식을 다룬다.

「수학 I」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교

하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 실수 삭제
- 복소수와 이차방정식의 연계 강화
- 다항식의 약수와 배수 약화
- 이차방정식, 이차부등식, 이차함수의 통합 및 연계성 강화

■ 수학II

「수학Ⅱ」는 국민 공통 기본 교육 기간인 중학교 3학년까지의 「수학」과 「수학Ⅰ」을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 고등학교에서 개설되는 선택 과목 중에서 「수학Ⅰ」과 함께 기초가 되는 과목이다.

「수학Ⅱ」의 내용은 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 1년 동안 필수로 이수하는 과목인 [수학]의 내용 중 '집합과 명제'와 '함수' 영역의 내용, [수학Ⅰ]의 내용 중 '수열' 영역과 '지수함수와 로그함수'의 내용 중 일부를 재구성한 것으로 크게 '집합과 명제', '함수', '수열', '지수와 로그'의 4개 영역으로 구성된다. '집합과 명제' 영역에서 집합, 명제를, '함수' 영역에서 함수, 유리함수와 무리함수를, '수열' 영역에서 등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법을, '지수와 로그' 영역에서 지수, 로그를 다룬다.

「수학Ⅱ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 집합 내용 통합
- 명제 내용 보완 및 증명 부분 강화
- 함수 영역의 내용 약화
- 수열의 약화 및 이동
- 지수와 로그 내용 약화 및 이동

■ 확률과 통계

「확률과 통계」는 「수학Ⅰ」과 「수학Ⅱ」를 이수한 후 또는 「미적분Ⅰ」까지 이수한 학생이 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문 과학, 사회 과학 또는 자연과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다.

「확률과 통계」는 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 필수로 이수하는 고등학교 [수학]의 '확률과 통계' 영역, 선택 과목인 [미적분과 통계 기본]과 [적분과 통계]의 '확률', '통계' 영역, 그리고 [적분과 통계]의 '순열과 조합' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '순열과 조합', '확률', '통계'의 3개 영역으로 구성된다. '순열과 조합' 영역에서 경우의 수, 순열과 조합, 분할, 이항정리를, '확률' 영역에서 확률의 뜻과 활용, 조건부확률을 '통계' 영역에서 확률분포, 통계적 추정을 다룬다.

「확률과 통계」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 순열과 조합 관련 내용 통합 및 추가
- 연속확률변수의 평균과 표준편차 삭제
- 공학적 도구의 활용 강조

■ 미적분Ⅰ

「미적분Ⅰ」은 「수학Ⅰ」과 「수학Ⅱ」를 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문 과학, 사회과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다.

「미적분Ⅰ」은 2007 개정 교육과정에서 [수학Ⅰ]의 '수열의 극한' 영역과 [미적분과 통계 기본]의 '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법' 영역의 내용을 기본으로 하고 [수학Ⅱ]의 '미분법' 영역의 내용 중 '롤의 정리, 평균값 정리의 이해와 활용'에 대한 내용을 추가하여 '수열의 극한', '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법'의 4개의 대영역으로 구성된다. '수열의 극한' 영역에서 수열의 극한, 급수를, '함수의 극한과 연속'에서 함수의 극한, 함수의 연속을, '다항함수의 미분법' 영역에서 미분계수, 도함수, 도함수의 활용을, '다항함수의 적분법' 영역에서 부정적분, 정적분, 정적분의 활용을 다룬다.

「미적분Ⅰ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 수열의 극한의 이동 통합
- 롤의 정리와 평균값 정리의 이동
- 도함수의 활용 영역의 교수 · 학습상의 유의점 보완 및 삭제
- 용어 수정(중간값 정리를 사이값 정리로 수정)

■ 미적분 II

「미적분Ⅱ」는 「미적분Ⅰ」을 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다.

「미적분Ⅱ」는 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 필수로 이수하는 [수학]의 '함수' 영역, [수학Ⅰ]의 '지수함수와 로그함수' 영역, [수학Ⅱ]의 '삼각함수', '함수의 극한과 연속'과 '미분법' 영역, [적분과 통계]의 '적분법' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '지수함수와 로그함수', '삼각함수', '미분법', '적분법'의 4개 영역으로 구성된다. '지수함수와 로그함수' 영역에서 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프, 지수함수와 로그함수의 미분을, '삼각함수' 영역에서 삼각함수의 뜻과 그래프, 삼각함수의 미분을, '미분법' 영역에서 여러 가지 미분법, 도함수의 활용을, '적분법' 영역에서 여러 가지 적분법, 정적분의 활용을 다룬다.

「미적분Ⅱ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 지수함수와 로그함수 통합 및 약화
- 삼각함수 통합 및 약화
- 미분법 및 적분법의 내용 조정

■ 기하와 벡터

「기하와 벡터」는 '미분과 적분'을 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다.

「기하와 벡터」는 2007 개정 교육과정에서 [수학Ⅱ]의 '미분법' 영역과 [적분과 통계]의 '적분법' 영역, 그리고 [기하와 벡터]의 '이차곡선', 공간도형과 공간좌표', '벡터' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '평면 곡선', '평면벡터', '공간도형과 공간벡터'의 3개 영역으로 구성된다. '평면 곡선' 영역에서 이차곡선, 평면 곡선의 접선을, '평면벡터' 영역에서 벡터의 연산, 평면벡터의 성분과 내적, 평면 운동을, '공간도형과 공간벡터' 영역에서 공간도형, 공간좌표, 공간벡터를 다룬다.

「기하와 벡터」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 미분법을 이용한 평면 곡선의 이해 강화
- 위치벡터를 이용한 평면 운동의 이해 강화

(2) 기본 및 심화 과목

고등학교의 경우에는 일반 과목에 해당하는 6개 교과목 이외에, 기본 과목인 「기초 수학」과 심화 과목인 「고급 수학Ⅰ」, 「고급 수학Ⅱ」가 새로 신설되었다.

「기초 수학」은 중학교 수학의 내용을 잘 이해하지 못한 학생이 일반 과목의 수학 교과를 이수하기 위해 필요한 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하기 위하여 선택할 수 있는 기본 과목이다.

「기초 수학」의 내용은 '수와 식의 계산', '방정식과 함수', '피타고라스 정리와 삼각비'로 구성된다. '수와 식의 계산' 영역에서는 수의 연산, 문자의 사용과 식의 계산, 다항식의 계산을, '방정식과 함수' 영역에서는 일차방정식과 일차함수, 이차방정식과 이차함수를, '피타고라스 정리와 삼각비' 영역에서는 피타고라스 정리, 삼각비를 다룬다.

「고급 수학Ⅰ」과 「고급 수학Ⅱ」는 심화 과목으로 일반 과목에서 학습한 수학의 기본 지식과 기능을 바탕으로 심화된 수준의 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하고, 수학적 사고력, 창의적 사고력, 문제 해결력 등을 신장시킬 수 있도록 하는 과목이다. 「고급 수학Ⅰ」과 「고급 수학Ⅱ」는 심화된 수학적 지식과 사고 방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연과학 및 공학 분야뿐만 아니라 사회과학의 학습에 기초를 제공한다.

「고급 수학Ⅰ」의 내용은 '벡터와 행렬', '일차변환', '그래프'로 구성된다. '벡터와 행렬' 영역에서는 벡터, 행렬과 연립일차방정식을, '일차변환' 영역에서는 일차변환과 행렬, 고윳값과 행렬의 거듭제곱을, '그래프' 영역에서는 그래프의 뜻, 여러 가지 그래프, 그래프의 활용을 다룬다. 「고급 수학Ⅱ」의 내용은 '복소수와 극좌표', '미적분의 활용', '편미분'으로 구성된다. '복소수와 극좌

표' 영역에서는 복소수의 극형식, 극좌표와 극방정식을, '미적분의 활용' 영역에서는 미분의 활용, 미분방정식, 적분의 활용을, '편미분' 영역에서는 이변수함수의 뜻, 극한과 연속, 편미분, 편미분의 활용을 다룬다.

04 내용 체계

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 '수학' 교과목(초등학교 1학년~중학교 3학년)의 내용 체계는 다음과 같다.

영역 \ 학교급 / 학년군	초등학교		
	1~2학년군	3~4학년군	5~6학년군
수와 연산	• 네 자리 이하의 수 • 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈	• 다섯 자리 이상의 수 • 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈 • 나눗셈 • 자연수의 혼합 계산 • 분수 • 소수 • 분수와 소수의 덧셈과 뺄셈	• 약수와 배수 • 분수의 덧셈과 뺄셈 • 분수의 곱셈과 나눗셈 • 소수의 곱셈과 나눗셈 • 분수와 소수
도형	• 입체도형의 모양 • 평면도형의 모양 • 평면도형과 그 구성 요소	• 도형의 기초 • 평면도형의 이동 • 원의 구성 요소 • 여러 가지 삼각형 • 여러 가지 사각형 • 다각형	• 합동과 대칭 • 직육면체와 정육면체 • 각기둥과 각뿔 • 원기둥과 원뿔 • 입체도형의 공간감각
측정	• 양의 비교 • 시각 읽기 • 시각과 시간 • 길이	• 시간 • 길이 • 들이 • 무게 • 각도 • 어림하기(반올림, 올림, 버림) • 수의 범위(이상, 이하, 초과, 미만)	• 평면도형의 둘레와 넓이 • 무게와 넓이의 여러 가지 단위 • 원주율과 원의 넓이 • 겉넓이와 부피
규칙성	• 규칙 찾기	• 규칙 찾기 • 규칙과 대응	• 비와 비율 • 비례식과 비례배분 • 정비례와 반비례
확률과 통계	• 분류하기 • 표 만들기 • 그래프 그리기	• 자료의 정리 • 막대그래프와 꺾은선그래프	• 가능성과 평균 • 자료의 표현 • 비율그래프(띠그래프, 원그래프)

영역 \ 학교급 / 학년군	중학교 1~3학년군		
수와 연산	• 소인수분해 • 최대공약수, 최소공배수 • 정수와 유리수의 개념, 대소 관계, 사칙계산	• 순환소수 • 유리수와 순환소수의 관계	• 제곱근의 뜻과 성질 • 무리수 • 실수의 대소 관계 • 근호를 포함한 식의 사칙계산
문자와 식	• 문자의 사용 • 식의 값 • 일차식의 덧셈과 뺄셈 • 일차방정식	• 지수법칙 • 다항식의 덧셈과 뺄셈 • 다항식의 곱셈과 곱셈 공식 • 다항식의 나눗셈 • 등식의 변형 • 연립일차방정식 • 부등식의 성질과 일차부등식 • 연립일차부등식	• 인수분해 • 이차방정식
함수	• 함수의 개념 • 순서쌍과 좌표 • 함수의 그래프	• 일차함수의 의미와 그래프 • 일차함수의 활용 • 일차함수와 일차방정식의 관계	• 이차함수의 의미 • 이차함수의 그래프의 성질
확률과 통계	• 줄기와 잎 그림, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형 • 도수분포표에서의 평균 • 상대도수의 분포	• 경우의 수 • 확률의 뜻과 기본 성질 • 확률의 계산	• 중앙값, 최빈값, 평균 • 분산, 표준편차
기하	• 점, 선, 면, 각 • 점, 직선, 평면 사이의 위치 관계 • 평행선의 성질 • 삼각형의 작도 • 삼각형의 합동조건 • 다각형의 성질 • 부채꼴에서 중심각과 호의 관계 • 부채꼴에서 호의 길이와 넓이 • 다면체, 회전체의 성질 • 입체도형의 겉넓이와 부피	• 이등변삼각형의 성질 • 삼각형의 외심, 내심 • 사각형의 성질 • 닮은 도형의 성질 • 삼각형의 닮음조건 • 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비 • 닮은 도형의 성질 활용	• 피타고라스 정리 • 삼각비 • 원의 현, 접선에 대한 성질 • 원주각의 성질

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 '수학' 교과목 이외에 고등학교 선택 교과목의 내용 체계는 다음과 같다.

〈기본 과목〉

기초 수학

영역	내용
수와 식의 계산	• 수의 연산 • 문자의 사용과 식의 계산 • 다항식의 계산
방정식과 함수	• 일차방정식과 일차함수 • 이차방정식과 이차함수
피타고라스 정리와 삼각비	• 피타고라스 정리 • 삼각비

〈일반 과목〉

수학 I

영역	내용
다항식	• 다항식의 연산 • 나머지정리 • 인수분해
방정식과 부등식	• 복소수와 이차방정식 • 이차방정식과 이차함수 • 여러 가지 방정식 • 여러 가지 부등식
도형의 방정식	• 평면좌표 • 직선의 방정식 • 원의 방정식 • 도형의 이동 • 부등식의 영역

수학 II

영역	내용
집합과 명제	• 집합 • 명제
함수	• 함수 • 유리함수와 무리함수
수열	• 등차수열과 등비수열 • 수열의 합 • 수학적 귀납법
지수와 로그	• 지수 • 로그

미적분 I

영역	내용
수열의 극한	• 수열의 극한 • 급수
함수의 극한과 연속	• 함수의 극한 • 함수의 연속
다항함수의 미분법	• 미분계수 • 도함수 • 도함수의 활용
다항함수의 적분법	• 부정적분 • 정적분 • 정적분의 활용

미적분 II

영역	내용
지수함수와 로그함수	• 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 • 지수함수와 로그함수의 미분
삼각함수	• 삼각함수의 뜻과 그래프 • 삼각함수의 미분
미분법	• 여러 가지 미분법 • 도함수의 활용
적분법	• 여러 가지 적분법 • 정적분의 활용

■ 확률과 통계

영역	내용
순열과 조합	• 경우의 수 • 순열과 조합 • 분할 • 이항정리
확률	• 확률의 뜻과 활용 • 조건부확률
통계	• 확률분포 • 통계적 추정

■ 기하와 벡터

영역	내용
평면 곡선	• 이차곡선 • 평면 곡선의 접선
평면벡터	• 벡터의 연산 • 평면벡터의 성분과 내적 • 평면 운동
공간도형과 공간벡터	• 공간도형 • 공간좌표 • 공간 벡터

〈심화 과목〉

■ 고급 수학 I

영역	내용
벡터와 행렬	• 벡터 • 행렬과 연립일차방정식
일차변환	• 일차변환과 행렬 • 고윳값과 행렬의 거듭제곱
그래프	• 그래프의 뜻 • 여러 가지 그래프 • 그래프의 활용

■ 고급 수학 II

영역	내용
복소수와 극좌표	• 복소수의 극형식 • 극좌표와 극방정식
미적분의 활용	• 미분의 활용 • 미분방정식 • 적분의 활용
편미분	• 이변수함수의 뜻 • 극한과 연속 • 편미분 • 편미분의 활용

III. 수학 교과서의 개발 동향

01 구성주의와 수학 교과서

구성주의의 수학 교육관은 '학생에 의한 수학 지식의 자주적 구성'이라는 교육관에 기초한다고 볼 수 있다. 구성주의를 수학 교육의 실제에 적용하고자 하는 사람들은 수학적 지식이 외부의 강화에 의하여 학습자에게 전달될 수 있다는 견해에 동의하지 않는다. 즉, 구성주의자들은 지식이 학습자의 내면 세계에서 적절한 경험을 통해 자주적으로 구성된다고 생각하고 있으며, 이것은 곧 학생들이 수학 지식을 수동적으로 받아들임으로써 획득하는 것이 아니라 각자 능동적으로 재발명해 나감으로써 (수학 지식을) 구성하는 것을 뜻한다. 따라서 구성주의적 입장을 취하는 수학 교육 관계자들은 전통적인 방식의 수학 교육을 개선할 수 있는 하나의 대안으로서 구성주의적 수학 교육을 제안하고 있는 것이다. 특히 사회적 구성주의자들은 이제껏 전통주의자들의 주된 관심사였던 수학 지식의 실제에 대한 인식론적인 논의보다는 수학 지식에 대한 구성주의적 교수-학습의 가능성에 관심을 두었다.

'구성주의'는 그 말 자체가 광범위한 의미를 지니고 있을 뿐만 아니라 '구성'이라는 용어도 모호하기 때문에 이를 해석하는 견해가 다양하다. 그러나 현재 우리나라 수학 교과서에는 교구 및 소프트웨어 등의 조작 활동의 필요성, 개인별 능력 차를 고려한 수준별 교재의 필요성, 의사소통을 고려한 교과서 개발의 필요성 등의 반영이 절실히 요구되고 있다. 이러한 요구 사항은 조작적 구성주의자로 불리는 피아제의 발생적 인식론의 중심 아이디어인 '조작', 급진적 구성주의자들이 지식의 진리 자체에 관한 논의를 거부하고 초미의 관심사로 여긴 '개인 중심적' 구성이나 '생장 원리', 사회적 구성주의자들이 객관성을 사회성으로 대치하면서 도입한 사회적 합의의 수단인 '의사소통'을 교재 구성에 반영하자는 생각과 크게 다르지 않다.

02 구성주의적 수학과 교수-학습 원리의 반영

수학 교수-학습론의 원천으로서의 구성주의에서 수학 교육에 적용할 수 있는 유효한 교수-학습 원리는 다음과 같다.

가. 교과서에 학생 중심적 개별화의 원리 반영

구성주의의 기본적인 주장인 지식의 자주적 구성의 원리는 학생들로 하여금 갈등 국면에 대처하여 동화와 조절의 메커니즘에 따라 반영적 추상화의 과정을 통해 새로운 지식을 조정해 나가는 과정을 보여 주고 있다. 이것은 질문을 중심으로 하는 상호 작용적인 추측 및 논박에 의한 수학 교수-학습의 바탕(모델)이 된다. 구성주의는 지식의 자주적 구성을 그 근본 원리로 하고 있지만, 교수-학습의 차원에서 논의되는 지식은 '주관 독립적'인 의미에서의 객관적 지식이 아니라, 규약과 협정 등의 수단을 통하여 '공통 주관적'인 의미에서의 객관성을 가지게 된다.

따라서 수학 교육학적 구성주의에서 취하고자 하는 관점은 바로 공통 주관적인 의미에서의 객관적 지식은 학생 자신에 의해 자주적으로 구성되어야 한다는 것이며, 이러한 관점은 학생 자신에 의한 지식의 능동적인 재발명을 목표로 하는 오늘날의 수학 교육에서 요구되고 있는 관점과 일치한다고 볼 수 있다. 이를 위해서는 학생 중심적인 개별화 수업이 가능하도록 수학적 과제가 제시되어야 할 것이다. 학생이 스스로 생각하고 해결 전략을 궁리해 낼 수 있는 기회를 부여함으로써 학습자 자신이 다양한 사고를 할 수 있도록 해야 한다는 것이다.

나. 교과서에 질문 중심적 상호 작용의 원리 반영

학교 밖의 사회나 교사들은 지금까지 대체적으로 수학 지식의 가치를 인정하고 수학 교육의 당위성을 이해해 왔을지 모르지만, 아마도 학생들은 그러한 당위성을 이해하지 못하였을 것이고, 결과적으로 수학을 의미 없는 것으로 받아들일 수밖에 없었을 것이다. 그렇다면 유효한 수학 교육이 이루어지기 위해서는 학생들이 배워야 할 수학, 즉 학교 수학이 학생들에게 의미 있는 것이 되어야 함은 물론 수학 교수-학습 활동에 참여하고자 하는 학생들의 적극적 의지가 수반되어야 한다. 결국 이를 교과서에 반영하는 것은 질문 중심의 상호 학습이 일어날 수 있도록 과제를 제시하는 형태가 될 것이다. 구성주의에서는 교사와 학생 및 학생과 학생 사이의 상호 작용을 매우 중요시한다. 즉, 교사가 적절한 질문으로 학생의 응답을 유도해 냄으로써 학생들로 하여금 일련의 추측 및 논박 활동을 통해 수학 지식을 구성할 수 있도록 교수-학습 환경을 설정할 것을 요구하고 있다. 따라서 의미 지향적인 활동 수업이 이루어지도록 교과서가 구성되어야 할 것이다.

다. 교과서에 의미 지향적 활동의 원리 반영

위에서 살펴본 수학 지식의 자주적인 구성이 교수-학습에서의 학생의 의미 지향적 활동이나 교사의 적절한 질문만으로 가능한 것은 아니다. 학생에 의한 지식의 자주적 구성은 지식 구성을 하는 학습자 자신에 의해 내면적으로 이루어지는 자주적 활동 없이는 불가능하다. 다시 말해 효율적인 수학 교수-학습을 위해서는 학습자의 내면화된 자주적 활동이 학생의 교수-학습 활동에의 참여 의지 및 교사의 적절한 질문과 더불어 반드시 필요하다.

이때 이 내면화된 자주적 활동의 메커니즘을 구성주의가 설명해 주고 있는바, 이것이 바로 반영적 추상화이다. 그렇다면 학습자가 반영적 추상화의 과정을 경험할 수 있도록 교재가 구성되어야 함은 물론이다. 부연 설명하면, 교과서는 여러 가지 활동을 통하여 익힌 의미 있는 경험을 반성하여 자기 자신의 지식을 구성할 수 있도록 구현되어야 한다는 것이다.

03 구성주의적 관점에서의 교과서 개발 방향

위에서 살펴본 구성주의적 관점에 기초한 바람직한 수학 교과서를 구현하기 위하여 고려되어야 할 사항은 다음과 같다.

가. 교과서 저자의 철학

교과서에는 교과서 저자 나름대로의 철학이 배어 있어야 한다. 지금까지의 교과서에 제시된 교육과정상의 내용들은 누구나 합의할 수 있는 객관적이고 보편적인 것만을 다루도록 하는 것이 불문율이었다. 그러나 이제는 절대적 진리처럼 내용이 전개되던 교과서의 역할과 권위보다 학생들의 주체적인 사고의 참여를 촉발시킬 수 있는 '저자'의 역할과 권위를 우위에 두어야 할 것이다. 이때 교과서 저자는 자신이 왜 그러한 주제에 관심을 가지는지, 그것이 왜 중요한 것인지를 드러내고 어떻게 그 주제를 전개해 나아가는지 등에 관한 자신의 철학과 견해를 피력하고, 또 다른 견해들과의 차이를 드러내어 맥락화시킬 수 있도록 한다.

나. 안내형 교과서

전통주의적 입장에서의 교과서 방식은 학습 목표에서 추출된 세부적 요소들을 논리 정연하게 제시하는 '제시형 교과서'라고 할 수 있으며, 구성주의적 관점에서 보는 교과서는 교과서에 제시된 내용들에 학습자와의 실질적인 상호 작용을 통해서 그 의미가 발현될 수 있도록 소재적 가치를 부여하는 '안내형 교과서'라고 할 수 있다. 즉, 안내형 교과서는 학습하기를 기대하는 내용들을 직접 제시하는 대신 학습자로 하여금 구조적 변화를 경험하도록 안내하는 역할을 하는 내용으로 교과서를 구성하는 방식

을 취한다고 할 수 있다. 안내형 교과서는 개인적인 관심, 해석, 활동 등 학습자의 주체적인 역할에 큰 비중을 두고 학습자의 적극적이고 당사자적인 관여를 요청하고 있다.

이홍우(1997)는 “교과를 가르치되 학생의 경험과 의미 있게 관련되도록 가르쳐야 한다.”라고 주장하면서 학생들은 자신이 배우는 다른 내용들을 쉽게 이해하고 기억할 수 있을 뿐만 아니라 학교에서 배운 것을 다른 상황에 쉽게 적용할 수 있어야 한다고 하였다. 그러기 위해서는 날로 팽창하는 지식을 모두 가르치려고 할 것이 아니라, 그중에서 기본 또는 핵심이 되는 것만을 골라 가르쳐야 하며, 이와 같이 기본이나 핵심이 되는 것을 ‘지식의 구조’라고 명명하였다. 즉, 지식의 구조를 알면 팽창하는 모든 지식을 하나씩 따로따로 배우지 않더라도 그 기본적인 것에 비추어서 나머지를 쉽게 이해할 수 있다고 본 것이다.

다. 관계적 이해를 도모하는 교과서

기존의 교과서는 지극히 제한된 지면에 방대한 내용을 소개해야 하기 때문에 가능한 한 핵심적이고 확실한 원리나 개념들을 중심으로 간결하고 함축적인 방식으로 제시하고 있다. 이와 같이 주요 주제나 개념들을 피상적으로 제시하는 방식은 교사와 학생들로 하여금 ‘관계적 이해’를 도모하기보다는 수학적 언어와 기호를 이용하여 외우고 재생해 내는 데 급급하게 하는 ‘도구적 지식’을 가지도록 한다.

도구적 수학은 보통 이해하기가 더 쉬우며, 보다 적은 지식이 필요하기 때문에 학습 결과에 대한 보상이 즉각적이고 명백하다. 그러나 이 방식은 수학의 전체 영역에 서로 연결되는 기초적인 개념을 교수-학습하기보다는 서로 분리하여 각각의 주제를 교수-학습하는 것이기 때문에 기대하는 학습이 이루어진다고 보기 어려울 것이다.

반면 관계적 이해를 통한 학습은 마치 나무가 영양분을 찾아서 뿌리를 뻗어 나가거나 동물이 먹이를 찾아 새로운 지역을 탐험하는 것과 같이 능동적으로 새로운 자료를 찾고 새로운 분야를 탐구하는 것에 비유될 수 있다. 그러므로 관계적 이해를 촉구하기 위해서는, 즉 핵심적인 원리나 개념을 습득하게 하기 위해서는 그러한 내용을 얻을 수 있도록 해당 절차를 안내(유도)하는 방식으로 교과서를 구성하도록 한다.

라. 질문 중심의 개념 전개

기존의 교과서는 수학적 지식을 대부분 완성된 형태로 제시하는 하향식 전개 방식을 택하고 있다. 또한 단원의 마무리 단계는 기본 문제, 연습 문제, 종합 문제, 심화 문제 등으로 구성되어 있다. 따라서 계산이나 풀이 형식의 정착을 위해 학생들이 풀어야 할 문제들이 교과서에 산적해 있다. 이런 상황에서 학생들은 문제 풀이를 위한 반복 훈련을 하는 데 주력하게 되고, 교사 역시 이러한 기능을 정착시키기 위한 내용 전개로 수업을 이끌어 가는 경향이 있다.

이를 개선하기 위해서는 현재 교과서에 수록되어 있는 반복 연습형의 문제들을 줄이고 그 대신 수학적 개념과 문제 해결의 절차를 이해시키는 데 주력함으로써, 학생들에게 ‘수학을 한다.’는 것이 이미 배운 개념이나 공식, 절차를 바로 적용해서 연습 문제를 푸는 것이 전부가 아니라는 사실을 인식시켜야 할 것이다.

마. 수학적 유용성 강조

수학은 실제로 모든 학문의 기초로서 우리의 일상생활뿐만 아니라 공학, 의학, 경제, 사회, 문화 등 여타 분야에 지대한 영향을 미치고 있음에도 불구하고 이에 대한 인식이 부족하다. 지금까지의 교과서의 내용 및 그 전개 방식을 살펴보면 교사나 학습자로 하여금 여러 단원의 내용들이 서로 독립된 것이라고 오판하기 쉽게 되어 있다. 따라서 앞으로의 교수-학습 자료에는 단원 간의 내용 연계성을 강조함으로써 학생들 각자의 스키마를 구성하는 데 도움이 되도록 해야 할 것이다. 특히 교과서에

수학의 활용성에 대한 구체적인 내용을 단원별로 또는 전체적으로 기술하고, 과학이나 미술 등 다른 교과목과의 연결성을 찾는 내용도 포함시켜 학생들이 수학의 중요성을 알도록 해야 할 것이다.

바. 다양한 교구 및 도구 활용

수학 수업에서의 교구 사용은 추상적인 수학적 개념을 구체물로 모델링한다는 데 가장 큰 의의가 있으며 이를 통해서 학생들은 수학적 절차나 공식보다는 그 이면에 내재되어 있는 의미를 알 수 있게 된다. 또 교구는 학생들이 직접 만지면서 다루기 때문에 학생 중심적인 개별화 수업을 가능하게 할 뿐만 아니라 2~4명의 소집단 학습을 통하여 집단별 그리고 전체 토론이 이루어짐으로써 반영적 추상화를 경험할 수 있게 한다. 우리나라의 수학 교육과정은 컴퓨터와 계산기의 사용을 교사나 학교의 재량에 따라 사용하도록 권장하고 있다. 하지만 실제 학교 현장에서는 이들을 수업에 언제, 어떻게 활용해야 하는지를 잘 모르고 있는 실정이다. 그러므로 교수-학습 자료에 컴퓨터나 계산기 등의 활용 지침 및 방안에 대한 자세한 설명이 수록되어야 할 것이다.

04 수준별 수업의 운영

가. 수준별 수업의 운영 방식

수학과의 경우 수준별 수업은 1996년부터 현장에서 서서히 실시되기 시작하여 제7차 단계형 수준별 교육과정의 취지에 따라 더욱 활성화되었다. 수준별 수업과 예전의 단계형 수준별 교육과정의 운영은 그 접근 방법이 다르다고 할 수 있겠으나, 학생의 수준에 적합한 교육 내용을 다루고자 하는 점에서 기본 취지는 동일한 것으로 볼 수 있다.

2009 개정 교육과정에 따른 교과서는 기본 과정과 심화 과정의 학습 내용이 명료히 구분되어 제시되어 있지 않지만, 수준별로 개념 설명의 접근 방법을 차별화하고 해당 문제들의 난이도를 조정한다면 분단 수업이나 이동 수업을 진행하기가 용이할 것이다. 이렇듯 수준별 수업은 전통적으로 해 왔던 일제 수업의 폐단을 줄이고, 교사들의 다양한 교수-학습 자료 개발을 활성화시키며 학습자 주도의 학습의 중요성을 인식시키는 등 현장 교육을 긍정적으로 이끌 것이다.

이렇듯 수준별 수업은 학생의 성취 수준에 따라 수준별로 반을 편성하여 동일한 학습 진도 내에서 학습 심도를 달리하여 지도하는 '동진도-이심도' 방식을 취하는 것이 바람직하다. 이에 따라 수준별로 적합한 수업을 진행하기 위해서는 기본적으로 교육과정에 제시된 기본 학습 내용을 모든 수준의 학생들이 다루도록 하되, 각 수준별로 다루어야 할 학습 내용의 정도와 방법을 차별화하도록 한다. ◎<표 Ⅲ-1> 참조 이때 한 차시의 수업 내용을 기준으로 하거나 또는 교과서의 한 소단원을 기준으로 하여도 무방하다.

<표 Ⅲ-1> 수준별 수업 운영 방식

<table>
<tr><th>반 수준</th><th colspan="3">수준별 수업 과정</th></tr>
<tr><td rowspan="2">상</td><td>내용 수준</td><td>기본 내용</td><td>심화 내용</td></tr>
<tr><td>수업 방식</td><td>개념 이해 → 단순 / 발전 과제 해결</td><td>발전 과제 해결</td></tr>
<tr><td rowspan="2">중</td><td>내용 수준</td><td>기본 내용</td><td>심화 내용</td></tr>
<tr><td>수업 방식</td><td>개념 이해 → 단순 / 발전 과제 해결</td><td>단순 과제 해결</td></tr>
<tr><td rowspan="2">하</td><td>내용 수준</td><td colspan="2">기본 내용</td></tr>
<tr><td>수업 방식</td><td colspan="2">선수 학습 내용의 이해 → 개념 이해 → 단순 과제 해결</td></tr>
</table>

나. 수준별 수업의 효율적 운영 방안

수준별 수업을 효율적으로 운영하기 위해서는 다음 사항에 유의해야 할 것이다.

(1) 학습자의 눈높이

개인차에 따른 학습 능력을 고려하여 수준별로 분단이나 학급을 편성하여 적절히 운영하여야 한다. 즉, 수준별 수업 운영을 위한 노력으로 우선 각 수준에 따라 수업 내용, 수업 진도 등이 적절한지 검토하여야 한다. 이때 무엇보다도 중요한 것은 수준별 수업을 위한 수업 내용, 수업 진도 등이 교사 또는 수학 교육 관련 전문가의 눈높이가 아닌 '학습자'의 눈높이에 맞춰져야 한다는 점이다.

(2) 내용의 차별화

수준별 개념에 입각한 교수-학습의 차별화는 수준에 따른 '학습 내용의 차별화'를 의미하는 것으로, '학습 내용의 차별화'란 각 수준별로 다루는 학습 내용 그 자체의 차별화를 말하는 것이다. 그런데 2009 개정 교육과정에는 학생들의 수준에 상관없이 모든 학생들이 공통으로 다루어야 하는 내용이 명시되어 있다. 그러므로 '학습 내용의 차별화'란 현행 교육과정에 기초한 공통 필수 격의 학습 내용을 모든 수준의 학생들이 다루도록 하되, 수준별로 중점을 두어 다루어야 할 '주요 내용'을 차별화하는 것으로 이해할 수 있다. 따라서 '문항의 난이도'뿐만 아니라 각 수준에 적합한 '내용의 차별화'에 기초를 둔 수준별 학습 자료가 개발되어야 할 것이다.

(3) 귀납적 학습법

수학 수업을 전개해 나가는 데 있어서 일반적으로는 개념 및 원리를 설명하고 이에 따른 예제를 푼 뒤 반복 연습 문제를 푸는 '연역적 방식'을 취하고 있다. 그러나 경우에 따라서는 예 또는 예제들을 통하여 그에 부합되는 학습 내용들을 체계적으로 정리하는 '귀납적 방식'을 취함으로써 학습의 이해를 보다 높일 수도 있다. 특히 학습 결손이 명백히 드러난 학생들에게 지극히 한정된 몇몇 문제의 풀이로 학습 내용을 이해시키기는 어렵다. 그러므로 각 수준별로 구체적인 예 또는 예제를 통하여 그에 부합되는 학습 내용(개념, 원리, 법칙 등)을 정리해 나가는 귀납적 방식의 수업도 병행해야 할 것이다.

(4) 소집단별 수행 과제 활동

수준별 능력에 따른 과제(open-response tasks)를 제시하여 학생들이 과제를 수행하면서 어떤 수학적 지식을 사용하고 또 어떻게 접근해 나가야 하는지 등에 관하여 스스로 탐색해 볼 수 있도록 해야 한다. 그러므로 45분의 수업 시간에 모든 활동이 이루어져야 한다는 제한된 시각에서 벗어나 수업 이외의 시간을 활용하여 좀 더 발전 지향적인 장 · 단기 과제를 다루는 것이 바람직할 것이다. 특히 소집단별 수행 과제 활동은 본인이 속한 집단의 구성원들과 그 결과를 기록하여 발표할 수 있는 '의사소통' 능력의 발휘가 가능하므로, 이를 통하여 다양한 자료를 수집, 표현, 분석, 해석함으로써 과제를 성공적으로 수행할 수 있도록 해야 할 것이다.

IV. 수학적 문제 해결

01 문제 해결의 의미

20세기 초에 이루어진 문제 해결에 대한 논의는 1960년대의 '새수학' 운동과 1970년대의 '기본으로 돌아가기' 운동과 같은 과정을 거치면서 크게 부각되지는 못하다가, 1980년대에 들어 기초 기능으로서의 문제 해결력에 대한 관심이 높아지기 시작하면서 부흥기를 맞게 된다. 미국의 수학교사협의회인 NCTM(1980)이 'An Agenda for Action'에서 문제 해결이 학교 수학의 초점이 되어야 함을 선언한 이래 1980년대는 문제 해결의 시대라고 할 만큼 이에 대한 다양하고 활발한 논의가 이루어졌다(황혜정 외, 2012, 재인용).

이 같은 문제 해결의 조류는 우리나라의 수학 교육과정에도 서서히 등장하였다. 제3차 교육과정에서 급격하게 도입되었던 수학 교육 현대화의 내용은 제4차 교육과정에서 경감되고 정선되면서 지나치게 어려운 내용보다는 수학의 기초적 기능을 배양하고 문제 해결력을 신장시키는 데 관심을 가지게 되었다. 이어 제5차 수학과 교육과정에서도 수학 내용을 정선하면서 문제 해결력의 신장을 강조하였으며, 제6차와 제7차 교육과정에서는 문제 해결력의 신장을 위한 지도 내용, 전략, 방법 등을 구체적으로 제시하여 문제 해결력의 지도가 보다 적극성을 띠게 되었다.

또한 2007 개정 교육과정에 이어, 2009 개정 교육과정 문서의 모든 교과목의 '교수－학습 방법' 부분에도 문제 해결에 관한 다음과 같은 내용이 명시되어 있다(교육과학기술부, 2011).

수학적 문제 해결력을 신장시키기 위하여 교수－학습에서 다음 사항에 유의한다.

(1) 문제 해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.
(2) 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.
(3) 문제 해결의 결과뿐만 아니라 문제 해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.
(4) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

02 문제의 의미와 유형

가. 문제의 의미

문제 해결에서의 '문제'는 해결의 절차가 이미 알려져 있어서 단순히 계산 연습의 대상이 되는 문제보다는, 구체적이고 확실한 해결 방법을 쉽게 구하기 어렵고 문제 해결 과정에서 다단계에 걸친 다양한 사고가 요구되는 문제를 말한다. 예를 들어 문제 해결이라고 하면 이차방정식의 근의 공식을 배운 후에 근의 공식을 적용하여 주어진 이차방정식의 해를 구하는 것과 같이 배운 내용을 단순하게 적용하여 해를 구하는 연습 문제를 떠올릴지도 모른다. 그러나 최근 수학 교육에서 중요시되는 문제 해결은 이미 배운 수학적 사실이나 알고리즘을 단순히 적용하는 수준의 것이 아니다. 진정한 문제는 목표는 분명하지만 그 목표에 이르는 길이 즉각적으로 주어져 있지 않은 것이다. 문제의 해결에 이르는 알고리즘이나 풀이 방법이 이미 주어져 있거나 알려져 있다면 그 문제는 진정한 의미의 문제라고 보기 어렵다.

나. 문제의 유형

문제의 유형을 분류하는 데에는 여러 가지 견해가 있지만, 가장 보편적인 방법 중의 하나는 ‘정형 문제’와 ‘비정형 문제’로 구분하는 것이다.

■ 정형 문제(routine problems)

이미 제시된 알고리즘을 사용한다. 예를 들어 공식에 나오는 변수에 특정한 수를 대입하여 해결할 수 있는 문제나 전형적인 예제의 풀이 방법을 그대로 적용하여 해결할 수 있는 문제가 해당된다.

■ 비정형 문제(non-routine problems)

문제를 해결하는 알고리즘이나 답을 얻는 방법을 모르는 상태에서 문제 해결 전략이나 독자적인 해결 방법을 고안하여 풀어야 하는 문제를 말한다.

03 문제 해결 과정

폴리아(Pólya, 1957)는 수학적 문제 해결의 과정을 다음과 같이 4단계로 구분하여 제시하고 있다.

문제 이해 → 계획 작성 → 계획 실행 → 반성

다음 표는 문제 해결의 각 단계에서 교사가 사용할 수 있는 적절한 질문과 권고의 예이다.

〈표 Ⅳ-1〉 문제 해결 단계별 질문의 예

문제 해결 과정		해당 질문
문제 이해	문제를 이해하는 단계로, 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고 용어의 뜻을 파악하며 문제를 분석하는 단계이다.	• 미지인 것, 주어진 것은 무엇인가? • 자료는 무엇인가? • 조건은 무엇인가? • 그림을 그려 보고, 적절한 기호를 붙여라.
계획 작성	문제에서 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계로 여러 가지 문제 해결 전략을 이용하게 된다. 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 즉각적으로 발견할 수 없을 때에는 보조 문제를 고려해야 한다.	• 전에 그 문제를 본 적이 있는가? • 친숙한 문제 중에서 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라. • 유사한 문제는? • 문제를 푸는 데 필요한 조건을 모두 사용했는가?
계획 실행	해결 계획에 따라 실행하는 단계이다.	• 풀이의 각 단계를 조심스럽게 실행하도록 하라. • 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가? • 각 단계가 옳다는 것을 설명할 수 있는가?
반성	문제를 해결한 과정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지 알아본 뒤, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를 비교해 본다.	• 결과를 점검할 수 있는가? • 풀이 과정을 점검할 수 있는가? • 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가? • 결과나 방법을 다른 문제에 활용할 수 있는가?

한편 문제 해결 전략이란 문제 해결에 도움이 되는 일반적인 절차나 해법의 단서가 되는 생각, 발견의 실마리를 얻도록 하는 방법 등의 사고 전략을 뜻한다. 크룰릭과 루드닉(Krulick, Rudnick, 1984)은 문제 해결 전략으로 패턴 찾기, 거꾸로 풀기, 추측과 검증, 모의실험, 환원, 목록 작성, 논리적 연역, 자료 정리(그래프, 방정식, 대수식, 표, 차트, 도식)를 제시하였으며, 그리노(Greeno, 1978)는 어림산, 단순화하기, 실험하기, 그림 그리기, 표 만들기, 그래프 그리기, 방정식 세우기, 규칙성 찾기, 순서도 구성, 판단 공간(decision-space)의 분할, 연역 논리로 문제 해결 전략을 구분하였다.

04 문제 해결의 예

다음에 주어진 문제를 폴리아(Pólya, 1957)의 문제 해결 4단계를 따라 풀어 보면 다음과 같다.

> ㉮ 직사각형의 둘레의 길이가 35 cm이고 가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배라고 하면, 가로의 길이는 얼마인가?

① 문제의 이해

문제에서 구하려는 것은 가로의 길이이며, 문제에서 주어진 것은 직사각형의 둘레의 길이가 35 cm이고 가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배라는 사실이다.

② 계획 세우기

직사각형의 세로의 길이를 x라고 하면, 가로의 길이는 $2.5x$가 된다. 직사각형의 둘레의 길이는 네 변의 길이의 합과 같으므로 $x+2.5x+x+2.5x=35$

③ 계획의 실행

방정식을 풀면 $7x=35$, 즉 $x=5$이므로 가로의 길이는 $2.5\times5=12.5$(cm)이다.

④ 풀이의 반성

풀이 과정을 검토하여 잘못된 곳은 없는지 확인한다. 또 다른 방법으로도 문제를 해결할 수 있는지 조사한다. 이 문제의 경우 다음과 같이 풀 수도 있다.

가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배이므로

$$(\text{가로의 길이}):(\text{세로의 길이})=2.5:1=5:2$$

이고, 둘레의 길이가 35 cm이므로

$$(\text{가로의 길이})+(\text{세로의 길이})=\frac{35}{2}=17.5$$

따라서 가로의 길이는 $17.5\times\frac{5}{7}=12.5$(cm)이다.

㉮와 유사한 문제를 다음과 같이 만들어 풀어 본다.

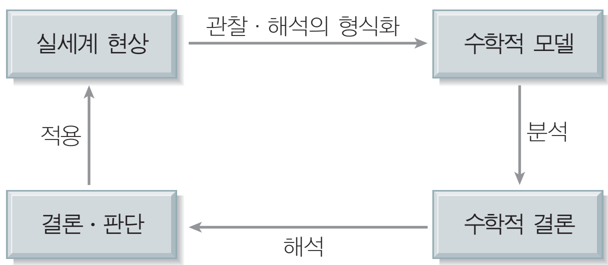
> 둘레의 길이가 35 cm인 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이보다 3 cm 더 길 때, 가로의 길이를 구하여라.

05 문제 해결 과정과 수학적 모델링

가. 문제 해결 과정과 수학적 모델링

수학적 모델링은 문제 해결의 특징을 지니지만, 비수학적 문제 상황에서 출발하는 것을 기본으로 한다는 점에서 문제 해결과 차별화된다(NCTM, 1991). 즉, 수학적 모델링은 비수학적 대상에서 수학적 표상을 찾는 것으로, 대상이나 체계 또는 과정의 중요한 특징을 이루는 수학적 구조나 이론을 세우는 것을 말하며, 어떤 현상에 관한 문제를 해결하기 위하여 원래의 문제 상황을 수학적으로 표현하는 수학화의 과정을 중시한다. 특히 한 체계에서의 개념이나 문제 상황을 다른 체계로 번안하여 내면화하거나 해결해 가는 과정은 모델링 과정의 전이가 쉽게 일어나도록 할 수 있음을 의미한다. 또한 수학적 모델링은 수학과 다른 과목 또는 일상생활과의 연결성을 강조한다. 이것은 수학 학습의 초점이 완결된 지식의 획득이 아니라 지속적인 모델의 구안과 수정을 통한 본 개념의 이해에 맞추어져야 함을 의미한다.

일상생활에서의 경험이 모델링 과정을 통해 수학적으로 재조직될수록 한 체계에서 다른 체계로 쉽게 전이되어 요소들 사이의 관계 구조의 파악이 용이하고, 이를 바탕으로 실세계에서 제기된 문제를 해결할 수 있다. 수학적으로 의미 있는 모델을 구성하는 모델링 과정은 4단계의 순환 과정으로 구성되며, 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 Ⅳ-1] 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

NCTM(1991)의 '*Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*'에서는 수학적 모델링 과정을 다음과 같이 설명하고 있다.

① 현상을 관찰하여 그 현상에 내재되어 있는 문제 상황을 명료히 밝히고, 문제에 중요한 영향을 미치는 요인들을 찾는다.
② 요인들의 관계를 추측하고 그 요인들을 수학적으로 해석하여 현상에 적합한 모델을 구축한다.
③ 적절한 수학적 분석을 구축한 모델에 적용한다.
④ 결과를 얻어 내고 그 결과를 현상에 맞도록 재해석하여 결론을 도출한다.

요약하면 수학적 모델링은 실세계의 여러 현상을 수학적인 수단에 의해 정리하고 조직하는 활동으로, 문제를 해결하기 위하여 여러 가지 수학적 표현으로 변환하면서 현상에 내재된 수학적 개념을 파악, 문제를 해결하여 실세계의 문제 상황에 적용할 수 있도록 하는 활동 과정이다. 이러한 수학적 모델링을 통한 수학 학습은 새로운 수학적 개념을 도입하거나 이미 개발된 수학적 개념을 새로운 상황에 적용하는 데 유용하여, 중요한 수학적 아이디어와 문제 해결 과정에 강력한 수단이 된다. 따라서 수학적 모델링을 통하여 수학 교육에서 다음과 같은 목적을 달성할 수 있다(Niss, 1989).

- 새로운 수학적 개념과 방법을 이해한다.
- 실생활 또는 다른 교과에서의 수학의 응용과 모델링의 실제를 이해한다.
- 창의적 사고와 문제 해결 태도, 활동, 능력을 기른다.
- 수학을 활용하여 실생활 또는 다른 교과와 연결된 맥락을 비판적이고 합리적으로 사고하는 태도를 기른다.
- 수학이 이미 완성된 산물이 아니라, 인간 활동의 결과로 만들어지고 있는 것임을 이해한다.

나. 수학적 모델링의 예

연못에 있는 물고기의 수를 조사하는 다음 상황을 통해 수학적 모델링을 살펴보자.

(1) 문제 상황

이 게임의 목적은 연못에 있는 물고기의 수를 알아내는 것이다. 이러한 정보는 연못을 관리하고 물고기에 대해 파악하는 데 도움을 줄 것이다. 연못에 있는 물고기의 수를 어떻게 추측할 수 있겠는가?

(2) 필요한 수학 개념

비와 비율

(3) 모델

우리는 연못에 있는 물고기의 수를 알 수 없으므로, 물고기의 수를 n마리라고 하자.

우선 몇 마리의 물고기를 잡아 물고기가 다치지 않게 꼬리에 표를 달고, 다시 그 물고기들을 연못에 놓아준다고 가정하자. n마리 중에서 p마리를 잡아 표시를 하고, 며칠 후에 q마리의 물고기를 잡는다면 그중에는 꼬리표를 단 것도 있고 달지 않은 것도 있을 것이다. 이때 꼬리표를 단 물고기의 수를 x라고 하면, 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\frac{p}{n}=\frac{x}{q}$$

p, x, q 모두 측정값이므로, n의 값을 구할 수 있다.

다음은 앞과 같은 활동을 10번 시행한 예이다.

표본 채취 순서	꼬리표를 단 물고기의 수	표본 수
1	3	15
2	0	15
3	3	15
4	1	15
5	2	15
6	4	15
7	6	15
8	2	15
9	4	15
10	2	15

이때 좀 더 정확한 n의 값을 구하기 위해서는, x의 평균 $\bar{x}$를 구하여 다음과 같은 식을 세울 수 있다.

$$n=\frac{pq}{\bar{x}}$$

예를 들어 처음에 표시한 물고기의 수(p)가 10마리이고 다섯 번 표본을 채취했다면, $\bar{x}=1.8$, $p=10$, $q=15$이므로 $n=83$이다.

위와 같이 연못에 있는 물고기의 수를 측정하는 이러한 과정을 'the capture/recapture' 방법이라고 하며, 이것은 게임으로도 사용되고 보존청에서도 활용되고 있다.

V. 수학과 평가의 특징 및 방법

01 수학과 평가의 동향

1990년대 초 미국 NCTM의 대안적 평가의 강조를 기점으로, 우리나라에서도 1995년 교육개혁위원회 주체의 '세계화 · 정보화 시대를 주도하는 신교육체제 수립을 위한 교육개혁방안' 수립, 1997년 서울시교육청의 초등학교 새물결 운동, 1997년 제 7 차 교육과정 개정 등의 영향으로 학교 현장에 수행 평가가 점차 반영되기 시작하였다. 결과적으로 우리나라에서도 전통적인 평가 방식의 변화 및 개선의 필요성이 인식되면서 새로운 평가 방법의 도입이 요청되고 이를 위한 대안으로 학교 현장에의 수행 평가 도입 및 활성화 방안이 추진되었으며, 이는 현재까지 지속적으로 강조되고 있다.

이에 대한 실례로 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 모든 교과목에서의 평가 부분은 다음과 같이 진술되어 있다(교육과학기술부, 2011).

가. 수학 학습의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하고, 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 수업 방법을 개선하는 데 활용되어야 한다.

나. 수학 학습의 평가에서는 학생의 인지 발달 단계를 고려하고, 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수한다.

다. 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등을 적절히 실시하되, 지속적인 평가를 통하여 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

라. 수학 학습의 평가에서는 선택형 위주의 평가를 지양하고 서술형 평가, 관찰, 면담, 자기 평가 등의 다양한 평가 방법을 활용하여 수학 학습에 대한 종합적인 평가가 이루어질 수 있게 한다.

마. 인지적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수 – 학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.

(1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력

(2) 수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 능력

(3) 수학적 지식과 기능을 활용하여 추론하는 능력

(4) 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력

(5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력

(6) 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력

(7) 수학적 지식과 기능을 바탕으로 창의적으로 사고하는 능력

바. 정의적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 수학 및 수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감, 가치 인식 등의 정도를 파악한다.

사. 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용과 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공한다.

이상의 내용을 중심으로 우리나라 수학과의 평가 동향을 간략히 살펴보면, 우선 평가를 통하여 학생에 대한 등급을 매기기보다는 학생과 교사에게 도움을 주는 것이 강조되어 있으며, 최종 결과의 평가보다는 과정에 대한 평가를 강조하고 있다. 또한 객관식 선다형 위주의 평가를 지양하고 주관식 지필 검사, 관찰, 면담 등 다양한 평가 방법을 활용하여 종합적인 수학 학습 평가 등을 권장하고 있다. 특히 최근 들어 인지적 영역에 대한 평가뿐만 아니라 정의적 영역에 대한 평가도 점차 강조되고 있다. 아울러 평가 상황에서도 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구 및 교구의 적절한 이용을 권장하고 있음을 알 수 있다.

02 수학과 평가의 원리

학교 수학에서의 평가는 주로 교수-학습 방법의 개선을 위하여 이루어져야 하는데, 그동안 평가는 수준 판정 및 선발의 목적을 달성하는 데 치중해 왔다. 이로 인해 평가는 학생들에게 도움을 주기보다 많은 심적인 부담을 안겨 주었으며, 그러한 평가 결과는 교사의 수업 방법을 반성하고 개선하는 데 그다지 활발히 활용되지 못하였다. 또 지식을 측정하는 지필 검사가 전적으로 활용되고, 창의력, 탐구력과 같은 고등 정신 능력과 흥미, 관심, 열의와 같은 정의적 능력을 평가할 수 있는 다양한 평가 방법이 활용되지 못하였다. 이렇듯 잘못된 평가 방식은 교육 본연의 모습을 그르칠 수도 있지만, 반대로 올바른 평가 방식은 교육 본연의 모습을 찾는 데 절대적인 영향을 미친다. 이에 따라 수학 교과에서 점차 지향되고 있는 평가의 동향이나 특징에서 알 수 있는 바와 같이, 수학과 평가가 바르게 이루어지기 위해서는 다음과 같은 기본 원리가 지켜져야 한다(황혜정 외, 1997).

가. 발달적 교육관을 중시하는 평가

평가는 그 방향과 방법에 영향을 주는 기준하에서 선발적 교육관과 발달적 교육관으로 대별할 수 있는데, 발달적 교육관에서의 교육 평가는 학생의 선발이나 개인차를 내는 데 관심이 있는 것이 아니라, 모든 학생이 가능한 한 의도하는 바의 수업 목표를 달성할 수 있도록 모든 학습자에게 적절한 학습 방법을 배치하기 위한 평가를 하게 된다. 또한 학생 간의 서열과 개인차를 내기 위한 평가 방법보다는 주어진 수업 목표를 어느 정도 달성하였는가 하는 수업 목표 달성도의 평가에 그 관심이 집중된다.

발달적 교육관은 준거지향평가의 관점으로 귀결된다고 할 수 있다. 평가의 목적에 따라서 상대평가를 하여야 할 때가 있고, 준거지향평가를 하여야 할 때도 있다. 그러나 수학과 평가가 수학적 능력을 신장시킨다는 목적을 달성하기 위해서는 교사가 선발적 교육관보다는 발달적 교육관을 지녀야 한다. 그럼으로써 교사는 교육 목표의 달성도와 학생의 학습 과정에 더욱 관심을 기울이고 자신의 수업 방법과 평가 방법에 대해 보다 반성하며 학생 개개인에 적합한 교수-학습 방법을 적용할 수 있다.

나. 다양한 평가 방법을 수반하는 평가

그동안 수학 교과에서 다양한 평가 방법이 사용되지 못한 주된 이유는 교사에게 주는 부담, 그리고 다양한 평가 방법을 활용할 수 있는 다양한 형태의 수업을 하는 데 교사가 익숙하지 못하기 때문이다. 또 수학에서는 지필 검사만으로도 학생들의 수학적 능력을 충분히 평가할 수 있다는 잘못된 인식 때문일 수도 있다. 그러나 지필 검사만으로는 다양한 상황에서 다양하게 표현되는 수학적 능력을 종합적으로 바르게 평가할 수 없다. 수학이 타 교과목과는 다른 특성을 지니고 있다고 하더라도, 수학적 능력 역시 다양한 평가 방식을 통해서 바르게 평가될 수 있다. 이제까지의 일상적인 수업 방법을 탈피하여 학생들의 수학적 사고를 자극하는 새로운 수업 방법을 적용하여 보고, 또 이에 부합하는 새로운 방법으로 평가를 해야 할 것이다.

다. 문제 해결 과정을 중시하는 평가

현재의 수학과 평가에서는 정 · 오답 여부, 점수, 석차 등이 중요시되고 있으며, '학생이 어떠한 사고 과정을 거쳐서 이 문제를 해결하였는가?', '학생이 사고 과정에서 어떤 오류를 범해서 문제를 풀지 못하였는가?'는 중요시되지 않는다. 이는 다인수 학급에서의 평가의 효율성, 선발적 교육관, 상대적 평가관이 중요시되는 분위기 때문이다. 그러나 이러한 평가 방식이 계속 적용되면 학생은 사고 과정, 문제 해결 과정의 타당성보다 정 · 오답 여부에만 신경을 쓰기 때문에 학생의 수학적 사고 능력, 문제 해결력은 향상되지 못한다. 또 교사는 학생 개개인이 지닌 사고 과정의 결함을 알 수 없기 때문에 그러한 결함들이 발견되어도 치유되기 어렵다. 교사 역시 자신의 교육 방법을 반성해 가면서 학생을 지도할 기회를 가지기

어렵다. 그러므로 이러한 일을 가능하게 하려면 다양한 풀이 과정과 방법이 공유되는 해결(또는 수행) 과정을 중요시하는 평가가 이루어져야 할 것이다.

라. 정의적 영역의 능력을 중시하는 평가

정의적 영역의 평가는 수학적 지식 및 기능에 관한 인지적 영역의 평가 못지않게 중요하다. 학생이 가지는 수학적 성향은 그가 수학에 계속적으로 관심을 가지고 공부를 하며, 높은 성취를 이룰 수 있을 것인지를 판단하는 중요한 준거가 된다. 최근 들어 우리나라에서도 정의적 영역에 대한 평가의 중요성이 점차 인식되고 있다. 이는 우리나라 학생들이 국제 학업성취도 비교 평가에서 수학 학업성취 수준은 세계 최상위권임에도 불구하고, 정의적 수준은 최하위권인 것으로 나타났기 때문이다. 많은 학생들이 수학은 재미없고 어려운 과목, 일상생활에 도움이 안 되는 과목, 대학 입시를 위한 과목 등 매우 부정적인 교과로 인식하고 있는 것으로 나타났다. 이는 우리 사회에 큰 우려감을 주고 있으며, 이에 대한 개선책이 요구되고 있다(박선화 외, 2010).

그럼에도 불구하고 우리의 현실에서 정의적 영역에서의 평가가 제대로 이루어지고 있지 않은 이유는 평가에서의 주관성과 교사의 주관적 판단을 중요하게 여기지 않고 신뢰하지 못하는 분위기, 평가상의 번거로움, 교사들이 쉽게 이용할 수 있는 평가 도구나 자료의 부족 때문이다. 이에 따라 교사의 주관적 판단의 중요성을 인식하고 그것을 신뢰하며, 평가상의 번거로움을 최소화하고, 교사들이 손쉽게 이용할 수 있는 관찰 또는 면담지 등의 평가 도구가 개발되고 제공된다면, 정의적 영역에 대한 평가도 보다 활성화될 수 있을 것이다.

여기서 수학에 대한 정의적 특성의 의미와 구성 요소를 간단히 살펴보면 다음과 같다. 한국교육과정평가원(박선화 외, 2010)에서는 수학에 대한 정의적 특성을 수학에 대한 경험으로 인하여 형성된 정서, 신념, 동기 등을 포함하는 심리적 특성으로 정의하여 제시하였다.

〈표 V-1〉 수학에 대한 정의적 특성의 요소

범주	하위 요소	정의
정서: 비교적 강하게 단시간 동안 계속되는 감정. 희노애락, 애증, 공포, 쾌감 등	흥미	교과나 학습 주제 등에 대해 주관적으로 느끼는 선호도 및 학습 활동에 참여함으로써 발생하는 즉각적인 재미
	호기심	지속적이면서 일관되게 새로운 것을 추구하는 개인의 심리적 경향성
	수학 불안	수학 교과 자체 또는 수학과 관련된 일이나 문제 등에 대하여 긴장하고 두려워하거나 걱정하고 염려하는 심리 상태
신념: 어떤 아이디어, 사건, 행위 등과 같은 대상에 대해 여러 반응을 시도하고 다양한 시행착오의 과정을 반복하면서 형성된 가치 체계	수학관	문화적 가치와 사회적 기대를 경험과 학습을 통하여 내면화한 것으로 수학이 가지고 있는 교과로서의 특성과 그에 적절한 학습 방법에 관한 개인적인 관점
	가치 인식	사회적 맥락이나 학습자 자신의 삶의 맥락과의 관계 속에서 수학의 기능과 유용성에 대한 평가
	귀인	수학과 관련된 성공과 실패의 원인에 대한 개인적 지각으로 원인의 소재(내적 · 외적 요인), 안정성, 통제 가능성에 대한 추론
동기: 학습 활동을 유발하고 지속하게 하는 힘으로서 학습 활동을 의미 있고 가치 있는 것으로 보고 학습 활동으로부터 의도된 가치를 얻고자 하는 경향성	목표 지향성	성취 상황에서 개인이 과제를 수행하는 목표에 대한 개인의 지향성으로, 타인과 비교하거나 자신의 능력을 타인에게 증명하기 위한 목표인 수행 목표와 과제의 숙달이나 능력을 향상하기 위한 목표인 숙달 목표로 구분됨
	자기 효능감	목표 달성에 필요한 행동 과정을 조직하고 행하는 자신의 능력에 대한 믿음으로, 특정한 시간에 주어진 특정 과제를 잘 수행할 수 있는지에 대한 인식
	자기 조절력	개인적 목표 설정과 설정한 목표를 성취하기 위한 행동 조정으로, 장기적 목표 달성을 위해 바람직한 행동을 추구하고 그렇지 않은 행동은 억제하여 충동적이거나 즉각적이지 않고 스스로 문제를 신중하게 계획, 해결, 평가하려는 경향성

03 수학과 평가 절차

평가는 상황에 따라 다양한 형태로 시행되므로 모든 상황에 적용 가능한 평가 절차를 규명하기란 쉽지 않다. 하지만 교사가 평가 주체자가 되어 학생들의 수학적 능력이나 태도를 평가하는 경우에 초점을 두어, 평가 시행을 위한 기본 절차를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

평가 목적 설정

↓

평가 목표 및 영역 설정

↓

평가 틀 개발(평가 방법 선정)

↓

평가 도구 개발

↓

평가 실시

↓

채점 및 결과 보고

[그림 Ⅴ-1] 수학과 평가의 기본 절차

평가를 하고자 할 때 가장 먼저 고려해야 할 것은 '어떤 목적으로 평가를 할 것인가'를 결정하는 일이다. 진단평가나 형성평가와 같이 교사가 자신의 수업에 대한 피드백을 얻기 위한 목적으로 평가를 실시한다면 수업을 진행하기 전이나 진행하는 도중에 평가를 실시하여 그 결과를 수업 개선에 활용하게 될 것이다. 반면 총괄평가와 같이 학생들의 성취 정도에 따라 등급을 결정하는 것이 목적이라면 보다 객관적인 평가 방법을 이용하며, 평가의 내용도 한 학기 또는 일 년 동안 학생들이 학습한 전체 내용을 포괄하는 것이 더 타당할 것이다. 이처럼 평가의 목적에 따라 평가 내용, 방법, 시기 등 진행되는 평가의 전체적인 모습이 달라지므로, 우선 평가를 하고자 하는 목적부터 염두에 두어야 할 것이다.

두 번째 단계에서는 첫 번째 단계에서 결정한 평가 목적에 따라 평가하고자 하는 영역(이하 평가 영역)을 설정하고, 해당 영역의 주요 교육 목표가 무엇인지 확인하여야 한다. 이때의 교육 목표는 각 문항에 대한 구체적인 평가 목표를 뜻하는 것이 아니라 교육과정의 목표 및 내용에 준하여 해당 평가 영역의 교육 목표를 설정하는 것을 말한다.

세 번째 단계에서는 균형 있는 평가 도구 개발을 위하여 평가 틀을 개발하는 것이다. 평가 틀은 평가 영역의 교육 목표를 분석하여 이를 잘 반영할 수 있도록 설정된 행동 영역과 내용 영역, 평가 목표, 평가 문항 유형, 각 요소별 문항 출제 비율 등을 포괄적으로 포함한다.

또한 이때 평가하고자 하는 목적, 평가하고자 할 영역, 그리고 그 영역에 해당하는 교육 목표를 토대로 이에 부합하는 평가 방법을 선정하여야 할 것이다. 예를 들어 총괄평가를 실시할 목적으로 특정 평가 영역을 선정하여 해당 교육 목표가 확인되었을 때, 인지적 영역 능력에 관한 평가를 실시하기 위해서는 이에 부합하는 평가 방법을, 정의적 영역 능력에 관한 평가를 실시하고자 할 경우에는 이에 따른 적절한 평가 방법을 사용해야 할 것이다.

네 번째 단계는 위의 세 번째 단계를 통해 마련된 평가 틀에 부합하는 평가 도구를 개발하는 과정이다. 평가 도구 개발 시에 문항의 양호도, 검사 시행의 시간 소요 등을 고려하여 문항을 개발하고 그에 따라 모범 답안 및 채점 기준도 개발하여야 한다. 이때 '평가 도구 개발'이란 인지적 영역의 평가에서 지필 검사를 위한 평가 문항 개발, 채점 기준 및 예상 답안 작성과 정의적 영역에서의 평가를 위한 평가(주로 관찰 및 면담) 요목 개발, 기록 방법 작성 등을 총체적으로 일컫는 말이다.

다섯 번째 단계에서는 평가를 실시하고, 가채점을 통하여 사전에 준비한 채점 기준 및 예상 답안의 적절성을 검토하여 이를 수정 · 보완한 후, 이를 참고로 하여 실제적인 채점에 임하도록 한다.

마지막 단계로는 평가 목적에 따라 적절한 방법으로 기록하여 그 결과를 보고하도록 한다.

04 수학과 평가 틀 개발 시 유의 사항

학교 수학에서 수학 교육 목표를 내용과 행동 수준에 맞추어 평가하는 것은 바람직한 일이며, 이를 위해서는 수학과에 적합한 평가 틀을 마련하여야 한다. 평가 틀은 평가 도구 개발 및 평가의 전 과정에서 평가 방향과 평가 관련 항목을 선택하거나 결정할 때 판단의 준거가 된다. 평가 틀은 평가에 관한 보다 체계적이고 포괄적인 구조를 설명할 수 있다는 장점과 더불어 평가 문항과 내용 및 행동 영역의 적합성을 판정하고 설명하는 데 용이하다고 할 수 있다. 〈표 Ⅴ-2〉, 〈표 Ⅴ-3〉 참조

수학과 평가 틀을 개발하는 데 있어서 고려해야 할 제한 사항은 다음과 같다.

첫째, 일반적으로 평가의 목적은 우수 학생을 선발하려는 것이 아니고 학생들의 교육 성취 정도(수준)가 얼마나 되는지, 그리고 각각의 수준에 도달한 학생들이 얼마나 되는지 파악하는 데 있으므로 평가 틀이 학생들의 성취 수준을 골고루 측정해 낼 수 있도록 세워져야 한다. 그러므로 가장 기초가 되는 수준에서부터 우수한 학생까지의 성취 정도가 잘 드러날 수 있도록 다양한 수준의 문항으로 구성되어야 한다.

둘째, 가능하면 평가 요소를 적어도 내용 영역과 행동 영역으로 이원화하도록 한다. 특히 행동 영역을 설정하여 소홀하기 쉬운 '지식의 활용 또는 적용' 능력에 의미 있는 비중을 두도록 한다. 동시에 폭넓은 수준의 학업 성취의 정도를 파악할 수 있도록 행동 영역을 가장 기초적인 지식이나 단순 계산에서부터 보다 복합적인 사고를 요구하는 탐구나 문제 해결 능력까지 평가의 대상으로 삼아, 학생들이 어느 영역에 더 높은 성취를 보이는지 파악할 수 있도록 한다.

셋째, 평가 틀의 구성에 있어서 시대적 요구가 강한 행동 영역을 의도적으로 평가 틀에 포함시키도록 한다. 예를 들어 의사소통 능력과 같이 시대적으로 강력히 요구되고 있으면서도 실제 학교 현장에서는 소홀히 다루어지는 능력을 평가 틀에 과감히 도입함으로써 학교 교육과정 운영에 있어서 선도적 역할을 기대해 볼 만하다.

〈표 Ⅴ-2〉 수학과 평가 틀의 예

행동 영역 / 내용 영역	계산	이해	추론	문제 해결
수와 연산				
문자와 식				
함수				
확률과 통계				
기하				

〈표 Ⅴ-3〉 수학과 평가 틀에서의 인지적 행동 영역의 정의

행동 영역	정의
계산	여러 가지 계산법, 나아가 문제 해결에 이르기 위한 명확한 절차, 즉 알고리즘을 능숙하게 구사할 수 있는 능력에 관한 것
이해	기본적인 수학적 개념, 원리, 법칙 및 그 관련성을 이해하여 의미 충실한 개념적 사고를 형성할 수 있는 능력에 관한 것
추론	• 관찰, 열거, 실험 등을 통한 귀납과 유추, 추측에 의해 수학적 법칙과 문제의 해법을 발견할 수 있는 능력에 관한 것 • 조건명제의 증명, 삼단논법에 의한 연역적 추론, 반례에 의한 증명, 간접증명법, 모순법, 동치인 명제의 증명, 수학적 귀납법 등을 이용한 증명을 읽고 이해할 수 있으며, 이러한 방법을 사용하여 수학적 명제를 증명할 수 있는 능력에 관한 것
문제 해결	• 수학의 여러 가지 내용 사이의 개념, 원리, 법칙 등의 관련성이 요구되는 수학 내적인 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것 • 수학과 일상생활 및 타 교과 내용과의 관련성의 파악이 요구되는 통합 교과적(수학 외적)인 소재의 응용 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것

05 서술형 및 수행 평가 문항의 채점 방법

서술형 또는 수행 평가 문항 등에서 학생들은 문제(질문 내용)조차 이해하지 못하는 경우, 문제는 이해했으나 풀이 과정이 틀린 경우, 또는 풀이 과정은 옳으나 계산 과정이 미흡하여 실제로 결과를 나타내는 부분이 틀린 경우 등 여러 가지 반응을 나타낸다. 실제로 학생들의 문제 풀이를 평가하는 데 있어서 가장 어려운 부분은 여러 가지 유형의 오류들을 드러내는 풀이를 어떻게 평가할 것인가를 결정하는 일이다. 이때 풀이 과정을 중시하여 채점하는 방법으로는 '분석적 점수화 방법'과 '총체적 점수화 방법'을 들 수 있다(Charles, et. al., 1987).

먼저 '분석적 점수화 방법'이란 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 단계(과정)를 구체화하여 각 단계별로 채점 요소를 세우고 점수를 배당하는 방법을 말한다. 이때 어떤 특정 요소에 대한 채점 결과가 다른 요소에 대한 채점 결과에 영향을 주어서는 안 되며, 각 문항마다 채점 요소를 지나치게 세분화하지 않도록 한다. 분석적 점수화 방법은 학생 개개인의 답안지를 면밀히 분석해야 하므로 채점하는 데 많은 시간을 필요로 하지만, 주어진 문제의 해결 과정에 따라 단계별로 수치화한 점수를 부여함으로써 채점자 간의 평점 차를 줄이고 동일한 채점자 내에서도 일관성 및 객관성을 유지할 수 있다는 것이 주요 장점이다. 한편 '총체적 점수화 방법'이란 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 특정 내용이나 과정에 대하여 각각 점수를 부여하는 대신, 풀이 전반에 걸쳐 하나의 점수를 부여하는 방법을 말한다.

서술형 및 수행 평가 문항의 채점을 위한 채점 기준은 주로 분석적 점수화 방법을 토대로 문제 이해, 문제 해결 과정, 답 구하기 등의 과정이 반영되도록 작성한다. 이를 작성하는 과정에서 각 문항의 배점과 채점 요소별 배점은 평가 목적이나 목표에 따라 적절히 부여하도록 한다. 다음은 서술형의 문항에 대한 채점 기준을 분석적 점수화 방법으로 제시한 예이다.

【문항】

작년에 A 중학교의 학생 수는 1050명이고, 금년에는 작년보다 남학생은 4 % 증가하고 여학생은 2 % 감소하여 전체적으로 9명이 증가했다. 금년의 남녀 학생 수를 각각 구하여라.

【모범 답안】

작년의 남학생의 수를 x, 여학생의 수를 y라고 하면

$$\begin{cases} x+y=1050 \\ \frac{4}{100}x-\frac{2}{100}y=9 \end{cases}$$

이므로 $x=500$, $y=550$이다.

따라서

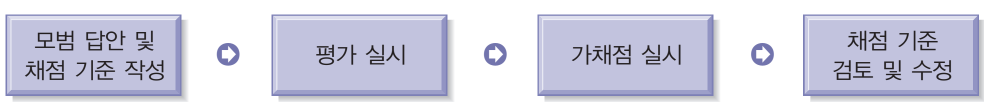
금년의 남학생의 수: $500+\frac{4}{100}\times500=520$(명)

금년의 여학생의 수: $550-\frac{2}{100}\times550=539$(명)

【채점 기준】

요소 / 영역	채점 요소	배점
문제 이해	작년의 남학생 수를 미지수로 정하기	1점
	작년의 여학생 수를 미지수로 정하기	1점
해결 과정	작년의 학생 수에 관한 식 세우기	1점
	작년보다 늘어난 금년의 학생 수에 관한 식 세우기	3점
답 구하기	금년의 남학생 수 구하기	2점
	금년의 여학생 수 구하기	2점
총점		10점

서술형 및 수행 평가 문항에 있어서 모범 답안은 채점 기준을 작성하는 데 있어서 구체적인 지침의 역할을 한다. 문항의 특징이나 성격에 따라 다르겠지만, 일반적으로 수학 교과의 특성상 피험자가 다양한 창의성을 발휘하여 평가자가 생각하지도 않았던 여러 가지 형태의 답을 제시할 가능성은 그리 높지 않다. 하지만 서술형 문항의 경우에는 답안을 작성하는 과정에서 실수나 오답의 가능성이 높으므로 이에 관한 채점 기준을 마련하여 채점 결과의 공정성을 유지해야 할 것이다. 이에 따라 모범 답안과 그에 따른 채점 기준을 구체적으로 마련하고 평가를 실시한 후 이미 작성된 채점 기준(안)을 토대로 일부 학생들의 실제 답안을 '가채점'하는 일은 매우 중요하다고 하겠다. 이는 채점 기준의 요소 중에서 채점자(교사)가 미처 생각하지 못하였던 채점 요소나 부적절하게 배당된 요소별 점수가 있는지를 검토하고, 미비한 부분을 보완·수정하기 위함이다. 위와 같은 절차를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

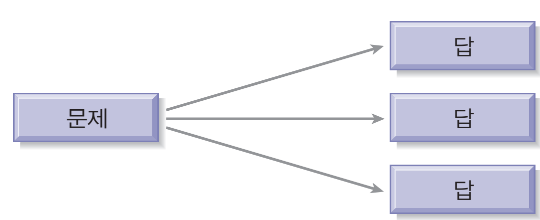


[그림 V-2] 채점 절차

06 프로젝트

가. 프로젝트의 의미

프로젝트의 사전적 의미는 '실행 계획서'이지만, 수학 교육에서 프로젝트는 보다 넓은 의미로 무엇을 할 것인가뿐 아니라 그것을 실제로 수행하여 자료를 제시하고 그 결과를 평가하는 것을 포함한다. 프로젝트는 열린 반응을 요구하는 일종의 수행 과제를 말하며, 이때 개방형 문제, 즉 열린 반응(open-ended, open-responded) 문제는 해답이 정해져 있지 않고 학생의 관점에 따라 여러 가지 답이 나올 수 있는 문제를 말한다. 하지만 경우에 따라서 개방형 문제의 답은 모범 답안이 제한되지 않을 수 있다. 즉 결정되지 않을 수도 있다.



[그림 V-3] 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

【개방형 문제의 예】

숫자 4를 네 번 사용하고 $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{\ }$, 분수 등의 기호를 써서 0부터 9까지의 수를 만들어 보아라.

【풀이】

$$0=4+4-4-4=44-44$$

$$1=\frac{4}{4}+4-4=\frac{44}{44}=\frac{4}{4}\times\frac{4}{4}=\frac{4}{4}\div\frac{4}{4}$$

$$2=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=4-\frac{4+4}{4}$$

$$3=\frac{4+4+4}{4}$$

$$4=(4-4)\times4+4=\sqrt{4+4+4+4}$$

$$5=\frac{4\times4+4}{4}$$

$$6=\frac{4+4}{4}+4=\frac{4+4+4}{\sqrt{4}}$$

$$7=\frac{44}{4}-4=\{4-(4\div4)\}+4$$

$$8=4+4+4-4=\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}$$
$$=4\times4\div4+4=4\times4-(4+4)$$

$$9=4+4+\frac{4}{4}$$

학생들은 열린 반응의 과제들을 수행하기 위하여 어떤 수학적 지식을 사용해야 하는지를 결정해야 할 뿐만 아니라 때로는 어떻게 접근해 나아가야 할 것인가에 관한 수학적 방법까지도 결정해야 한다. 이에 따라 프로젝트는 학생들의 실제 생활과 직접 관련되어 그들의 고등 사고 능력을 발휘할 수 있는 문제 상황을 주제로 제시함으로써 과정 중심의 수행 경험을 하게 한다.

나. 프로젝트의 특징과 개발 시 유의점

프로젝트의 특징을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 프로젝트는 어떤 특수한 상황에서 개인이 원하는 바의 깊이 있는 탐구를 가능하게 하므로, 프로젝트의 주제 및 진행 과정을 개별화 또는 차별화하여 개성에 맞게 다룰 수 있다.

둘째, 프로젝트는 구체물에서 서적, 영화, 비디오 등의 매체에 이르기까지 다양한 자료에 대하여 수학적으로 해석하고 설명하는 과정을 포함하므로, 다른 교과 내용과의 연계성에 따른 수학적 가치의 인식이 가능하고 창의적 사고, 비판적 사고 등과 같은 보다 고차원적인 사고 능력을 신장시킬 수 있다.

셋째, 프로젝트는 소그룹의 협동 학습을 통하여 학생들이 자신이 속한 집단의 다른 구성원들과 이야기하고 그들의 활동 결과를 학급 전체에 (말하기와 쓰기의 형태로) 전달함으로써 의사소통 능력을 신장시킬 수 있다.

한편 다음은 프로젝트 개발 시 유의해야 할 사항이다.

첫째, 프로젝트는 학생들이 수학적인 안목에서 현상을 파악할 수 있는지, 또는 배운 수학적 지식을 사용하여 생활의 여러 가지 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 것으로, 판에 박힌 문제(정형 문제)를 지양하고 참신하고 새로운 성격의 주제(문제)를 개발하도록 한다.

둘째, 프로젝트의 채점을 위한 채점 기준은 총체적 점수화 방법과 분석적 점수화 방법을 적절히 고려하여 작성한다. 서술형 문항의 경우와 마찬가지로, 프로젝트의 채점 기준(표)의 작성 과정에서 각 문항의 배점과 채점 요소별 배점은 평가 목적이나 목표에 따라 부여하도록 한다.

다. 프로젝트의 채점 방법

프로젝트의 수행 과정은 다음 〈표 Ⅴ-4〉와 같은 기록지를 사용한 자기 평가(self-assessment) 방법을 이용하여 학생 스스로 작성해 보게 하고, 이를 평가하거나 점검하는 것이 용이하며 바람직하다(황혜정 외, 1997).

〈표 Ⅴ-4〉 학생 자기 평가 기록지(예)

학생 자기 평가 기록지
단원명: ____________________ 날　짜: ______년 ______월 ______일 ______교시 이　름: ____________________　(______학년 ______반 ______번)
주제(문제):
해설(풀이):
반성(소감):
자기 평가: 아주 못함(　　)　못한 편임(　　)　잘한 편임(　　)　아주 잘함(　　)
교사 논평:

점선을 따라 자르세요.

한편 프로젝트의 전반적인 활동 과정 및 결과에 대하여 평가하고자 할 때, 다음과 같이 관찰에 의한 평정척도지를 활용하면 편리하다(Krulick 외, 1998).

〈표 Ⅴ-5〉 평정척도법을 이용한 과제 수행 능력 평가(예)

이름: ________________ 날짜: ________________

평정척도

1=불충분　2=만족　3=훌륭함

관찰(면담) 요목			0	1	2	3	논평
과제 수행 능력	주제 이해						
	해결 전략 선정						
	계획 수행						
	검토 및 반성						
	의사소통						
	태도						

07 관찰 및 면담

가. 관찰 및 면담의 특징

관찰 및 면담에서 평가자는 수학 문제의 해결을 위하여 사고하고 있는 개인, 소집단, 또는 학급에 대하여 관찰 내지 면담을 하면서 기록하게 된다. 이 방법은 수학적인 수행 능력과 같은 인지적 영역뿐 아니라 수학에 대한 태도와 신념 등 정의적인 영역까지 평가할 수 있는 장점이 있다. 또한 관찰 및 면담은 검사를 통해 양적으로 확인할 수 있는 학생의 수학적 능력이나 사고에 대하여 보다 심화된 자료를 얻을 수 있다. 하지만 우리나라 교육현실을 감안할 때, 독자적인 평가 기법으로서의 역할보다는 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완하는 보조 역할의 의미가 크다.

특히 관찰의 목적으로 사전에 생각하지 못하였던 측면에 대하여도 부수적인 자료를 수집할 수 있다. 또 관찰은 정규 수업 시간 중에 자연스럽게 이루어질 수 있고, 특정한 사고력에 중점을 두고 평가할 수 있으며, 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완할 수 있다.

관찰이나 지필 검사와 더불어 면담은 학생들과 직접 대화함으로써 문제 해결 상황에서 실제로 나타내 보인 행동이나 서면의 '결과'를 도출해 내기까지의 사고 '과정'에 대한 통찰을 가능하게 하는 기법이다. 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별할 수 있다. 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

나. 관찰 및 면담의 유형

실제로 현장에서 사용할 수 있는 관찰법은 수업 시간에 교사가 학생들을 대상으로 실시하는 비참여 관찰로, 학생 전체 또는 소집단이나 개인별로 자연스럽게 행해질 수도 있다. 다만 교사가 수업을 진행하면서 관찰 결과를 기록할 수 있는 시간이 한정되어 있으므로, 학급 전체보다는 개별 또는 소집단을 대상으로 관찰을 실시하는 것이 효과적이다. 그런데 사실 비참여 관찰의 경우 객관적으로 관찰이 가능하나 관찰의 기회가 적고, 심리적으로 격리되어 있기 때문에 미세한 변화를 파악하기 힘들다.

한편 공식적 면담은 면담자가 미리 만들어진 일련의 질문을 가지고 응답자에게 질문하는 방법이다. 이때 각 면담에서는 똑같은 질문이 똑같은 방법으로 부과되므로, 공식적 면담은 질문지를 언어로 표현하는 방법이라고 볼 수 있다. 이에 반해 비공식적 면담은 면담 계획을 세우되 면담 목적만을 명백히 하여 융통성 있는 접근을 시도하는 방법이다. 따라서 연구자(교사)가 한 현상에 관한 적절한 질문들을 충분히 가지고 있지 않을 때 유용하다. 이러한 면담은 예정된 '질문군'이 없고 본질적으로 탐색전부터 시작한다고 볼 수 있다.

결국 면담이 공식적으로 진행되든 비공식적으로 진행되든, 교사는 주로 정규 수업 외의 상황에서 학생들과의 면담을 통해 그들과 직접 대화함으로써 그들이 수학 수업 상황에 어떻게 수용하고 대처하는지에 대해 보다 깊은 이해를 구할 수 있다. 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 (비공식적) 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

특히 공식적 면담은 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별하는 데 유용하며, 비공식적 면담은 그들을 진단, 선별하는 것뿐만 아니라 그들의 능력에 따른 처치도 가능하다. 면담은 주로 개별적으로 진행하는 것이 상례이지만, 비공식적 면담의 경우에는 소그룹별로 면담을 진행하여 면담 대상자들끼리 보다 자연스러운 분위기에서 진행됨으로써 보다 정확한 정보를 얻을 수 있는 이점도 있다.

다. 관찰 및 면담 시 유의 사항

일반적으로 관찰을 통해 정기적으로 기록하여 평가하기 위해서는 관찰자인 교사의 많은 시간과 노력이 절대적으로 필요하며, 관찰 목적에 알맞은 현상을 포착하기 어려울 때도 있다. 또한 학생들의 반응을 관찰할 때 편견

을 가지게 되어 관찰 결과에 주관성이 개입될 여지가 있으며, 관찰의 대상이 되는 학생들 역시 관찰자인 교사를 의식하면서 행동이 달라질 수 있다. 사실 교사가 관찰만을 통하여 학생들의 다양한 행동이나 사고 과정 등을 정확히 파악하기는 어렵다.

관찰 시 유의해야 할 점은 다음과 같다.

- 뚜렷한 관찰 목적 또는 문제 의식을 가지고 관찰에 임하도록 한다.
- 관찰 계획을 치밀하게 세워야 한다.
- 부분과 전체의 관련을 지으며 관찰함으로써 피상적인 관찰이 되지 않도록 해야 한다.
- 객관적인 태도로 관찰해야 한다.
- 관찰 기간은 짧게 하고 누적시키는 방법을 쓰도록 한다.

공식적 면담의 경우에는 면담 도중 학생의 반응에 개입하는 일이 없으므로, 사전에 질문 내용들을 신중히 계획하여 작성하면 별 문제가 없으나, 비공식적 면담에서는 교사가 학생의 반응에 따라 수시로 질문하게 되므로 더욱 주의를 해야 한다.

면담 시 유의해야 할 점은 다음과 같다.

- 면담 시 교사의 반응이나 질문으로 인해 대화의 방향이 바뀌어서는 안 되므로 교사의 태도(반응)는 중립적 입장을 취해야 한다.
- 질문의 내용과 시기가 적절해야 한다.
- 학생이 편안하고 안정감을 가지도록 면접 환경과 조건을 구성해야 한다.
- 교사가 면담 시 기본적으로 갖추어야 할 태도는 중립적인 태도, 공정한 태도, 자연스러운 태도, 담화적인 태도, 친절한 태도이다.

라. 관찰 및 면담의 기록 방법

관찰 및 면담의 목적이 결정되면 대상, 장소, 시간, 기록 유형 등의 세부 계획이 진행되어야 하며, 이때 활용될 수 있는 기록 방법에는 체크리스트와 평정척도법 등이 있다.

체크리스트나 평정척도법은 사전에 관찰할 행동 요목을 제작하는 과정에서 많은 시간과 노력이 요구되지만, 그 기록 자료를 재분석하지 않고 평가 자료로 수월하게 활용할 수 있다. 그러나 체크리스트나 평정척도법은 사전에 치밀하게 관찰 요목을 작성하여도 임의적이고 예측하지 못하는 행동이 발생하는 경우에는 적절한 기록을 수행하기가 곤란한 단점이 있다.

관찰 및 면담의 자료(정보)를 수집하면, 그다음 단계로 그 정보들을 요약하고 행동의 패턴을 결정하는 작업이 필요하다. 물론 기록 형태에 따라 정보를 요약하는 방법이 다양하게 개발될 수 있다. 일반적으로는 관찰에 의해 기록된 자료들을 그래프 및 빈도, 시간, 가중치의 평균 등의 기술 통계 수치로 분석한다. 그러나 학교 현장에서는 기록된 자료를 진술문 형태로 요약하여 교사의 전문적 판단에 따라 필요한 조언을 하는 것이 보다 수월하고 바람직하며, 이는 학교생활기록부에서 각 교과에 대한 학생의 발달 상황을 작성하는 기초 자료가 될 수 있다.

관찰 및 면담은 수학에 대한 흥미와 호기심, 수학에 대한 자신감, 수학에 대한 불안, 수학의 유용성 인식, 과제 집착력과 의지, 창의적 사고, 수학 수업에의 참여 등 정의적 영역을 평가하는 데 용이하다. 다음 〈표 Ⅴ-6〉은 여러 정의적 영역에 대한 평가를 위하여 체크리스트를 사용하여 관찰 또는 면담이 가능한 구체적인 요목들을 제시한 예이다(박선화 외, 2010).

〈표 Ⅴ-6〉 정의적 영역 평가를 위한 체크리스트지(예)

체크리스트					
정의역 영역	관찰(면담) 요목	학생 1	학생 2	학생 3	학생 4
수학에 대한 흥미와 호기심	• 수학을 하는 것을 즐거워한다.				
	• 수학에서 배우는 것들에 대해 흥미가 있다.				
	• 수학 수업 시간을 기다린다.				
	• 수학에 대한 것을 읽기를 좋아한다.				
	• 수학의 개념이나 원리를 알려고 한다.				
수학에 대한 자신감	• 수학 공부에 자신감을 가지고 있다.				
	• 수학에서 좋은 성적을 받을 것이라고 생각한다.				
	• 수학에서 어려운 내용까지도 잘 이해할 수 있다.				
	• 수학을 가장 잘하는 과목 중의 하나로 생각한다.				
수학에 대한 불안	• 수학 수업이 어려울까 봐 걱정한다.				
	• 수학 성적이 나빠질까 봐 걱정한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 긴장한다.				
수학의 유용성 인식	• 수학이 우리의 생활에 많은 도움을 준다고 생각한다.				
	• 수학이 사고력을 기르는 데 도움이 된다고 생각한다.				
	• 수학이 나중에 공부하는 데 필요하므로 중요한 과목이라고 생각한다.				
	• 수학이 나중에 직장 생활을 하는 데 도움이 된다고 생각한다.				
과제 집착력과 의지	• 수학 공부를 열심히 한다.				
	• 수학 시간에 배운 내용을 확실히 알려고 노력한다.				
	• 수학 문제를 풀 때, 답을 구할 때까지 중단하지 않고 열심히 하려고 노력한다.				
	• 수학 공부를 잘하기 위해 계획을 세우고 스스로 노력한다.				
창의적 사고	• 다른 사람의 방법을 그대로 따라 하는 것보다는 스스로 생각하고 탐구한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 다른 사람과는 다른 독특한 방법을 찾아보려고 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 한 가지 방법으로 해결하는 것보다는 다양한 방법을 찾아보려고 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 내가 알고 있는 방법 중에 어떤 것이 더 적절한지를 생각한다.				
수학 수업에의 참여	• 수학 수업 시간에 모둠 활동에 적극적으로 참여한다.				
	• 수학 수업 시간에 다른 생각을 한다.				
	• 수학 수업 시간에 발표를 많이 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 아이디어를 다른 학생들과 공유한다.				

VI. 좋은 수업의 의미

01 좋은 수업에 대한 관점의 변화

어떤 수업이 좋은 수업인가에 대한 견해는 구성주의 이론의 도래와 함께 바뀌기 시작하였다고 볼 수 있다. 구성주의 인식론에서는 지식을 개인이나 집단이 적극적으로 만들어 낸 경험적 구성물로 본다. 즉, 학생들은 모든 지식을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 학생 스스로 능동적 구성 활동에 의해 이를 형성한다는 것을 그 주된 요지로 삼고 있다. 이와 같은 관점에서 생각해 볼 때 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 개념을 탐구하고 개념 사이의 관련성을 잘 이해할 수 있도록, 다시 말해 구성 활동이 잘 일어날 수 있도록 총체적인 환경을 조성해 주는 것이다.

학습 기회의 제고라는 측면에서 좋은 수업을 진단할 때, 학습 기회란 수업을 통해 가르쳐진 것과 평가되어지는 것 사이의 중복 정도를 의미한다. 이는 수업 중에 다루어지는 교육과정의 내용과 평가의 내용이 수업의 주요 목표를 반영해야 함을 뜻한다. 그러므로 1980년대 이래로 교육과정의 개정은 교사가 아닌 학생 중심의 교육을 강조하고, 실생활과 학교 교육 내용을 연결시키며, 단순 암기나 훈련보다는 이해와 사고에 초점을 두어 왔다.

따라서 진정한 학습은 일상의 학습 상황에서 다양한 정보와 같은 인지적 도구 혹은 다른 사람들의 도움을 받아 학생들이 확실하게 어떤 문제 상황을 파악할 수 있을 때 일어난다고 볼 수 있다. 그러므로 학습자는 문제를 해결하면서 개개인이 직접 이미 알고 있던 지식을 사용하여 새로운 지식을 만들어 내는 과정을 통하여 자신의 생각을 다양한 방법으로 적용하고 또 새로운 의미를 창출함으로써 그와 관련된 내용을 이해하게 된다는 것이다(von Glasersfeld, 1993).

다시 말하면 구성주의에 입각한 수학 수업의 방법은 어떤 개념을 습득함에 있어서 고정되고 활동력이 없는 인식이 아닌 가변적이고 유용한 인식의 발달을 강조한다. 학습은 사회 활동을 하는 가운데 일어나며 학습자들 간, 혹은 교사와 학생 사이에 생각이나 아이디어를 서로 교환함으로써 이해를 증진시킨다(남승인, 1998). 이때 교사는 학생 스스로가 의미 있는 학습 활동에 참여할 수 있도록 도와주어야 한다. 아울러 학습자는 능동적이고 무한한 잠재력과 가능성을 가지고 있다고 보며, 따라서 학습자 개개인의 생각과 아이디어를 학습 활동에 최대한 반영하여야 한다는 것이다. 이렇게 볼 때 중앙집권식 교육과정의 편성 · 운영을 탈피하고 현장 중심으로 전환함으로써 학습자들을 보다 창의적인 교육과정에 의해 가르칠 수 있게 된다고 본다(최승현 외, 2002).

〈표 Ⅵ-1〉 좋은 수업을 위한 교수-학습 관점의 변화

교수-학습 관점의 변화		
강의식 전체 수업, 교사의 지시 중심 수업	➔	경험적, 귀납적, 실제적인 학습
수업 시간 중 학습자의 수동성: 좌석에 앉아 있기, 정보를 듣고 암기하기	➔	수업 시간 중 학습자의 능동성: 모든 학생들이 학습에 직접 참여하기
학습지, 시험지, 연습지 등의 활동	➔	고등 사고력을 강조한 중심 개념과 원리 배우기
모든 교과 영역의 많은 학습량을 교사가 직접적으로, 간단히 다루기	➔	학습의 과정(계획, 정리, 관찰, 평가)에 대한 학습자의 책임하에 학습자 자신이 직접 연구 과제를 결정하기
어떤 사실이나 사항을 단순 암기하기	➔	학습자 개개인의 정의적인 요구나 다양한 인식 양식에 관심을 가지기

성적이나 학업 경쟁을 강조하기	➡	교실을 독립된 작은 사회로 만들기 위한 협동 또는 합작 활동
능력별 그룹을 만들거나 능력별 이름 붙이기	➡	다양한 능력의 학생들을 같은 그룹에 배치하여 활동하기
특별 프로그램을 대용하기	➡	교사, 학부모, 학교 직원들의 다양하고 협동적인 역할을 활용한 일반 학급에서의 특별 지도
표준화 검사를 사용하기	➡	교사들의 관찰로 얻어진 질적 형태의 기술적 평가 사용하기

02 수학과 좋은 수업의 조건

수학과 교과 특성을 반영한 '좋은 수업'이란 '좋은 수업'에 대한 범교과적 정의와 그 궤도를 함께하면서, 수학 수업과 관련하여 현장의 교사들이 제기하는 문제점들을 효과적, 현실적으로 해결해 나가고 있는 수업들이라는 가정하에, 현장의 수학과 수업 지도와 관련하여 제기되어 온 문제점을 감안한 수학과 좋은 수업 선정 기준은 다음과 같다(최승현 외, 2002).

가. 교육과정과의 일관성을 유지하면서 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업이어야 한다.

현장의 수학 교사는 수학과 목표와 본질에 부합되면서 학생들의 요구, 능력 및 흥미에 알맞게 교육과정을 재구성할 필요가 있다. 실제로 좋은 수업을 진행하는 교사는 장기적인 기대, 학습 목표, 계획, 학습 활동, 자료 및 평가의 모든 측면을 포함하여 교실 수준에서 실행된 교육과정을 계획, 실천 및 평가하여야 한다(NCTM, 1993). 그뿐만 아니라 수업 목표와 목표 달성을 위하여 모든 교육과정의 요소들을 결합한 일관성 있는 체제를 유지해야 한다.

교육과정과 학습 내용 사이의 일관성을 유지하는 것은 학생들로 하여금 유의미한 지식을 구성할 수 있도록 한다. 즉, 학생들이 학교 밖 생활에서도 쉽게 접근하여 활용할 수 있는 지식을 구성할 수 있도록 하여야 한다. 이때 교사는 (1) 수학과 교육과정과 일관성을 유지하면서 핵심적인 내용들을 심도 있게 학습할 수 있도록 학습 내용의 폭을 줄이고, (2) 학습 내용을 중요한 개념 중심으로 구조화하여 제시하며, (3) 주요 개념들과 그들 사이의 관련성을 쉽게 설명할 수 있도록 교육과정 내용을 재구성하고, (4) 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업의 결과를 반영하는 학습 활동과 평가 방법을 학생들에게 제공해야 할 것이다.

나. 수학 수업에서는 수학적 경험이 실생활에 활용되는 가치 있는 것임을 학생들이 인식하여 실생활의 수학적 상황에 전이될 수 있도록 해야 한다.

현장의 수학 수업에서의 문제점은 현실과 유리된 많은 양의 수학적 지식을 교과서나 틀에 박힌 수업 양식에 의존하여 가르친다는 것이다. 좋은 수학 수업을 위해서는 학생들 스스로 문제를 이해하고, 문제 해결의 과정에 관련된 다양한 전략들을 활용하여 실제적으로 문제를 해결하며, 그 과정을 반성해야 한다. 즉, 학생들이 설계한 문제 해결 활동이 이루어지는 기회를 제공하여야 한다. 학교에서 배운 수학이 학교 밖의 다른 실제 상황들에서 활용될 수 없다면, 수학을 학습할 필요성이 줄게 된다. 즉, 학교에서 배운 수학 지식은 실생활에 적용될 때 보다 유의미해진다. 따라서 좋은 수학 수업이란 학생들이 수업 시간에 배운 지식, 이해, 추론 및 문제 해결을 다른 학문 분야에는 물론 실생활 상황에도 적용할 수 있도록 가르치는 수업이다. 장래에 수학이나 과학과 관련된 직업에 종사하게 될 학생들뿐만 아니라 교양을 갖춘 시민이

되기 위하여 학교 수학 교육은 우리가 살아가고 있는 현실 세계에 대한 이해와 흥미를 길러 줄 수 있어야 한다(OECD, 2001).

학교에서는 도형의 넓이나 부피에 대하여 배우지만 실생활에서 어떻게 활용되는지, 어떤 경우에 필요한지를 파악하지 못한다면 이러한 내용들을 학습하는 의미가 반감된다. 그러므로 수학 교사들은 학교 수학을 대학 입시를 위한 과목으로만 중요하게 취급할 것이 아니라, 현실 세계를 살아갈 수 있는 수학적 소양을 갖춘 시민을 양성한다는 취지를 잊지 말고 가르쳐야 할 것이다. 이러한 맥락에서 수학 교사의 중요한 역할은 수학적 능력이 지역 공동체 속에서, 학생들의 일상생활 속에서, 나아가 보다 광범위한 사회적 당면 과제들 속에서 어떻게 적용되는가를 학생들이 파악할 기회를 제공하여야 한다(NCTM, 1989, 1991). 그러므로 학교에서 배운 것을 다른 상황으로 전이할 수 있는 학생의 능력 양성을 위해 교사는 다음과 같은 측면을 강조하여 수업하여야 한다.

- 적절한 수준의 내용을 이해하지 않고서는 실생활로의 학습 전이는 기대하기 어려우므로, 학습한 내용을 숙달하도록 한다.
- 학생들이 학습한 내용에 대하여 다른 상황으로 전이할 수 있음을 인식하도록 한다.
- 학습한 내용과 관련된 교과 내 다른 영역과 타 교과 영역에 적용하도록 한다.
- 학생들이 스스로 학습하고, 스스로 평가한 결과를 피드백할 수 있도록 돕는다.
- 단순 암기보다는 이해를 추구하는 수업을 진행한다.

다. 수학 수업은 현대의 수학 지식을 반영하는 내용과 첨단 기술의 발달을 반영한 기술과 도구의 학습이 요구되므로 컴퓨터, 멀티미디어 및 다른 기술 등과 통합되어야 한다.

수학이 생성되고 응용되는 방법이 현대화되면서 학생들이 배워야 하는 수학적 아이디어나 수학적 입장도 변화되고 있다. 예를 들어 학교 수학에서는 규칙이나 공식으로 설명될 수 있는 필연적인 사건을 주로 다루는 반면, 실생활의 현상에서는 임의의 모델인 경우가 대부분이다. 이러한 변화의 원동력은 컴퓨터의 보급이다. 컴퓨터의 도입으로 지금까지는 생각지 못했던 새로운 유형의 문제를 만들 수 있게 되었고, 수학의 내용과 방법도 많이 달라졌다. 예를 들어 연속적인 것에서 이산적인 것으로, 정확한 것에서 반올림한 값으로, 추상적인 것에서 구체적인 것으로, 이론적인 것에서 경험적인 것으로 변화되었다.

컴퓨터와 계산기는 수학적 아이디어와 응용을 탐구할 기회를 제공한다. 예컨대 저학년의 학생들도 계산기 자체를 수학적인 대상으로 생각하며 계산기의 기능과 규칙을 배울 수 있다. 고학년의 학생들은 그래픽 소프트웨어를 이용하여 함수의 그래프, 함수의 변환을 탐구할 수 있으며, 그 결과 함수 관계를 전보다 더 쉽게 이해할 수 있을 것이다(신동선 외, 1998). 이와 같이 공학적 기술 도구의 사용은 학습 환경을 풍부하게 만들 뿐만 아니라 학습의 질을 향상시킨다. 즉, 학생들은 이러한 기술이 없었다면 불가능했을 활동들을 경험하고 참여할 수 있게 된다. 인터넷이나 모의실험(simulation) 등의 기술들은 수학과 실생활을 연결시키고, 나아가 학습 환경을 보다 넓은 범위로 확산시킬 수 있는 능력을 가지게 한다.

라. 학생들의 선행 지식(기존 지식)을 고려한 수학 수업이어야 한다.

좋은 수학 수업은 새로운 지식을 선행 지식에 관련시킬 수 있는 수업이어야 한다. 그러나 학생들이 선행 지식을 지니고 있는 것만으로 바람직한 학습 결과를 가져오지는 않으며, 학생들이 선행 지식을 새로운 이해와 학습에 활용할 수 있도록 교사가 학습자의 선행 지식에 관심을 기울이고, 이러한 선행 지식을 수업의 출발점으로 활용할 때 비로소 학습이 촉진될 수 있다. 그러므로 수학과 좋은 수업을 위해서는 교사가 학생들이 이미 지니고 있는 선행 지식을 이끌어 내고, 직접적인 체험 활동이나 사고 활동을 통하여 새로운 개념을 도입하며, 나아가 학생들의 기존의 개념을 새로운 개념과 연결하여 통합적인 개념으로 수정해 나가야 한다(Driver 외, 1995).

이와 같이 학생들이 선행 지식을 활성화하여 수학과 학습에 활용할 수 있도록 수업을 할 때, 교사는 다음과 같은 측면을 고려해야 한다.

- 교사는 학생들이 가지고 있는 선행 지식이 무엇인가 정확히 파악하여야 한다.
- 교사는 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행 지식을 활성화하도록 수업 시작 시 수업의 내용에 대하여 논의한다.
- 때때로 학생들의 선행 지식이 불완전하거나 치명적인 오개념을 포함하고 있을 수도 있으므로, 교사는 학생들이 지니고 있는 불완전하거나 잘못된 개념을 상세히 조사할 필요가 있다.
- 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행 지식을 갖추지 못한 경우, 교사는 중요한 선수 학습 자료들을 미리 다루어 수업 진행에 차질이 없도록 해야 한다.
- 교사는 학생들이 선행 지식과 새로운 학습 내용을 연관지을 수 있도록 적절한 질문을 제공하여야 한다.
- 교사는 학생들이 선행 지식과 새로운 개념의 관계를 파악하고, 또 다른 형태의 통합적인 개념을 형성하도록 도와야 한다.
- 교사는 교수-학습에 관한 인지심리학의 이론에 초점을 맞추어 수업해야 한다.

마. 학습자 스스로 문제 해결 활동을 수행할 수 있도록 이끄는 수업이어야 한다.

좋은 수업이란 학생들로 하여금 주어진 수학 문제를 이해하고 그 풀이 과정을 추론하며 이를 이용하여 문제를 해결할 뿐만 아니라 교사나 다른 학생들에게 자신의 방법을 설명할 수 있도록 하는 일련의 학습 전략을 가르치는 수업이다. 보스니아도(Vosniadou, 2001)는 교사가 학생들에게 학습 전략들을 가르치기 위한 체계적인 노력을 할 때, 학생들이 실질적인 성과를 얻을 수 있다고 주장하였다. 이러한 학습 전략들은 학습 과정을 촉진하고 학습을 제고할 뿐더러 학생들이 주어진 상황에 적절한 방법으로 문제를 이해하며 이를 해결할 수 있도록 돕는다는 측면에서 중요하다. 그러므로 문제 해결에 있어서 보다 적용 범위가 넓을수록 성공적인 학습 전략이 된다.

여기서 중요한 것은, 교사는 학생들에게 단순히 수학적 지식의 전달과 수학을 하는 방법을 가르치는 것에만 국한할 것이 아니라 학생들에게 자신의 학습을 스스로 관리, 감독할 수 있는 메타인지 학습 전략을 가르쳐야 한다는 것이다. 구체적인 학습 기능과 내용도 중요하지만, 학습자가 스스로의 학습 과정을 감독하고, 학습이 일어나는 중에 자신의 마음에 어떤 변화가 일어나는지를 의식한다는 것은 보다 고차원의 학습을 위해 중요하다. 즉, 학생들은 주어진 학습 목표 달성을 위해 자신의 학습 진행 과정을 측정하고, 끊임없이 감독하고, 스스로 조절하며, 반성적으로 사고할 필요가 있다.

학습에서의 자기 조절(self-regulation)이란 학습자 자신이 스스로의 학습 과정을 평가하고 이해 수준을 점검하며, 필요시 실수를 수정할 수 있는 전략들을 개발하는 것을 포함한다. 교사는 다음과 같은 기회를 제공함으로써 학생들이 자기 조절적인 학습자가 되도록 도울 수 있다.

- 문제를 해결함에 있어서 학생 자신이 문제 해결 전략이나 방법을 계획하도록 한다.
- 사용 가능한 가장 효과적인 학습 전략들은 무엇이며, 이들을 어떻게 사용할 것인지를 알도록 가르친다.
- 학생 스스로 자신의 수학적 사고 과정을 점검하고, 이해 수준에 따라 문제가 요구하는 질문에 답할 수 있도록 한다.
- 주어진 진술문이나 주장, 문제에 대한 해결책 등에 대하여 평가하도록 한다.

바. 학생들의 동기 유발이 가능한 수학 수업이어야 한다.

일반적으로 학습에 대한 동기가 유발된 학습자는 설정한 목표를 달성하려는 열의가 있으며, 끈기와 의지를 가지고 학습 성취에 많은 노력을 기울이게 된다. 이는 수학 학습에 있어서도 마찬가지이다. 그러므로 학습자의 동기는 학습되는 양과 질에 영향을 미치게 되며, 수학 교사들은 동기 유발된 학습자를 원한다. 교사의 말과 행동은 학생들의 목표 달성 의지에 영향을 미치게 되며, 내적 동기가 유발된 학습자는 학습 성취를 위해 더 노력하게 된다. 교사가 학생들의 내적 동기 유발을 위해 취할 수 있는 행동들은 다음과 같다.

- 새롭고 흥미 있는 학습 과제를 제공함으로써 학생들이 호기심을 갖고 고차원의 사고 기술을 사용하도록 장려한다.
- 학생들의 성취를 외적인 요인이 아닌 내적인 요인들로 귀착시키고 스스로의 수학적 능력에 대하여 자신감을 가질 수 있도록 격려한다.
- 학생 각각의 수준에 실현 가능한 목표를 설정하도록 조언한다.
- 학생들의 수학적 성취를 인정하고, 그 결과에 대하여 정직하게 평가한다.
- 학생들의 성취 결과를 내적 동기를 유발할 수 있는 언어를 사용하여 피드백할 뿐만 아니라 학생들이 활용하는 학습 전략을 개선할 수 있도록 그 방법을 제공한다.

사. 지식 위주의 평가보다는 실제 상황에 기초한 평가 방법을 수반하는 수학 수업이어야 한다.

실제 상황에 기초한 평가 방법 중 하나인 수행 평가는 그 목적과 수행 과정, 그리고 평가 결과가 모두 일치하고 있다. 바람직한 평가는 수업에서 다룬 내용에 대하여 평가하고, 평가가 수업과 일관될 뿐만 아니라 의도한 학습 목표와 일치하며, 나아가 수업의 방식과도 일관성을 유지하는 평가이다. 예를 들어 고차원의 분석과 추론 기술을 활용한 수업에서 학습한 것을 선다형 객관식 문항으로 평가하는 것은 수업의 방법과 평가 사이에 일관성이 결여된 경우이다. 교육 개혁의 중요한 한 부분을 차지하고 있는 수행 평가는 실생활 과제와 상황에서 학생들의 수행 능력을 측정하고 반영하는 것이다.

좋은 수학 수업에는 수업에서 기대되는 학습의 본질, 사용된 학습 자료, 일관성을 유지한 다양한 평가 전략들이 포함된다. 수학과 좋은 수업에서의 평가는 학생들에게 기대되는 것과 결과에 대한 명확한 의사 전달이 요구된다. 이때 평가는 수업과 일관성 있게 통합되어 서로에게서 유용한 정보를 얻을 수 있도록 한다. 수업과 평가를 통합하기 위하여 교사들은 다음 사항들을 주목하여야 한다.

- 학생들에게 도전적이고, 학생들의 발달 단계상 적절한 학습 표준을 개발한다.
- 학생들 사이의 개인차를 적절하게 고려한다.
- 학생들의 수학에 대한 이해 발달을 도울 수 있는 수업 및 평가 전략을 선택한다.
- 상호 양립 가능한 수업 및 평가 전략을 선택한다.
- 다양한 방법과 도구를 활용하여, 학생들의 과학적 추론 기술과 과학 개념의 이해에 대하여 체계적으로 자료를 수집한다.
- 학생들이 그들의 지식, 이해 수준 및 기술을 다양한 방법으로 증명할 수 있는 기회를 제공한다.
- 다양한 수준에서 다양한 방법으로 이루어진 평가 결과들을 교수–학습의 개선을 위해 활용한다.

학교 현장에는 학생들의 수준을 고려한 학생 개인 수준에 맞는 학생 중심 교육과정이 구현되어 있는데, 교사뿐만 아니라 교장, 교감 차원에서도 이에 적합한 평가 방법을 생각해 보아야 한다. 모든 실제 상황에 기초한 평가의 시행 및 운영을 교사에게만 맡긴다는 것은 교사에게 지나친 부담이 될 수도 있다.

VII. 수학과 수업 평가

01 수학과 수업 전문성의 의미

학교 교육에서 교사의 역할이 중요해지고 교사의 책무성에 대한 기대가 높아지면서, 세계 여러 나라에서는 우수한 교사를 확보함과 동시에 현직 교사의 전문성 발달을 촉진하고자 각별한 노력을 기울이고 있다. 이러한 상황에서 학생들의 학습을 평가하기 위한 활동과 평가 방법을 고안하고 그 효과를 경험한 교사들은 이러한 수업 전문성 기준의 유용성을 알고 있으며, 교사의 수업 전문성 평가에도 학생 평가와 같은 원리가 적용된다. 수업 전문성 기준에 비추어 교사의 수업 전문성을 평가(즉, 수업 평가)를 하기 위한 방법들이 제시되고 있으며, 이러한 평가의 시도 자체가 교사들의 좋은 수업 실행을 위한 하나의 기준이 될 수 있다.

구체적인 수학과 수업 전문성 기준 개발의 방향은 다음과 같다(임찬빈 외, 2006).

첫째, 수학 교사의 수업 활동을 총망라하는 포괄적인 기준을 제시한다. 다시 말하면 수학과 수업 전문성 기준은 교사의 수학 수업 전-중-후 활동인 수업을 준비하기 위한 과정-실제 수업 실행-수업 후 반성과 평가 · 향후 개선 노력 등을 종합적으로 다룬다.

둘째, 수학과의 모든 내용 영역에 공통적으로 적용할 수 있는 종합적인 기준을 제시한다. 즉, 특정 영역이나 단원에 국한하는 기준보다는 각 영역에 고루 적용할 수 있는 대표적인 기준을 중심으로 제시한다.

셋째, 각 기준 간의 상호 연계를 고려하여 제시한다. 즉, 수업의 흐름을 고려하여 각각의 기준을 독립적인 영역과 요소로 제시하되, 이들 간의 관계가 상호 의존적으로 연계됨을 보여 준다. 수업이란 복합적이고 다면적일 뿐만 아니라 수업의 제 양상은 상호 의존적이다. 이러한 다층적 위계 속에서 수업 평가 기준의 대영역을 설정하고 다시 중영역과 하위 요소로 세분하여 제시한다.

넷째, 목적과 상황에 따라 유연하게 선택할 수 있는 종합적인 기준 목록을 제시한다. 즉, 수학과 수업 평가 기준은 모든 수업에 획일적이고 고정적으로 적용하는 것이 아니라, 목적과 상황에 따라 기준들을 선정, 조합하고 수학과 각 영역의 특성에 따라 그것들을 변용하여 달리 적용할 수 있음을 고려한다.

다섯째, 수업 전문성 기준은 하나의 개별 기준도 다양한 방식으로 접근하여 판단할 수 있음을 전제하여 제시한다. 교사의 전문성과 수업의 양상은 한 가지 측면에서 살피기보다는 다양한 각도에서 접근하고 판단할 필요가 있다. 예전에는 주로 수업 활동에 초점을 맞추어 수업 평가가 이루어졌기에 교실 수업 관찰이 가장 강력한 평가 도구였지만, 수업 전문성은 수업 전-후의 활동을 모두 포함하므로 교실 수업 관찰만으로 기준의 달성 정도를 가늠하기 어렵다. 따라서 특정 기준이 달성된 정도를 판단할 때에는 전문성 기준 영역과 요소별로 다양하게 제시하고, 나아가 각각의 기준도 다양한 방법으로 적용할 수 있음을 전제한다.

여섯째, 수업 전문성 기준은 수업을 위한 장 · 단기적인 계획이나 단원 단위로도 활용할 수 있도록 충분히 고려하여 제시한다. 수업 전문성 기준의 적용은 하나하나의 수업에 국한하지 않으며, 수업 전-중-후를 포괄하여 설정하여야 한다.

요약하면, 수업 전문성 기준은 좋은 수업 활동의 실제를 특징짓는 요소들이라고 규정지을 수 있다. 그러므로 수업 전문성 기준은 (1) 초보 교사를 위한 지침, (2) 숙련된 전문가 교사를 위한 지침, (3) 개선 노력을 집중할 부분을 파악하는 구조, (4) 교사 집단 이외의 다른 공동체들과의 의사소통의 수단으로 사용될 수 있다.

교사의 수업 활동에 대한 전문성 기준이 마련되었을 때, 관계 당사자들은 공유된 개념과 가치 속에서 개선을 위한 노력을 어디에 집중할 것인지에 대한 논의를 할 수 있게 된다. 아울러 수업 전문성 기준에 교직의 임무와 역량, 우수한 교수 활동의 수준을 명확하게 규정해 놓음으로써 타 분야의 사람들로부터 신뢰받을 수 있고, 교직의 위상을 높일 수 있게 된다. 교사들은 교수 활동을 기술하는 공통된 용어의 가치를 익히 알고 있다. 또한 수업 전문성 기준은 교사들에게 '우수성'에 대한 합의된 기준을 제공함으로써 모범적인 교수 활동에 대한 교사들의 대화를 조직하는 역할을 한다. 이러한 대화를 통하여 경력자뿐만 아니라 초보자의 수행 수준을 향상시킬 수 있을 것이다.

한편 수업 전문성 향상을 위한 평가, 즉 수업 평가 기준에서 규정하는 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 주요 내용 학습에 참여할 수 있도록 지원하는 것이다. 수학과 수업 평가 기준의 구성 요소들은 이러한 목적하에 조직되며, 중요한 내용을 학습할 때 교사는 학생들과 함께 학습자 공동체를 조성해 나아가야 할 것이다.

대니얼슨(Danielson, 1996)은 초임 교사와 경력 교사들이 함께 활용할 수 있도록 보완한 수업 평가 기준을 제시하면서 복합적인 교수 활동을 4개 영역(계획과 준비, 교실 환경, 수업, 전문적 책임)으로 구분하였다(임찬빈 외, 2004, 재인용). 이 수업 평가 기준은 교사의 전문성 발달 단계를 파악하여 각 영역에 알맞은 해당 요소들을 제시함으로써 교사로 하여금 전문성을 계발하고 자기 반성에 활용할 수 있도록 하였다.

수업 평가 기준을 개발 · 실행하는 과정에서 교사는 공동의 연구를 해야 할 뿐만 아니라 평가 기준 개발을 뒷받침하는 원리와 목적에 대한 이론적 근거도 확보하여야 한다. 무엇보다도 수업 평가 기준을 개발하고 설계함에 있어서 주요 이해 당사자들인 교사, 전문가 집단, 정부 기관 등의 참여와 논의가 요구되며, 그에 대한 활용을 전제로 개발하여야 한다. 이때 주의해야 할 것은 교사 자신이 수업 평가 기준을 지원하는 결정적인 역할을 하여야 활용이 가능하게 된다는 점이다.

또한 수업 평가 기준은 자기 평가나 동료 평가, 상호 평가 등으로 활용될 수 있도록 보다 상세하게 개발되어야 하며, 교사의 가르치는 활동에는 일정한 기준이 있다는 점도 제시하여야 한다. 대부분의 교사들은 전문적인 교수 활동의 필수 요소들을 이해하고 있음에도 불구하고, 지극히 관념적인 수준에서 표현하는 경우가 흔히 있는데, 이 점을 특히 주의해야 한다. 동료 교사들뿐만 아니라, 학생, 학부모 및 사회의 다른 구성원들이 교사에게 요구하는 지식과 역량을 명시하는 수업 평가 기준은 좋은 교수 활동을 파악하고 알리며 보상할 수 있는 수단이 되기도 한다.

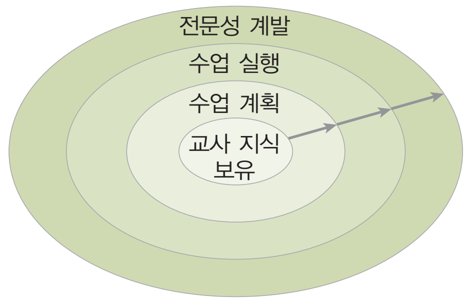
02 수학과 수업 영역 및 요소

가. 수업 평가 영역

수업 평가는 수업 전, 수업 중, 수업 후의 단계별로 진행할 수 있으며, 이러한 수업 단계는 '지식 보유', '수업 계획', '수업 실행', '수업 반성' 부문으로 구성되는데, 이는 교사가 좋은 수업을 하기 위해서는 다음과 같은 요건을 갖추어야 하기 때문이다.

- 교사가 알아야 할 것 ⇨ 지식 보유
- 교사가 준비해야 할 것 ⇨ 수업 계획
- 교사가 행해야 할 것 ⇨ 수업 실행
- 교사가 전문성 발달을 위해 해야 할 것 ⇨ 수업 반성

아는 것이 바로 수업의 실행으로 옮겨지는 것만은 아니지만, 일반적으로 교사가 계획을 세우고 준비하는 것은 수업에 영향을 주고, 이러한 모든 것은 실시한 수업에 대한 교사의 반성적 실천의 영향을 받게 된다. 이렇듯 [지식 보유] ⇨ [수업 계획] ⇨ [수업 실행] ⇨ [수업 반성]의 연계성이 있음을 나타내고 있다. [그림 Ⅶ-1] 참조



[그림 Ⅶ-1] 교사의 수업 단계

위의 [그림 Ⅶ-1]에서 알 수 있는 바와 같이, 교사의 '지식 보유'는 교사가 갖추고 있는 지식에 관한 이해 정도가 수업을 원만히 진행하는 데 충분하다고 생각하는가, '수업 계획'은 본인이 준비한 수업 계획 정도가 수업을 원만히 진행하는 데 충분하다고 생각하는가, '수업 실행'은 본인이 계획한 대로 수업을 충실히 실행하였다고 생각하는가, 그리고 '수업 반성'은 본인의 수업 실행 결과에 만족하는가 등을 반영하기 위한 것이다.

수업 평가를 위한 세부 영역 및 이에 관한 설명은 다음 〈표 Ⅶ-1〉과 같다.

〈표 Ⅶ-1〉 수업 평가 영역

수업 평가 영역		수업 평가 영역에 관한 설명	비고(수업 평가 요소)
교과 내용	• 교육과정 이해 및 재구성	교육과정 목표 및 내용에 관하여 정확히 이해하고, 이를 적절히 재구성하여 수업에 반영하는 것	수학과 교육과정 목표 및 내용에 부합하는 수업 진행하기
	• 수학 내용	소양이 되는 학교 수학 및 학문 수학에 관하여 충분히 이해하고, 이를 수업에 적절히 반영하는 것	학교(중등) 수학 및 학문 수학에 기초하여 내실 있는 수업 진행하기
	• 방법적 지식	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 충분히 이해하고, 이를 효과적으로 수업에 반영하는 것	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 적절히 반영하여 수업 진행하기
	• 수학적 가치	수학적 가치와 중요성을 충분히 인식하고, 이를 수업에 적절히 반영하는 것	수학적 가치와 중요성이 전달되도록 수업 진행하기
학습자 이해	• 학습자 수준	학습자의 인지 수준, 선행 지식, 학업 성취 수준 등을 파악하고 이를 적절히 수업 시간에 반영하는 것	학습자 수준에 부합하는 학습 내용 및 과제, 활동을 수행하기
	• 학습자 오개념	학습자의 오개념을 인지하고 이에 대처하는 것	학습자의 오개념을 파악하여 적절한 피드백 주기
	• 학습 동기	학습자의 관심 및 흥미도를 파악하고 이를 고취시키는 것	학습자 수준이 반영된 적절한 수업 활동을 통하여 학습 동기 및 흥미 유발하기
	• 수학적 태도	학습자의 자신감, 신념 등을 파악하고, 이를 증진시키는 것	학습자의 수학 학습에 대한 긍정적 태도 증진시키기
	• 학습 방법	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 파악하고, 이를 수업에 반영하는 것	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 반영하여 수업 진행하기
교수 학습 방법 및 평가	• 수업 목표 및 내용 반영	교육 목표 및 내용을 파악하고 이에 적합한 교수 학습 방법을 수행하는 것	수업 목표 및 내용에 적합한 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 문제 해결 활동 반영	수학적 문제 해결과 관련된 전반적인 활동을 인지하고 이를 적절히 반영하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	수학적 문제 해결 관련 활동을 적절히 활용하여 수업 진행하기
	• 학습자 수준 및 태도 반영	학습자의 인지 수준 및 정의적 특성을 인지하고, 이를 적절히 반영하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	학습자 수준 및 태도에 부합하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 질문 및 의사소통 활용	효과적 질문 및 의사소통에 관해 인지하고, 이를 적절히 활용하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	효과적 질문 및 의사소통을 수반하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 평가 방법 및 절차 마련	수업 목표, 학습자 수준, 평가 목적 등에 따른 평가 방법 및 절차를 계획하고 마련하는 것	평가 목적에 부합하는 평가 방법 및 절차 마련하기
	• 평가 도구 개발	학습 목표에 따른 평가 목표, 문항, 기준 선정 및 실행에 관하여 인지하고 이를 수행하는 것	평가 계획에 준하는 적절한 평가 도구 개발하기
	• 평가 결과 활용	수업 개선 및 학습 처치를 위한 피드백 계획 및 실행을 교사가 인지하고 수행하는 것	수업 개선 및 학습 처치에 유용하도록 평가 결과 활용하기
수업 상황	• 도구 및 교구, 자료 활용	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료 등을 파악하고, 이를 준비하여 수업에 활용하는 것	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료를 준비하여 활용하기
	• 교실 환경 및 수업 집단 조성	여러 도구 및 교구, 자료의 효율적인 활용성을 이해하고, 이에 맞춰 수업 환경 및 집단을 구성하는 것	공학적 도구, 교구, 자료 등의 효율적 활용을 위하여 적절한 수업 집단 및 교실 환경 조성하기
	• 학습 태도 및 수업 분위기 조성	교사가 해당 수업 내용에 관한 학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기를 인지하고, 이를 유도하는 것	학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기 유도하기
	• 학생 관리 및 수업 상황 대처	학습자의 어려움 또는 질문 등을 인지하고, 이를 효율적으로 대처하는 것	학습자의 어려움 및 질문 등을 합리적으로 처리하기

나. 수업 평가 요소

수업 평가 영역에 따른 수업 평가 요소는 다음 〈표 Ⅶ-2〉와 같이 평정척도법을 이용하여 평정척도를 3단계 정도로 두는 것이 적당하며, 경우에 따라서는 5단계로 좀 더 세분화하여 사용하도록 한다.

수업 평가 요소를 수업 전(지식 보유 및 수업 계획), 수업 중(수업 실행), 수업 후(수업 반성)의 상황으로 세분화하여 제시하면 다음과 같다.

〈표 Ⅶ-2〉 수학 수업 평가 요소

수업 평가 영역		수업 평가 요소		평정척도		
				그렇다	보통이다	그렇지 못하다
교과 내용	1. 교육과정 이해 및 재구성	수학과 교육과정 목표 및 내용에 부합하는 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 수학 내용	학교(중등) 수학 및 학문 수학에 기초하여 내실 있는 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 방법적 지식	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 적절히 반영하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 수학적 가치	수학적 가치와 중요성이 전달되도록 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
학습자 이해	1. 학습자 수준	학습자 수준에 부합하는 학습 내용 및 과제, 활동을 수행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 학습자 오개념	학습자의 오개념을 파악하여 적절한 피드백 주기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습 동기	적절한 수업 활동을 통하여 학습 동기 및 흥미 유발하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 수학적 태도	학습자의 수학 학습에 대한 긍정적 태도 증진시키기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	5. 학습 방법	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 반영하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			

교수 학습 방법 및 평가	1. 수업 목표 및 내용 반영	수업 목표 및 내용에 적합한 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 문제 해결 활동 반영	수학적 문제 해결 관련 활동을 적절히 활용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습자 수준 및 태도 반영	학습자 수준 및 태도에 부합하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 질문 및 의사소통 활용	효과적 질문 및 의사소통을 수반하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	5. 평가 방법 및 절차 마련	평가 목적에 부합하는 평가 방법 및 절차 마련하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	6. 평가 도구 개발	평가 계획에 준하는 적절한 평가 도구 개발하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	7. 평가 결과 활용	수업 개선 및 학습 처치에 유용하도록 평가 결과 활용하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
수업 상황	1. 도구 및 교구, 자료 활용	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료를 준비하여 활용하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 교실 환경 및 수업 집단 조성	공학적 도구, 교구, 자료 등의 효율적 활용을 위하여 적절한 수업 집단 및 교실 환경 조성하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습 태도 및 수업 분위기 조성	학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기 유도하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 학생 관리 및 수업 상황 대처	학습자의 어려움 및 질문 등을 합리적으로 처리하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			

따라서 이 수업 평가 틀은 교사가 자신의 수업 계획 및 진행, 그리고 반성을 통해 수업 개선은 물론, 더 나아가 교사 지식의 확장을 이끌 수 있도록 하는 데 도움을 줄 것이다. 이때 가급적 수업 후 즉각적으로 평가를 실시함으로써 자신의 수업 반성을 통하여 보다 수월하게 수업 개선이 이뤄질 수 있도록 한다. 또 학교 환경 및 수업 상황에 따라 동료 교사들과의 협력, 연구, 논의 등을 통하여 지속적으로 수업 개선을 도모하는 의지와 노력을 갖추도록 한다.

결론적으로 수업 평가 요소는 기본적으로 교사들이 어떤 지식을 보유하고, 그 지식을 토대로 수업을 계획하고 그 계획에 따라 수업을 실행하며, 더 나아가 반성 및 개선 여부에 활용되어야 한다. 만약 한 교사가 교과 내용, 학습자 이해, 교수 학습 방법 및 평가, 수업 상황 등에 관한 지식을 보유한다면, 수업 계획이나 수업 실행에서 교사의 보유된 지식이 고루 반영되어 드러나야 하며, 수업 반성의 측면도 마찬가지이다. 하지만 어떤 교사에 대해 지식 보유, 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성 부문을 동시에 판단하기는 무리이다. 일반적으로 지식 보유, 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성의 네 부문 중에서 가장 진단하기에 용이하고 필요한 부문은 수업 실행 부문일 것이며, 또한 간편한 수업 평가를 위해서는 수업 실행 부문에 초점을 두어 교사 스스로 자기 평가를 수행하는 것이 좋다.

한마디로 교사가 자신이 수학 및 수학 교육 관련 지식을 어느 정도 보유하고 있는가에 초점을 두어 진단하고자 할 때에는 이 부문만을 스스로 점검하도록 한다. 마찬가지로 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성 측면에 초점을 두어 진단하고자 할 때에는 해당 부문만을 선택하여 점검하도록 한다. 여기서 수업 계획과 수업 반성 측면의 평가 요소는 교사 자신의 교사 지식 및 전문성 향상을 위한 ‘자기 평가’ 용으로 활용 가능하다. 한편 수업 실행 측면의 평가 요소는 교사 자신은 물론 동료 교사의 판단에 따라 진단 및 평가가 가능하다. 이때 평가 요소의 활용 단위(즉, 얼마만큼 수업을 진행한 후 평가를 할 것인가)는 교사의 수업 여건이나 상황에 따라 결정하도록 한다.

Ⅷ. 교과서의 구성

01 편찬 방향

이 교과서는 새로 개정된 교육과정에 따라 학생들이 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 현상을 수학적으로 생각하고, 주어진 문제를 창의적이고 합리적으로 해결하는 능력을 기를 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 사항에 중점을 두고 엮었다.

첫째, 수학적 개념과 원리를 이해하고 기초 계산을 숙달하게 할 뿐만 아니라 문제 해결력을 기를 수 있도록 하였다.

둘째, 탐구 활동을 통하여 스스로 수학을 체험하게 하여 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 이해하도록 하였다.

셋째, 자신의 생각을 표현하고 토론하며, 다양한 방법으로 수학적 내용을 다른 사람에게 설명할 수 있는 의사소통 능력을 기를 수 있도록 하였다.

넷째, 흥미와 더불어 수학의 아름다움을 발견하고 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 하였다.

02 구성과 특징

■ 대단원 도입

단원과 관련된 사진을 제시하고, 사회 현상이나 자연 현상에서 관찰할 수 있거나 적용할 수 있는 이 단원의 수학 내용을 소개함으로써 단원 학습의 의미와 흥미를 불어넣어 주도록 하였다.

■ 준비 학습

각 대단원을 공부하는 데 꼭 필요한 선수 학습 요소와 이에 대한 문제를 제시함으로써 학습에 필요한 선행 지식을 상기하고 학습의 위계를 알 수 있도록 하였다.

■ 중단원 도입

실생활과 관련된 내용을 스토리텔링 형식으로 소개하고 수학적 사고를 유발하는 물음을 제시하여 학습 동기를 유발하도록 하였다.

■ 생각 열기

새로운 내용의 학습을 시작하면서 다른 교과나 실생활과 관련된 내용을 소개하여 학생들에게 학습에 대한 흥미를 불러일으키고 내용 전개의 실마리를 제공하였다. 또한 이를 통하여 수학의 가치와 유용성도 느끼고 창의적인 생각을 키울 수 있도록 스토리텔링 형식을 빌렸다.

■ 탐구 활동

창의력 기르기와 관련된 물음이나 수학적 사고를 유발할 수 있는 물음과 활동을 통하여 새로 도입할 수학의 원리나 개념을 탐구할 수 있도록 하였다.

■ 예제

학습 내용과 관련된 대표적인 문제와 그 풀이 과정을 함께 제시함으로써 학생들의 개념 이해를 더욱 탄탄히 하고 유사 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

■ 문제, 발전 문제, 실생활 문제

학습한 내용을 확인하는 기본 문제를 제시함으로써 학생들이 공부한 내용을 바르게 이해하였는지 스스로 점검할 수 있도록 하였다.

■ 창의 UP

생활 주변에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 원리와 법칙을 탐구하고, 수학의 개념을 깊이 생각해 보고 표현할 수 있게 하여 창의적인 생각을 기를 수 있도록 하였다.

■ 사고력 기르기(문제 해결, 추론, 의사소통)

여러 가지 문제를 창의적으로 해결하는 능력을 기르기 위해 생활 주변의 문제 상황을 탐색하고 해결하는 문제를 제시하였다. 또 수학적 사실을 분석하고 정당화하는 문제를 통하여 수학적으로 사고하고 추론하는 능력을 향상시킬 수 있도록 하였다. 더불어 수학적 개념을 말로 표현하고 토론해 보게 함으로써 다른 사람과 효율적으로 의사소통하는 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 단원 과제

중단원 도입과 관련된 구체적 문제를 통해 생활에 적용되는 수학을 직접 느낄 수 있도록 하였다.

■ 중단원 기초, 기본, 실력

중단원에서 학습한 내용에 대한 문제를 세 가지 수준으로 나누어 제시하였다. 기초에서는 중단원 학습 내용 중 최소 필수 내용을 확인하는 문제를 제공, 기본에서는 중단원 학습 내용 중 기본 개념을 확인하는 문제를 제공, 실력에서는 중단원 학습 내용을 완벽히 이해한 학생들의 수월성 교육에 이용하여 수준별 학습에 도움이 될 수 있도록 하였다.

■ 수행 과제

대단원에서 학습한 내용 중 탐구 소재를 선정하여 실험 또는 분석을 하거나 조사나 관찰을 하여 그 결과를 조직하고 표현함으로써 종합적인 문제 해결 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 대단원 학습 내용 정리

대단원 학습을 마친 후 이 단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하고, 새로 배운 용어와 기호를 제시함으로써 학습 내용을 스스로 점검하고 보완할 수 있도록 하였다.

■ 대단원 평가 문제

대단원 학습을 종합적으로 평가하기 위하여 다양한 유형의 평가 문항들을 제시하였다. 또 마지막 두 문제는 서술형으로 제시하여 수학적 표현 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 공학적 도구(컴퓨터, 계산기)의 활용

단원의 내용 중에서 공학적 도구를 의미 있게 활용할 수 있는 학습 주제를 선정하여 인터넷, 컴퓨터, 계산기 등을 활용하는 방법을 제시함으로써 학습자의 흥미를 높이고, 효과적인 수업이 될 수 있도록 하였다.

■ 수학 플러스

단원의 끝에 이 단원의 수학 원리와 관련된 과학, 기술, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 이야기 등을 소개함으로써 수학에 흥미를 불러일으키고, 단원의 학습에 대한 폭넓은 이해와 확장이 가능하도록 하였다.

IX. 연간 지도 계획안

단원	중단원	차시	교과서 쪽수	지도 내용
Ⅰ. 집합과 명제	1. 집합	1～11	10～35	01 집합의 뜻과 표현 02 집합 사이의 포함 관계 03 집합의 연산 수준별 학습
	2. 명제	12～23	36～61	01 명제와 증명 02 조건과 진리집합 03 명제의 역과 대우 04 필요조건과 충분조건 05 절대부등식 수준별 학습
	단원 마무리	24～25	62～67	
Ⅱ. 함수	1. 함수	26～35	68～91	01 대응과 함수 02 합성함수와 역함수 수준별 학습
	2. 유리함수와 무리함수	36～44	92～111	01 유리함수 02 무리함수 수준별 학습
	단원 마무리	45～46	112～119	
Ⅲ. 수열	1. 등차수열과 등비수열	47～55	120～141	01 수열의 뜻 02 등차수열 03 등비수열 수준별 학습
	2. 수열의 합	56～62	142～153	01 $\sum$의 뜻과 성질 02 여러 가지 수열의 합 수준별 학습
	3. 수학적 귀납법	63～67	154～163	01 수열의 귀납적 정의 02 수학적 귀납법 수준별 학습
	단원 마무리	68～69	164～169	
Ⅳ. 지수와 로그	1. 지수	70～76	170～187	01 거듭제곱과 거듭제곱근 02 지수의 확장과 지수법칙 수준별 학습
	2. 로그	77～83	188～201	01 로그의 뜻과 성질 02 상용로그 수준별 학습
	단원 마무리	84～85	202～207	

※ 위 계획안은 학교의 실정이나 학생들의 학습 속도 등에 따라 적절히 조정하여 운영할 수 있다.

X. 참고 문헌

- 강완, 백석윤(1998). 초등수학 교육론. 동명사.
- 교육과학기술부(2007). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2007-79호 별책 8).
- 교육과학기술부(2009). 2009 개정 교육과정 총론. 교육과학기술부 고시 제2009-41호.
- 교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2011-361호 별책 8).
- 신이섭 외(2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구. 한국과학창의재단 정책연구 2011-11.
- 이홍우(1999). 지식의 구조와 교과. 서울: 교육과학사.
- 임찬빈, 이화진, 곽영순, 강대현, 박영석(2004). 수업 평가 기준 개발 연구(Ⅰ): 일반 기준 및 교과(사회, 과학, 영어) 기준 개발. 한국교육과정평가원 연구 보고서 RRI 2004-5.
- 임찬빈, 이화진, 최승현, 오은순, 이경언, 이수정, 노은희, 권순달(2006). 수업 평가 기준 개발 연구(Ⅲ): 일반 기준 및 교과(국어, 수학, 기술·가정, 음악, 초등) 기준 상세화. 한국교육과정평가원 연구 보고서 RRI 2006-3.
- 조지민, 김명화, 최인봉, 송미영, 김수진(2007). 2006년 국가수준 학업성취도 평가 연구: 수학. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRE 2007-3-4.
- 박선화, 김명화, 주미경(2010). 수학에 대한 정의적 특성 향상 방안 연구. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRI 2010-9.
- 박순경(2010). 2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정의 개선 방향 탐색. 2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정 개선 방향 23-72. 국가교육과학기술자문위원회 교육과정위원회.
- 최승현(2002). 수학과 교육 내실화 방안 연구-좋은 수업 사례에 대한 질적 접근-. 한국교육과정평가원.
- 최승현, 황혜정(2007). 수학 수업 평가 기준 개발에 관한 기초 연구, 학교 수학, 9(3), pp.327~352.
- 황혜정, 김홍원, 박경미, 김수환, 김신영, 채선희(1997). 창의력 신장을 돕는 중학교 수학과 학습 평가 방법 연구. 한국교육개발원 연구 보고 CR 97-10-1.
- 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽(2012). 수학교육학신론(2012 증보판). 문음사.
- 황혜정(2012). 수학 수업에서 요구되는 교사 지식에 대한 평가 기준 재탐색. 한국학교수학교육학회 시리즈 E 수학교육논문집, 26(1), pp.29~55.
- Charles, L., Lester, F., & O'Daffer, P.(1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc..
- Danielson Charlotte(1997). *A collection of Performance Tasks and Rubrics*: Middle School Mathematics. Larchmont, NY: Eye O Education, Inc..
- Driver, R., Asoko, H., Leach, J. Mortimer, E. & Scott, P.(1994). *Constructing scientific knowledge in the classroom*. Educational Researcher, 23, (7), 5-12.
- Greeno, J. G.(1978). *Nature of Problem Solving Abilities*, In W. K. Estes(Ed.). *Handbook of learning and cognitive process: Human Information Processing*(pp.239~270). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Krulick, S. & Rudnick, J. A.(1984). *A Sourcebook for Teaching Problem Solving*. Boston: Allyn and Bacon.
- National Council of Teachers of Mathematics(1989). *The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Mathematics Assessment*, In J. K. Stenmark(Ed.). Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*, In Frank Swetz and J. S. Hartzler(Eds.). Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Niss, M.(1989). *Aims and Scope of Applications and Modeling in Mathematics Curricula*, In W. Blum et. al.(Eds.), *Application and Modeling in Learning and Teaching Mathematics*(pp. 22~31). West Sussex: Ells Horwood Limited.
- Pólya, G.(1957), *How to Solve it*. 2nd ed., New York: Doubleday & Company, Inc..
- Vosniadou, S.(2001). *How children learn. Educational Practices series*. Monograph No. 7. International Bureau of Education(IBE).

기왕이면

‘미안해’라는 말보다

‘고마워’란 말이 더 좋아.

‘미안해’라고 하면 어쩐지 내가 뭘 잘못한 것 같지만

‘고마워’라고 하면 내가 뭔가 좋은 일을 한 것 같잖아.

– 미도리카와 세이지의 《맑은 날엔 도서관에 가자》 중에서 –

차례

각론

이 세상의 모든 동물은 각각의 개성이 달라도

같은 특성을 가진 것끼리 분류할 수 있다.

집합과 명제

준비학습

초등 분류하기

1 다음은 병훈이네 반 학생들이 태어난 달을 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여라.

태수 10월	병훈 6월	희수 1월	영준 3월	창석 8월	태희 4월	미선 12월
해경 2월	형숙 7월	진철 10월	동준 1월	은영 11월	종문 2월	경환 1월
승호 7월	병진 1월	지영 6월	미라 7월	진희 3월	영빈 6월	명식 12월

(1) 1월에 태어난 사람을 모두 말하여라. 희수, 동준, 경환, 병진

(2) 태어난 학생이 한 명도 없는 달을 모두 말하여라. 5월, 9월

수학 I 방정식과 부등식

2 다음 방정식과 부등식을 풀어라.

(1) $x^2-9=0$ $x=3$ 또는 $x=-3$

(2) $x^2-3x-4=0$ $x=4$ 또는 $x=-1$

(3) $x^2-4\geq0$ $x\leq-2$ 또는 $x\geq2$

(4) $x^2+2x-8<0$ $-4<x<2$

중 ③ 실수의 대소 관계

3 다음 두 실수의 대소를 비교하여라.

(1) $\sqrt{3}+1,\ 2$ $\sqrt{3}+1>2$

(2) $\sqrt{3}+2,\ \sqrt{6}+\sqrt{3}$ $\sqrt{3}+2<\sqrt{6}+\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{2}+1,\ 4-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}+1<4-\sqrt{2}$

(4) $4-\sqrt{5},\ \sqrt{5}-1$ $4-\sqrt{5}>\sqrt{5}-1$

단원의 지도 목표

1. 집합

① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있게 한다.
② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해하게 한다.
③ 집합의 연산을 할 수 있게 한다.

2. 명제

① 명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해하게 한다.
② 명제의 역과 대우를 이해하게 한다.
③ 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해하게 한다.
④ 필요조건과 충분조건을 이해하게 한다.
⑤ 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 집합의 연산법칙은 벤 다이어그램으로 확인하는 정도로 간단히 다룬다.
② 명제와 조건의 뜻은 수학적인 문장을 이해하는 수준에서 간단히 다룬다.
③ 명제의 증명은 간단한 것만 다룬다.
④ 대우를 이용한 증명법과 귀류법은 구체적인 예를 통해 이해하게 한다.
⑤ 원소나열법, 조건제시법, 유한집합, 무한집합, 서로 같다 용어는 교수 · 학습 상황에서 다루어질 수 있다.

교수 · 학습의 계열

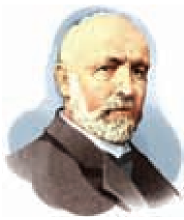
선수 학습	본 단원	후속 학습
[중1~3학년군] 다각형 삼각형의 성질	1. 집합 집합의 뜻과 표현 집합 사이의 포함 관계 집합의 연산 2. 명제 명제와 증명 조건과 진리집합 명제의 역과 대우 필요조건과 충분조건 절대부등식	[수학Ⅱ] 수학적 귀납법

단원의 차시별 지도 계획

<table>
<tr><th>중단원</th><th>소단원</th><th>차시</th><th>교과서(쪽)</th><th>지도 내용</th><th>용어와 기호</th></tr>
<tr><td colspan="2">단원의 개관</td><td rowspan="3">1~3</td><td>10~11</td><td>• 단원의 개관
• 준비 학습</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">1. 집합</td><td>중단원 도입</td><td>12</td><td>• 실생활에서 집합의 활용</td><td></td></tr>
<tr><td>01 집합의 뜻과 표현</td><td>13~17</td><td>• 집합의 뜻
• 집합의 표현
• 집합의 종류</td><td>집합, 원소, 벤 다이어그램, 공집합, $a\in A$, $b\notin B$, $\varnothing$, $n(A)$</td></tr>
<tr><td>02 집합 사이의 포함 관계</td><td>4~5</td><td>18~21</td><td>• 부분집합
• 두 집합이 같을 조건</td><td>부분집합, 진부분집합, $A\subset B$, $A\not\subset B$, $A=B$, $A\neq B$</td></tr>
<tr><td>03 집합의 연산</td><td>6~10</td><td>22~32</td><td>• 합집합과 교집합
• 여집합
• 차집합
• 집합의 연산법칙
• 드모르간의 법칙</td><td>합집합, 교집합, (집합의) 서로소, 전체집합, 여집합, 차집합, (집합의) 교환법칙, (집합의) 결합법칙, (집합의) 분배법칙, 드모르간의 법칙, $A\cup B$, $A\cap B$, U, A^C, $A-B$</td></tr>
<tr><td>수준별 학습</td><td>11</td><td>33~35</td><td>• 중단원 확인 학습 문제</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="7">2. 명제</td><td>중단원 도입</td><td rowspan="2">12~14</td><td>36</td><td>• 소크라테스와 추론</td><td></td></tr>
<tr><td>01 명제와 증명</td><td>37~41</td><td>• 명제의 뜻
• 정의, 증명, 정리</td><td>명제, 가정, 결론, 정의, 증명, 정리, $p\longrightarrow q$</td></tr>
<tr><td>02 조건과 진리집합</td><td>15~17</td><td>42~48</td><td>• 명제와 조건의 부정
• 진리집합
• '모든'과 '어떤'을 포함하는 명제</td><td>조건, 부정, 진리집합, $\sim p$</td></tr>
<tr><td>03 명제의 역과 대우</td><td>18~20</td><td>49~53</td><td>• 명제의 역과 대우
• 명제와 그 대우 사이의 관계
• 귀류법</td><td>역, 대우, 귀류법</td></tr>
<tr><td>04 필요조건과 충분조건</td><td>21</td><td>54~55</td><td>• 충분조건, 필요조건</td><td>충분조건, 필요조건, 필요충분조건, $p\Longrightarrow q$, $p\Longleftrightarrow q$</td></tr>
<tr><td>05 절대부등식</td><td>22</td><td>56~58</td><td>• 절대부등식의 증명</td><td>절대부등식</td></tr>
<tr><td>수준별 학습</td><td>23</td><td>59~61</td><td>• 중단원 확인 학습 문제</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">단원 마무리</td><td>24~25</td><td>62~67</td><td>• 수행 과제
• 대단원 학습 내용 정리
• 대단원 평가 문제
• 수학 플러스</td><td></td></tr>
</table>

단원의 이론적 배경

1. 집합



칸토어

집합론의 출현은 수학을 근대 수학과 현대 수학으로 나누는 분기점이다. 집합론의 창시자로 알려진 칸토어(Cantor, G. ; 1845~1918)는 1879년부터 연구하기 시작한 집합의 이론을 완성하여 1895년과 1897년에 논문을 발표하였다. 그는 여기에서 집합을 '확정적이고 명확히 구별되는 직관이나 사고의 대상의 모임을 하나의 전체로 한 것'으로 정의하였다.

집합론을 체계화하기 이전의 칸토어는 1870년에 삼각급수의 수렴에 관하여 오늘날 '칸토어-르베그(Cantor-Lebesgue)의 정리'로 알려진 결과를 유도하였고, 1872년 함수가 삼각급수로 일의적으로 표현된다는 것을 밝혔다. 그해에 유리수의 수열의 극한을 이용하여 무리수의 정의를 내리고, 독자적인 실수론을 구축하였다.

1873년에는 유리수와 대수적 수의 집합은 무한집합이지만 가산집합인 것을 밝히고, 나아가 초월수의 집합은 비가산집합임을 집합론적으로 증명하였다. 이것은 수학에 있어서 혁명적인 일이었다.

모든 개념은 유한 구성적이어야만 한다는 입장을 택한 크로네커(Kronecker, L. ; 1823~1891)의 반론에 부딪쳐 칸토어의 논문은 크렐레(Crelle)지에 실리지 못하였다. 그러나 이 논문은 1874년에 데데킨트(Dedekind, J. W. R. ; 1831~1916)의 도움으로 널리 알려질 수 있었다. 1878년에 집합의 농도 개념을 도입하였고, 5년에 걸쳐 집합론을 체계화하였으며 1883년에 유명한 칸토어 집합과 연속체 가설에 관한 논문을 발표하였다.

무한집합 사이의 기수는 모두 같을 것이라는 직관과는 반대로 기수가 같지 않은 경우가 발견되었다. 칸토어는 유명한 대각선 논법이라는 증명법으로 자연수 전체의 집합은 선분 위의 점의 집합과 대응하지 않는다는 것을 증명하였다.

두 집합 A와 B 사이에 일대일 대응이 있으면 A와 B는 같은 농도(Cardinality)를 가진다고 할 때, 자연수의 집합과 같은 농도를 가지는 집합 또는 유한집합을 가산집합(Countable set), 가산이 아닌 집합을 비가산집합(Uncountable set)이라고 한다. 칸토어에 의하여 두 기호 $\aleph_0$($\aleph_0$은 히브리 어 자모의 첫 번째 글자로서 알레프 영(aleph-null)이라고 읽는다.)과 c는 각각 자연수의 기수와 실수의 집합을 뜻하는 연속체의 기수를 나타내는 데 사용되어 왔다.

칸토어는 집합 A와 그 멱집합 2^A은 대등하지 않다는 것을 증명하였다. 따라서 차례로 멱집합을 만들어 가면, 차례로 커지는 무한집합을 한없이 만들 수 있다. 특히 $2^{\aleph_0}=c$이다. 여기서 칸토어는 $\aleph_0$과 c 사이의 기수를 가진 무한집합이 존재하겠는가라는 문제를 제기하였다. 그리고 그는 이와 같은 집합은 존재하지 않을 것이라고 추측하였다. 이와 같은 추측을 '연속체 가설(Continuum hypothesis)'이라고 한다.

이후에 1939년 발표된 괴델(Gödel, K. ; 1906~1978)의 연구와 1963년 발표된 코엔의 연구에 의하여 연속체 가설은 일반적인 집합론에서는 증명할 수 있거나 반증할 수 있는 것이 아닌 공리와 같은 것으로 밝혀졌다.

사실 칸토어는 처음 집합을 정의한 후 얼마 지나지 않아서 임의의 초한수(transfinite number)에는 그보다 더 큰 초한수가 항상 존재한다는 것을 보임으로써 집합 정의 자체의 문제점을 발견하였다. 그 후 러셀(Russell, B. A. W. ; 1871~1970)이 프레게(Frege, G. ; 1848~1925)에게 보낸 편지에서 '자기 자신에게 속하지 않는 집합 전체를 원소로 하는 집합을 X라고 할 때, X가 X에 속하면 X는 X에 속하지 않고, X가 X에 속하지 않으면 X는 X에 속하게 된다.'고 하는

논리적 모순을 지적하였다. 이것을 '러셀의 역설'이라고 하는데, 이 문제를 해결해야 집합을 확고하게 정립할 수 있었다. 그러나 많은 수학자들의 노력에도 불구하고 완벽하게 집합을 정의할 수가 없어서 오늘날 집합은 무정의 용어로 간주한다.

이러한 역설에도 불구하고 집합이 현대 수학의 강력한 도구로 중요한 이유는 관심의 대상을 명확하고 간결하게 나타내어 복잡한 이론이나 추론을 용이하게 해 주고 집합의 용어를 사용하여 수학의 여러 개념을 명확하게 나타낼 수 있기 때문이다.

2. 수리논리

수학적 이론은 공준과 논리라는 두 인자의 상호 작용에 의하여 세워진다. 공준집합은 이론이 시작되는 기초를 구성하고 논리는 그러한 기초로부터 정리를 만들어 규칙을 구성한다. 이 두 인자는 매우 중요하여 주의 깊게 고찰되고 연구되어 왔다. 특히 첫 번째 인자의 연구는 공리론이라는 주제를 형성하였다.

고대 그리스 인들은 형식 논리를 상당히 발달시켰고 아리스토텔레스(Aristoteles ; B.C. 384～B.C. 322)는 자료를 체계화하였는데, 이 초기의 연구는 모두 일상적인 언어를 사용하여 수행하였다. 그러나 오늘날의 수학자들은 논리의 현대적인 고찰을 고대에서와 같은 방법으로 수행하는 것은 거의 절망적이라는 사실을 알게 되었고 그 주제를 정확히 과학적으로 다루기 위해서는 기호 언어가 필요하게 되었다. 그렇게 기호학이 존재하게 됨으로써 이 논법은 기호 논리(symbolic logic) 또는 수리 논리(mathematical logic)로 알려졌다.

라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646～1716)는 처음으로 기호 논리의 필요성을 심각하게 고려하였다. 그는 초기 논문 중 1666년 출간된 'De arte combinatoria'라는 소론에서 경제적인 기호학으로 표현된 과학 언어의 가능성에 관한 믿음을 보여 주었다. 라이프니츠는 1679년에서 1690년 사이에 다시 이 착상에 몰두하여 기호 논리를 창조하는 데 상당한 진척을 이루었으며, 현대의 연구에서 매우 중요한 개념들을 만들어 냈다.

기호 논리학에 대한 관심은 1847년 불(Boole, G. ; 1815～1864)이 '연역적 추론법에 관한 소론인 논리의 수학적 해석'이란 제목의 소책자를 발간하면서 다시 새롭게 일어났다. 불은 1854년에 기호 논리학에 관한 생각을 설명한 유명한 논문 '논리와 확률의 수학적 이론의 기초가 되는 사고 법칙에 관한 연구'를 발표하였다.


불

불의 개념은 1890～1895년 사이에 발표된 슈뢰더(Schröder, E. ; 1841～1902)의 방대한 논문 '논리 대수에 관한 강의'에서 완성되었다. 사실 현대의 논리학자들은 불 식의 기호 논리를 '불–슈뢰더 대수(Boole–Schröder algebra)'라는 용어로 특성화시키는 경향이 있다. 불 대수에 관한 중요한 논문이 여전히 이용되고 있으며, 그에 관한 많은 논문이 오늘날의 연구 잡지에 실리고 있다.

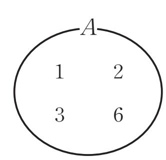
드모르간(De Morgan, A. ; 1806～1871)은 불과 동시대인이었으며 1847년에 발간된 형식 논리에 관한 논문 '추론법, 필연과 개연'은 어느 면에서 불을 상당히 능가했다. 후에 드모르간 역시 관계들의 논리에 관한 폭넓은 연구를 하였다.

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

대단원		Ⅰ. 집합과 명제	쪽수	교과서 10~14쪽
소단원		1. 집합 1-1 집합의 뜻과 표현	차시	1/25
학습 목표		집합과 원소의 개념을 이해할 수 있다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 중단원 도입 글을 읽고, 단원 과제를 발문하여 이번 단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다. ◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 집합과 원소의 개념을 이해할 수 있다.		
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◎ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 해결하도록 한다. ◎ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◎ 학습 내용 설명 • **집합** 주어진 조건에 의하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임 • **원소** 집합을 이루는 대상 하나하나 예 집합: '10보다 작은 홀수의 모임' 원소: 1, 3, 5, 7, 9 ◎ 문제 1번을 풀게 한다. • 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 집합과 원소 사이의 관계를 이해하고, 집합의 표현 방법에 대하여 알아본다.		

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

대단원	I. 집합과 명제	쪽수	교과서 14~16쪽
소단원	1. 집합 1-1 집합의 뜻과 표현	차시	2/25
학습 목표	**집합과 원소 사이의 관계를 이해하고, 집합의 표현 방법을 알 수 있다.**		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이전 차시에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 학습 동기 유발을 위한 발문을 한다. 예 집합과 원소를 간단히 표기하는 자신만의 방법을 말하여 보자. ◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 집합과 원소 사이의 관계를 이해하고, 집합의 표현 방법을 알 수 있다.	
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◎ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 해결하도록 한다. ◎ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◎ 학습 내용 설명 **• 집합과 원소 사이의 관계** (1) a가 집합 A의 원소일 때, 'a는 집합 A에 속한다'라고 하며, $a \in A$와 같이 나타낸다. (2) b가 집합 B의 원소가 아닐 때, 'b는 집합 B에 속하지 않는다'라고 하며, $b \notin B$와 같이 나타낸다. 예 A: 8의 약수의 집합 ⇨ $1 \in A$, $2 \in A$, $4 \in A$, $8 \in A$ $3 \notin A$, $5 \notin A$ **• 집합의 표현 방법** (1) 원소나열법: 집합에 속하는 모든 원소를 { } 안에 나열하는 방법 (2) 조건제시법: 집합에 속하는 모든 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하는 방법 (3) 벤 다이어그램: 그림을 이용하여 나타내는 방법 예 A: 6의 약수의 집합 ⇨ $\{1, 2, 3, 6\}$ $\{x \mid x$는 6의 약수$\}$  ◎ 문제 2, 3번을 풀게 한다. • 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	원소나열법, 조건제시법 등의 용어는 교수 · 학습 상황에서 필요에 따라 사용할 수 있다.
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 집합의 종류에 대하여 알아본다.	

1 집합

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있게 한다.

② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해하게 한다.

③ 집합의 연산을 할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 집합의 뜻과 표현	집합의 뜻
	집합의 표현
	집합의 종류
02 집합 사이의 포함 관계	부분집합
	두 집합이 같을 조건
03 집합의 연산	합집합과 교집합
	여집합
	차집합
	집합의 연산법칙
	드모르간의 법칙
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 12 쪽

1 집합

생선을 사려면…….

우리나라 속담에 "어물전 망신은 꼴뚜기가 시킨다."라는 말이 있다. 이 속담에 나오는 어물전은 무엇을 하는 곳이었을까?

예로부터 우리 선조들은 5일이나 7일에 한 번, 일정한 장소에 모여 물건을 사고파는 장을 열어 왔다. 장에서는 비슷한 종류의 상품을 모아 판매를 하였는데, 위의 속담에 나오는 어물전은 각종 생선과 조개 등을 파는 곳이었다. 또 포목전은 비단을 포함한 각종 옷감을 파는 곳이었고, 옹기전은 간장이나 된장 등을 담아 보관하는 옹기를 파는 곳이었다.

이와 같이 특성이 같은 상품끼리 분류하여 판매하면 한 장소에서 다양한 상품을 비교하며 살 수 있기 때문에 판매자뿐만 아니라 물건을 사는 소비자들에게도 편리하다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 17 쪽

상품의 분류에는 수학의 어떤 내용이 숨어 있을까?

들어가면서 상점에 가 보면 상품을 손쉽게 찾을 수 있도록 같은 종류끼리 정리해 놓은 것을 볼 수 있는데, 이와 같은 분류는 집합과 관련지어 생각할 수 있다. 이 단원에서는 집합의 개념, 집합 사이의 포함 관계, 집합의 연산에 대하여 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.	상	집합을 다양한 방식으로 표현하고 관련된 기호 $\{\ \ \}$, $\in$, $\notin$, $n(A)$, $\subset$, $\not\subset$ 등을 정확하게 사용할 수 있다.
	중	집합에서 원소인 것과 아닌 것을 구별하여 기호로 표현할 수 있다.
	하	집합인 것과 아닌 것을 구별할 수 있다.
2. 두 집합 사이의 포함 관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다.	상	두 집합 사이의 포함 관계를 기호를 사용하여 표현하고 예를 들어 설명할 수 있다.
	중	조건제시법으로 표현된 두 집합 사이의 포함 관계를 기호를 사용하여 표현할 수 있다.
	하	벤 다이어그램이나 원소나열법으로 표현된 두 집합 사이의 포함 관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다.
3. 집합의 연산을 할 수 있다.	상	집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 집합의 연산을 할 수 있다.
	중	주어진 집합에 대하여 교집합, 합집합, 여집합과 차집합의 연산을 할 수 있다.
	하	벤 다이어그램으로 표현된 두 집합의 교집합과 합집합을 말할 수 있다.

교과서 13 쪽

01 집합의 뜻과 표현

● 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.

집합이란 무엇인가?

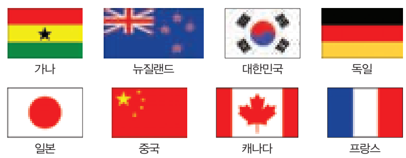
생각 열기

태권도

태권도는 우리나라 전통 무술로서 세계 여러 나라에 보급되어 태권도 대회에 참가하는 외국 선수들이 해마다 늘고 있다. 1988년 서울 올림픽 대회 때 시범 종목으로 채택된 후 2000년 시드니 올림픽 대회 때부터 정식 종목으로 채택되었다.

탐구 활동

어느 세계 태권도 대회에 다음과 같은 총 8개 나라가 참가하였다. 이 대회에 참가한 나라에 대하여 물음에 답하여 보자.



1. 아시아 지역에서 참가한 나라는 어느 나라인가?
2. 국기에 별 모양이 들어 있는 나라는 어느 나라인가?
3. 국기가 멋진 나라는 어느 나라인가?

탐구 활동에서 어느 세계 태권도 대회에 아시아 지역에서 참가한 나라는 대한민국, 일본, 중국임을 분명히 알 수 있다.

이와 같이 주어진 조건에 의하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임을 **집합**이라 하고, 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 **원소**라고 한다.

한편 국기가 멋진 나라의 모임은 '멋지다'는 기준이 분명하지 않아 그 대상을 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

보기 '10보다 작은 홀수의 모임'은 그 대상이 1, 3, 5, 7, 9로 분명하므로 집합이고, 이 집합의 원소는 1, 3, 5, 7, 9이다.

새로 나온 용어와 기호

- 집합(集合, set)
- 원소(元素, element)
- 벤 다이어그램(Venn diagram)
- 공집합(空集合, empty set)
- $a\in A$, $b\notin B$, $\varnothing$, $n(A)$

생각 열기 참/고/자/료

세계 태권도 대회에 참가한 나라 및 국제 대회 일정 안내는 세계태권도연맹 홈페이지(http://www.wtf.org)에서 알아볼 수 있다. 그 밖에 태권도의 역사와 태권도의 기본 동작 등 태권도와 관련된 자세한 정보는 국기원 홈페이지(http://www.kukkiwon.or.kr)에서 알아볼 수 있다.

01 집합의 뜻과 표현

소단원 지도 목표

① 집합과 원소의 뜻을 이해하게 한다.
② 집합과 원소 사이의 관계를 기호 $\in$, $\notin$를 사용하여 나타낼 수 있게 한다.
③ 집합을 원소나열법, 조건제시법, 벤 다이어그램으로 나타낼 수 있게 한다.
④ 공집합의 뜻을 이해하고 집합의 원소의 개수를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 수학과 일상생활에서의 집합의 의미가 다름을 명확히 알게 한다.
2. 원소나열법, 조건제시법, 유한집합, 무한집합 용어는 교수 · 학습 상황에서 다루어질 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 조사된 자료를 주어진 기준에 따라 분류해 봄으로써 집합과 원소의 뜻을 알게 하려는 것이다.

1. 대한민국, 일본, 중국

2. 가나, 뉴질랜드, 중국

3. 사람마다 멋지다고 생각하는 기준이 다르기 때문에 국기가 멋진 나라는 어느 나라인지 정할 수 없다.

지/도/자/료

1. 집합을 소개할 때, 일상생활의 소재에서 모임이라는 친숙한 의미로 도입하되, 집합이 될 수 있는 모임은 그 대상이 될 조건이 분명해야 함을 알게 한다.
2. 집합과 원소라는 용어를 배웠으나 아직까지 집합을 나타내는 기호 { }는 도입되지 않았으므로 미리 이 기호를 사용하지 않도록 주의한다.

교과서 14 쪽

문제 1 다음 중에서 집합인 것을 모두 찾고, 그 원소를 말하여라.

(1) 15의 약수의 모임

(2) 10에 가까운 수의 모임

(3) 재미있는 놀이 기구의 모임

(4) 우리 반 학생 중에서 3월에 태어난 학생의 모임

❶ 특별한 언급이 없는 한 일반적으로 '약수'는 양의 약수를 의미한다.

❷ 집합과 원소 사이의 관계를 나타내는 방법을 알아보자.

a가 집합 A의 원소일 때, a는 집합 A에 속한다고 하며, 이것을 기호로

$$a \in A$$

와 같이 나타낸다.

$a \in A$ (원소) (집합)

∈는 영어 단어 Element (원소)의 첫 글자를 기호화한 것이다.

E → ∈ → ∈

또 b가 집합 B의 원소가 아닐 때, b는 집합 B에 속하지 않는다고 하며, 이것을 기호로

$$b \notin B$$

와 같이 나타낸다.

예를 들어 8의 약수의 집합을 A라고 하면 1, 2, 4, 8은 집합 A의 원소이므로

$$1 \in A,\ 2 \in A,\ 4 \in A,\ 8 \in A$$

와 같이 나타낸다. 그러나 3, 5는 집합 A의 원소가 아니므로

$$3 \notin A,\ 5 \notin A$$

와 같이 나타낸다.

참고 집합을 나타낼 때에는 보통 알파벳 대문자를 사용하고, 원소를 나타낼 때에는 알파벳 소문자를 사용한다.

문제 2 3의 배수의 집합을 A라고 할 때, 다음 $\square$ 안에 기호 $\in$, $\notin$ 중에서 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $6 \square A$ (2) $8 \square A$

(3) $33 \square A$ (4) $200 \square A$

본문 해설

❶ 특별한 언급이 없는 한 일반적으로 초 · 중 · 고 교육과정에서 약수를 설명할 때 음의 약수는 다루지 않는다. 또한 배수, 짝수, 홀수 등의 용어도 양수로 한정하여 생각한다.

❷ 속한다는 것은 그 집합의 원소라는 의미로 기호 ∈의 방향에 유의해야 한다. 이때 $1 \in A$, $2 \notin A$를 각각 $A \ni 1$, $A \not\ni 2$와 같이 원소와 집합의 위치를 바꾸어 쓰기도 하지만 일반적으로 $1 \in A$, $2 \notin A$로 나타낸다.

1

목표 집합인 것과 집합이 아닌 것을 구분하고 집합인 것은 원소를 구할 수 있게 한다.

풀이 (1) 집합이고, 원소는 **1, 3, 5, 15**이다.

(2) 집합이 아니다.

(3) 집합이 아니다.

(4) 집합이고, **우리 반 학생 중에서 3월에 태어난 학생이** 원소이다.

따라서 집합인 것은 **(1), (4)**이다.

주의 '가깝다.', '재미있다.' 등은 기준이 주관적이어서 명확하지 않으므로 그 대상을 분명히 정할 수 없어 (2), (3)은 집합이 될 수 없다.

2

목표 집합의 원소인 것과 원소가 아닌 것을 구분하고 기호 ∈, ∉를 알맞게 사용할 수 있게 한다.

풀이 3의 배수이면 집합 A의 원소이고, 3의 배수가 아니면 집합 A의 원소가 아니다.

(1) $6 \boxed{\in} A$ (2) $8 \boxed{\notin} A$

(3) $33 \boxed{\in} A$ (4) $200 \boxed{\notin} A$

지/도/자/료 배수 판정법

- 2의 배수 판정법: 일의 자리 숫자가 0 또는 2의 배수
- 3의 배수 판정법: 각 자리 숫자의 합이 3의 배수
- 4의 배수 판정법: 끝의 두 자리 숫자가 00 또는 4의 배수
- 5의 배수 판정법: 일의 자리 숫자가 0 또는 5
- 9의 배수 판정법: 각 자리 숫자의 합이 9의 배수

기/초/력 향상 문제

다음 중에서 집합인 것에는 ○표, 집합이 아닌 것에는 ×표 하여라.

1 10보다 작은 자연수의 모임 (　　)

2 10보다 큰 자연수의 모임 (　　)

3 10에 가까운 자연수의 모임 (　　)

4 10에 가장 가까운 자연수의 모임 (　　)

5 10보다 작은 두 자리 자연수의 모임 (　　)

답 **1** ○ **2** ○ **3** × **4** ○ **5** ○

교과서 15 쪽

집합은 어떻게 나타내는가?

생각 열기 **사물놀이**

사물놀이란 꽹과리, 징, 장구, 북의 네 가지 민속 타악기를 가지고 어울려 치는 음악 또는 그 음악에 의한 놀이를 말한다. 사물놀이는 1978년 '사물놀이'라는 이름으로 결성된 농악 연주 단체에 의하여 처음으로 소개되었으며, 그 후 점차 보급되어 국내는 물론 국제적으로도 널리 알려지게 되었다. 최근에는 재즈, 오케스트라 등과의 협연을 통하여 그 영역을 넓히고 있으며 외국에서의 공연으로 우리나라 민속 음악을 소개하는 데 공헌하고 있다.

탐구 활동 다음은 우리나라 고유의 악기들이다. 물음에 답하여 보자.

꽹과리　징　대금　장구　북　단소

● 관악기: 입으로 불어서 관 안의 공기를 진동시켜 소리를 내는 악기

1. 위의 악기 중에서 관악기를 찾아보자.
2. 꽹과리, 징, 장구, 북으로 이루어진 집합에서 원소들의 공통된 성질은 무엇인가?

● 집합에 속하는 모든 원소를 { } 안에 나열하여 집합을 나타내는 방법을 원소나열법이라고 한다.

집합을 나타내는 방법에는 그 집합에 속하는 원소를 { } 안에 모두 써서 나타내는 방법이 있다.

❶ 예를 들어 원소가 1, 2, 3, 6인 집합은

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$$

과 같이 나타낸다.

● 집합 {1, 2, 3}을 {3, 2, 1}과 같이 나타내어도 되지만 {1, 1, 2, 3}과 같이 나타내지는 않는다.

이와 같은 방법으로 집합을 나타낼 때, 원소의 나열 순서는 바꾸어도 되지만 같은 원소는 중복하여 쓰지 않는다.

또 집합의 원소가 많고 원소 사이에 일정한 규칙이 있을 때에는 그 원소 중에서 일부를 생략하고, '…'을 사용하여 나타낸다.

보기 100 이하의 자연수의 집합은 {1, 2, 3, …, 100}과 같이 나타낼 수 있다.

생각 열기 참/고/자/료

사물놀이는 꽹과리, 징, 장구, 북 등 풍물놀이의 가장 기본적인 악기로 편성되어 연주되는 음악 또는 놀이를 말하며, 사물의 리듬을 보다 치밀하고 정교하게, 그리고 보다 계획적이며 체계적으로 보여줌으로써 우리 민속 장단의 아름다움과 신명을 느끼게 해 준다. 한국 전통 소리에 대한 분야별 상세한 설명은 한국전통소리문화 홈페이지(http://www.koreamusic.org)에서 알아볼 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주어진 악기 중에서 조건에 맞는 악기를 나열하여 보고 원소들의 공통된 성질을 알아보려는 것이다.

1. 관악기는 입으로 불어서 관 안의 공기를 진동시켜 소리를 내는 악기이므로 주어진 악기 중에서 관악기는 **대금**과 **단소**이다.

2. **사물놀이에 쓰이는 악기 또는 타악기들의 모임** 등으로 설명할 수 있다.

본문 해설

❶ 집합을 원소나열법으로 나타낼 때에는 다음을 주의하여 사용한다.

① 집합 기호는 ( ), [ ] 등이 아닌 { }를 사용한다.

② 원소와 원소 사이에는 ' , '를 찍어 구분한다.

③ {1, 2}와 {2, 1}은 같은 집합으로, 원소가 나열된 순서는 고려하지 않는다. 단, 가급적 규칙적인 나열이 되도록 하는 것이 좋다.

④ 같은 원소는 중복해서 쓰지 않는다.

⑤ '…'은 생략된 부분에 사용되는 기호로, 원소가 많을 때 원소를 어떤 규칙에 의해 나열해 놓기 위해 사용한다. 예를 들어 집합 {1, 2, 3, …, 100}에서는 유한개의 원소가 생략되어 있고, 집합 {1, 2, 3, …}에서는 무한개의 원소가 생략되어 있음에 유의하여 사용한다.

지/도/자/료

원소나열법은 수학 용어가 아니므로 용어를 강조하여 설명하지 않도록 한다.

기/초/력 향상 문제

다음 집합을 원소나열법으로 나타내어라.

1 11의 배수의 집합

2 school에 들어 있는 알파벳의 집합

3 신호등의 색의 집합

4 40보다 작은 8의 배수의 집합

답 **1** {11, 22, 33, …} **2** {s, c, h, o, l} **3** {빨강, 노랑, 초록} **4** {8, 16, 24, 32}

교과서 16 쪽

● 집합에 속하는 모든 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여 집합을 나타내는 방법을 조건제시법이라고 한다.

집합을 나타내는 또 다른 방법으로 그 집합의 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여 나타내는 방법이 있다.

❶ 예를 들어 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$을 각 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여

$$\{x \mid x\text{는 6의 약수}\}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

원소를 대표하는 기호

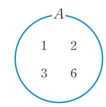
$\{x \mid x\text{는 6의 약수}\}$

원소들이 가지는 공통된 성질

❷ 보기 집합 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$은 $\{x \mid x\text{는 7 이하의 홀수}\}$ 또는 $\{x \mid x\text{는 8보다 작은 홀수}\}$ 등으로 나타낼 수 있다.

● 벤 다이어그램은 19세기 영국의 논리학자 벤(Venn, J. ; 1834~1923)이 창안한 그림이다.

❸ 집합을 나타낼 때에는 그림을 이용하기도 한다. 예를 들어 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$을 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다. 이와 같이 집합을 나타내는 그림을 **벤 다이어그램**이라고 한다.



문제 3 다음 집합을 벤 다이어그램으로 나타내어라.

(1) $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$　　(2) $B=\{x \mid x\text{는 10의 약수}\}$

집합의 종류에는 어떤 것들이 있는가?

탐구 활동 다음 그림을 보고, 물음에 답하여 보자.

1. 수준이는 몇 장의 수 카드를 만들어야 하는가?
2. 성실이가 수 카드를 모두 만들 수 있을지 생각하여 보자.
3. 기찬이가 수 카드를 실제로 만들 수 있을지 생각하여 보자.

본문 해설

❶ 조건제시법으로 집합을 나타낼 때 원소를 나타내는 문자 x 대신에 다른 문자 y, z 등을 사용할 수 있다.

❷ 원소나열법이나 조건제시법은 집합을 나타내는 방법일 뿐 집합의 종류가 아니다. 또 원소들이 공통으로 가지는 조건을 제시하는 방법이 다양하므로 조건제시법으로 나타낸 결과도 여러 가지가 될 수 있다.

원소나열법의 장점은 집합의 각 원소와 그 개수를 파악하기 쉽다는 것이고, 단점은 원소를 모두 나열하기 불편하고 나열할 수 없는 경우가 있다는 것이다.

조건제시법의 장점은 집합의 공통된 성질 또는 기호를 이용하여 많은 원소를 쉽게 표현할 수 있다는 것이고, 단점은 각 원소와 그 개수를 파악하기 어렵다는 것이다.

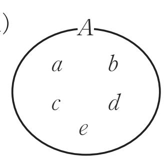
❸ 벤 다이어그램은 반드시 원으로 나타낼 필요는 없지만 일반적으로 전체집합은 직사각형, 그 부분집합은 원으로 나타낸다.

이때 원소를 구별하기 위해 ‘,’를 사용하지 않으므로 원소를 구분할 수 있도록 원소 사이에 간격을 두고 나타낸다.

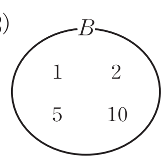
3

목표| 집합을 벤 다이어그램으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1)



(2)



읽/기/자/료 벤 다이어그램의 유래

벤 다이어그램은 벤(Venn, J. ; 1834~1923)이 1880년에 그의 논문 ‘명제와 논리의 도식적·역학적 표현에 관하여(On the Diagrammatic and mechanical Representation of Propositions and Reasonings)’에서 처음으로 소개하여 사용되기 시작하였다.

벤은 두 개 이상의 집합을 원 모양으로 나타내어 집합 사이에 공통인 원소가 있을 때에는 원 모양을 겹쳐 그리고, 공통인 원소가 없을 때에는 겹쳐지지 않게 그림으로써 집합을 시각화하였다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 세 학생이 만들려고 하는 수 카드의 개수를 알아봄으로써 유한집합, 무한집합, 공집합의 의미를 이해하게 하려는 것이다.

1. 8의 약수는 1, 2, 4, 8이므로 수준이는 **네 장의 수 카드를 만들어야 한다.**

2. 자연수는 1, 2, 3, 4, …로 무한히 많으므로 **성실이가 수 카드를 모두 만들 수는 없다.**

3. 1보다 작은 홀수는 없으므로 **기찬이는 수 카드를 만들 수 없다.**

주의| 짝수, 홀수는 2의 배수와 관련된 정의로 양수인 경우로 제한하여 생각한다.

교과서 17 쪽

● 원소가 유한개인 집합을 유한집합이라 하고, 원소가 무한히 많은 집합을 무한집합이라고 한다.

집합은 원소의 개수에 따라 원소가 유한개인 집합과 원소가 무한히 많은 집합으로 분류할 수 있다.

예를 들어 8의 약수의 집합 $\{1, 2, 4, 8\}$은 원소가 유한개이고, 자연수의 집합 $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$는 원소가 무한히 많다.

❶ 한편 1보다 작은 홀수의 집합과 같이 원소가 하나도 없는 집합을 **공집합**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\varnothing$$

과 같이 나타낸다.

❷ 집합 A의 원소가 유한개일 때, 그 개수를 0 또는 자연수로 나타낼 수 있다. 이때 집합 A의 원소의 개수를 기호로

$$n(A)$$

와 같이 나타낸다.

보기
(1) 집합 $A=\{0, 1, 2\}$일 때, $n(A)=3$이다.
(2) 집합 $B=\{4, 8, 12, 16, \cdots, 40\}$일 때, $n(B)=10$이다.
(3) 집합 $C=\{x \mid x$는 4보다 크고 5보다 작은 자연수$\}$일 때, $n(C)=0$이다.

● $n(\varnothing)=0$

문제 4 다음 집합의 원소의 개수를 구하여라.

(1) $A=\{a, b\}$
(2) $B=\{x \mid x$는 18의 약수$\}$
(3) $C=\{7, 14, 21, 28, \cdots, 98\}$
(4) $D=\{x \mid x$는 5보다 큰 5의 약수$\}$

사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

두 집합 $\{0\}$과 $\varnothing$의 차이점을 말하여 보자.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

슈퍼마켓에 가면 상품을 손쉽게 찾을 수 있도록 같은 종류끼리 정리해 놓은 것을 볼 수 있는데 이는 집합과 관련지어 생각할 수 있다. 슈퍼마켓에서 파는 물건을 상품의 특성이 같은 것끼리 분류하여 집합으로 나타내어 보자.

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 공집합의 의미와 표현 방법을 정확하게 이해하고 있는지 확인하기 위한 것이다.

풀이| 집합 $\{0\}$은 원소가 0인 집합이고 공집합 $\varnothing$은 집합의 원소가 하나도 없는 집합이다. 따라서 집합 $\{0\}$의 원소의 개수는 1이고 공집합 $\varnothing$의 원소의 개수는 0이다.

단원 과제

목표| 실생활에서 집합이 활용되는 구체적인 예를 통하여 집합의 의미를 이해하게 한다.

풀이| 수산물 코너에 있는 상품은 집합
{오징어, 고등어, 갈치, 조개, 낙지, 새우}
와 같이 나타낼 수 있다. 또 과일 코너에 있는 상품은 집합
{사과, 배, 감, 귤, 딸기, 오렌지}
와 같이 나타낼 수 있다. 그러나
{사과, 오징어}와 같은 경우는 특성이 다르므로 하나로 묶어서 생각할 수 없다.

본문 해설

❶ 공집합은 기호로 $\varnothing$ 또는 $\{\ \}$와 같이 나타낼 수 있지만 고등학교 교육과정에서는 $\varnothing$만을 사용한다. $\varnothing$은 그리스 문자 ϕ와 다르므로 파이(pi)라고 읽지 않고 공집합이라고 읽는다.

❷ 집합 A의 원소의 개수를 나타내는 기호 $n(A)$는 number of A를 기호화한 것이다.

4

목표| 집합의 원소의 개수를 구할 수 있게 한다.

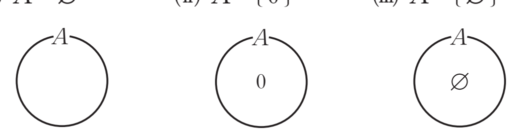
풀이| (1) $n(A)=\mathbf{2}$
(2) $n(B)=\mathbf{6}$
(3) $n(C)=\mathbf{14}$
(4) $n(D)=\mathbf{0}$

지/도/자/료 공집합 $\varnothing$에 대한 오개념 지도 방법

1. 기호 $\varnothing$는 '같지 않다'를 나타내는 기호 $\neq$처럼 '영(0)이 아니다(/)'를 결합하여 만들었다는 설이 있는데, 실제 학생들이 기호 $\varnothing$를 0과 혼동하여 사용하는 경우가 많으므로 주의하도록 지도한다.

2. $\{0\}$은 0을 원소로 가지는 집합이므로 $n(\{0\})=1$이지만 $n(\varnothing)=0$과 혼동하는 경우가 있다. 따라서 다음과 같이 $\varnothing$, $\{0\}$, $\{\varnothing\}$을 벤 다이어그램을 이용하여 나타내고, 그 원소의 개수를 구해 볼 수 있도록 지도한다.

(i) $A=\varnothing$ (ii) $A=\{0\}$ (iii) $A=\{\varnothing\}$



$\Rightarrow n(\varnothing)=0$ $\Rightarrow n(\{0\})=1$ $\Rightarrow n(\{\varnothing\})=1$

02 집합 사이의 포함 관계

소단원 지도 목표

① 부분집합의 뜻을 알고, 두 집합 사이의 포함 관계를 이해하게 한다.
② 주어진 집합의 부분집합을 모두 찾을 수 있게 한다.
③ 두 집합이 같다는 뜻을 알게 한다.
④ 진부분집합의 뜻을 알게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 벤 다이어그램을 통해 눈으로 포함 관계를 확인하여 직관적으로 부분집합의 의미를 이해하게 한다.

2. 공집합 $\varnothing$이 모든 집합의 부분집합이 됨을 논리적으로 설명하기보다는 직관적으로 이해하게 한다.

3. 부분집합을 구할 때에는 원소의 개수에 따라 순차적으로 찾도록 하여 빠지는 집합이 없게 한다.

4. 서로 같다 용어는 교수 · 학습 상황에서 다루어질 수 있다.

교과서 18 쪽

02 집합 사이의 포함 관계

● 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다.

부분집합이란 무엇인가?

생각 열기 **특별 교실**

학생들의 다양한 교육 활동을 위하여 학교에 만들어 놓은 특별 교실을 지역 주민에게 개방하는 학교가 많아졌다. 이들 학교에서는 학생들이 이용하는 시간대를 피하여 특별 교실에서 컴퓨터 교육이나 제과 강습과 같이 주민들에게 필요한 프로그램을 운영한다고 한다.

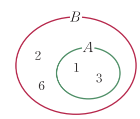
탐구 활동 **오른쪽 표는 소연이네 학교에 있는 특별 교실의 위치를 층별로 나타낸 것이다. 1층에 있는 특별 교실의 집합을 A, 표에 나타낸 모든 특별 교실의 집합을 B라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

층	특별 교실
1	가사실, 독서실
2	과학실, 영어실
3	음악실, 미술실

1. 집합 A와 집합 B에 속하는 원소를 { } 안에 모두 써서 각각 나타내어 보자.

2. 집합 A의 모든 원소는 집합 B에 속하는가?

두 집합 $A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 집합 A의 모든 원소는 집합 B에 속한다.



❶ 이와 같이 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때, 집합 A를 집합 B의 **부분집합**이라고 하며, 이것을 기호로

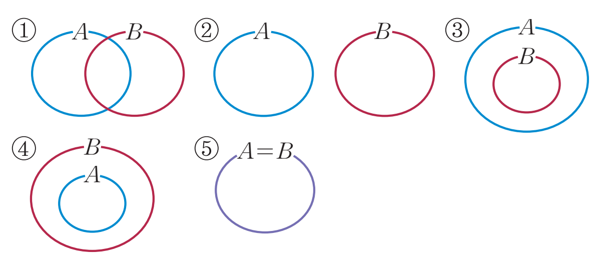
$$A \subset B$$

와 같이 나타낸다.

집합 A가 집합 B의 부분집합일 때, '집합 A는 집합 B에 포함된다.' 또는 '집합 B는 집합 A를 포함한다.'고 한다.

본문 해설

❶ 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같이 다섯 가지 경우로 생각할 수 있다.



이때 $A\subset B$, $B\subset A$, $A\not\subset B$, $B\not\subset A$, $A\not\subset B$이고 $B\not\subset A$인 경우는 각각 다음과 같다.
- $A\subset B$인 경우: ④, ⑤
- $B\subset A$인 경우: ③, ⑤
- $A\not\subset B$인 경우: ①, ②, ③
- $B\not\subset A$인 경우: ①, ②, ④
- $A\not\subset B$이고 $B\not\subset A$인 경우: ①, ②

새로 나온 용어와 기호

- 부분집합(部分集合, subset)
- 진부분집합(眞部分集合, proper subset)
- $A\subset B$, $A\not\subset B$, $A=B$, $A\neq B$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 집합의 원소를 비교하여 두 집합 사이의 관계를 이해하게 하려는 것이다.

1. $A=\{$가사실, 독서실$\}$
$B=\{$가사실, 독서실, 과학실, 영어실, 음악실, 미술실$\}$

2. 집합 A의 모든 원소는 집합 B에 속한다.

교과서 19 쪽

한편 집합 A가 집합 B의 부분집합이 아닐 때, 이것을 기호로

$$A \not\subset B$$

와 같이 나타낸다.

두 집합 A, B에 대하여 $A \not\subset B$이고 $B \not\subset A$일 때, 두 집합 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같이 두 가지 경우가 있다.

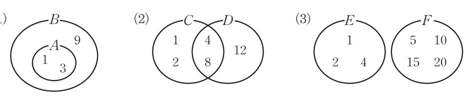
예제 01 다음 두 집합을 벤 다이어그램으로 나타내고, 두 집합 사이의 포함 관계를 기호 $\subset$ 또는 $\not\subset$를 써서 나타내어라.

(1) $A=\{1, 3\}$, $B=\{x \mid x$는 9의 약수$\}$

(2) $C=\{1, 2, 4, 8\}$, $D=\{4, 8, 12\}$

(3) $E=\{x \mid x$는 4의 약수$\}$, $F=\{x \mid x$는 20 이하의 5의 배수$\}$

풀이 (1) (2) (3)



$A \subset B$　　$C \not\subset D$ $(D \not\subset C)$　　$E \not\subset F$ $(F \not\subset E)$

문제 1 다음 □ 안에 기호 $\subset$, $\not\subset$ 중에서 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $\{1, 2\}$ □ $\{1, 2, 3\}$

(2) $\{4, 5, 6\}$ □ $\{3, 6, 9\}$

(3) $\{x \mid x$는 6의 약수$\}$ □ $\{x \mid x$는 12의 약수$\}$

(4) $\{x \mid x$는 10보다 작은 홀수$\}$ □ $\{x \mid x$는 10보다 작은 짝수$\}$

❶ 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다. 한편, 공집합은 모든 집합의 부분집합으로 정한다. 즉, 집합 A에 대하여

$$A \subset A,\quad \varnothing \subset A$$

이다.

1

목표| 부분집합의 뜻을 알고, 두 집합 사이의 포함 관계를 기호 $\subset$, $\not\subset$를 사용하여 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\{1, 2\}$ $\boxed{\subset}$ $\{1, 2, 3\}$

(2) $\{4, 5, 6\}$ $\boxed{\not\subset}$ $\{3, 6, 9\}$

(3) $\{x \mid x$는 6의 약수$\}=\{1, 2, 3, 6\}$이고

$\{x \mid x$는 12의 약수$\}=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$\{x \mid x$는 6의 약수$\}$ $\boxed{\subset}$ $\{x \mid x$는 12의 약수$\}$

(4) $\{x \mid x$는 10보다 작은 홀수$\}=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이고

$\{x \mid x$는 10보다 작은 짝수$\}=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$\{x \mid x$는 10보다 작은 홀수$\}$ $\boxed{\not\subset}$ $\{x \mid x$는 10보다 작은 짝수$\}$

본문 해설

❶ 임의의 집합 A의 모든 원소는 집합 A에 속한다. 따라서 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다.

한편 집합 A의 원소 중에서 집합 B에 속하지 않는 원소가 없을 때 집합 A는 집합 B의 부분집합이라고 하는데, 공집합 $\varnothing$은 원소가 없는 집합이므로 $\varnothing$의 원소 중에서 임의의 집합 A에 속하지 않는 원소가 없다. 따라서 공집합 $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합으로 정한다.

지/도/자/료

부분집합에 대한 오개념 지도 방법

$1 \subset A$, $\{1\} \in A$와 같이 원소 및 집합의 관계를 혼동해서 사용하는 경우가 있다. 일상생활에서 '속한다.'와 '포함된다.'가 동일한 의미로 사용되고 있기 때문에 용어의 쓰임을 정확히 알고 있지 않으면 오류를 범하기 쉽다. 기호 $\in$는 집합과 원소 사이의 관계에서 '속한다.'의 의미이고, 기호 $\subset$는 집합과 집합 사이의 관계에서 '포함된다.'의 의미임을 구분하도록 지도한다.

읽/기/자/료 집합론의 창시자 칸토어

칸토어(Cantor, G. ; 1945~1918)는 1845년 러시아의 상트 페테르부르크에서 덴마크 인 부모 밑에서 태어나서 1856년에 부모와 함께 독일의 프랑크푸르트로 이주하였다. 그는 중세 신학, 연속성과 무한에 관한 복잡한 논쟁에 깊은 관심을 가졌다. 그 결과, 그는 공업 기술자가 되라는 아버지의 제안을 받아들이지 않고 철학, 물리, 수학을 공부하였다.

칸토어의 초기 관심사는 정수론, 부정방정식, 삼각급수에 있었다. 그는 삼각급수의 미묘한 이론에서 영감을 얻어 해석학의 기초로 눈을 돌렸던 것 같다. 그는 수렴하는 유리수 수열을 활용하고, 데데킨트의 기하학적인 견해를 반영한 취급법과는 다른 무리수의 아름다운 취급법을 만들어 내고, 1874년에 집합론과 무한 이론에 관한 혁명적인 연구를 시작하였다. 그는 논문에서 실제적인 무한의 수학적 취급에 기초를 두어 초한수 이론을 발전시키고, 유한수들의 계산법과 유사하게 초한수의 계산법을 만들었다.

오늘날, 칸토어의 집합론은 거의 모든 수학 분야에 스며들었고, 위상과 실함수론의 도구로써 특히 중요하게 쓰이고 있다.

교과서 20 쪽

문제 2 다음 중에서 집합 $\{2, 4, 6, 8\}$의 부분집합을 모두 찾아라.

㉠ $\{2, 6\}$　　㉡ $\{2, 5, 8\}$
㉢ $\{2, 4, 6, 8\}$　　㉣ $\varnothing$

예제 02 집합 $\{a, b, c\}$의 부분집합을 모두 구하여라.

원소의 개수에 따라 부분집합을 찾는다.

❶ **풀이** 원소가 0개인 부분집합: $\varnothing$
원소가 1개인 부분집합: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$
원소가 2개인 부분집합: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$
원소가 3개인 부분집합: $\{a, b, c\}$
따라서 구하는 부분집합은 $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$이다.

답 $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

문제 3 다음 집합의 부분집합을 모두 구하여라.

(1) {비, 눈}　　(2) $\{1, 2, 3\}$

두 집합이 같다는 것은 무엇을 뜻하는가?

탐구 활동 **다음 그림을 보고, 물음에 답하여 보자.**

1. 정우가 탄 놀이 기구들의 집합을 A, 민정이가 탄 놀이 기구들의 집합을 B라고 할 때, 집합 A와 집합 B에 속하는 원소를 { } 안에 모두 써서 각각 나타내어 보자.

2. 집합 A의 모든 원소는 집합 B에 속하는가? 또 집합 B의 모든 원소는 집합 A에 속하는가?

2

목표| 부분집합의 뜻을 알고, 주어진 집합의 부분집합을 모두 찾을 수 있게 한다.

풀이| ㉠ $\{2, 6\} \subset \{2, 4, 6, 8\}$
㉡ $\{2, 5, 8\} \not\subset \{2, 4, 6, 8\}$
㉢ $\{2, 4, 6, 8\} \subset \{2, 4, 6, 8\}$
㉣ $\varnothing \subset \{2, 4, 6, 8\}$
따라서 부분집합은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

본문 해설

❶ 집합 $A=\{a, b, c\}$의 부분집합은 다음과 같이 원소 a, b, c가 속하는지의 여부에 따라 수형도를 그려 찾을 수도 있다. (○는 속하고, ×는 속하지 않는 경우이다.)

a	b	c		A의 부분집합
○	○	○	…	$\{a, b, c\}$
		×	…	$\{a, b\}$
	×	○	…	$\{a, c\}$
		×	…	$\{a\}$
×	○	○	…	$\{b, c\}$
		×	…	$\{b\}$
	×	○	…	$\{c\}$
		×	…	$\varnothing$

3

목표| 주어진 집합의 부분집합을 모두 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 원소가 0개인 부분집합: $\varnothing$
원소가 1개인 부분집합: {비}, {눈}
원소가 2개인 부분집합: {비, 눈}
따라서 구하는 부분집합은 **∅, {비}, {눈}, {비, 눈}**이다.

(2) 원소가 0개인 부분집합: $\varnothing$
원소가 1개인 부분집합: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$
원소가 2개인 부분집합: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
원소가 3개인 부분집합: $\{1, 2, 3\}$
따라서 구하는 부분집합은 $\boldsymbol{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}}$이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 집합 A, B를 구하면 원소를 나열한 순서는 다르지만 두 집합의 원소가 모두 같음을 알게 하여 두 집합 사이의 관계를 이해하게 하려는 것이다.

1. $A=\{$범퍼카, 청룡열차, 바이킹$\}$
$B=\{$청룡열차, 범퍼카, 바이킹$\}$

2. 집합 A와 집합 B에는 원소의 순서만 다를 뿐 같은 원소가 속해 있다. 따라서 **집합 A의 모든 원소는 집합 B에 속한다. 또 집합 B의 모든 원소는 집합 A에 속한다.**

교과서 21 쪽

두 집합

$$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\},\ B=\{x\,|\,x\text{는 10 미만의 짝수}\}$$

에서 집합 B에 속하는 원소를 { } 안에 모두 써서 나타내면

$$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$$

이므로 집합 A와 집합 B의 원소는 모두 같다.

❶ 이와 같이 두 집합 A, B의 원소가 모두 같을 때, 두 집합 A, B는 같다고 하며, 이것을 기호로

$$\boldsymbol{A=B}$$

와 같이 나타낸다.

두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이고 $B\subset A$이면 $A=B$이다.

한편 두 집합 A, B가 같지 않을 때, 이것을 기호로

$$\boldsymbol{A\neq B}$$

와 같이 나타낸다.

문제 4 다음 $\square$ 안에 기호 $=$, $\neq$ 중에서 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $\{1\}\ \square\ \{0\}$
(2) $\{2,\ 4,\ 6\}\ \square\ \{6,\ 4,\ 2\}$
(3) $\{x\,|\,x\text{는 10 이하의 홀수}\}\ \square\ \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$
(4) $\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\}\ \square\ \{x\,|\,x\text{는 3의 배수}\}$

❷ 두 집합 A, B가 같지 않고 집합 A가 집합 B의 부분집합일 때, 즉

$$A\neq B\text{이고 }A\subset B$$

일 때, 집합 A를 집합 B의 **진부분집합**이라고 한다.

보기 집합 $A=\{1,\ 2\}$의 부분집합을 모두 구하면 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,\ 2\}$이다. 이때 부분집합 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$는 집합 A의 진부분집합이다.

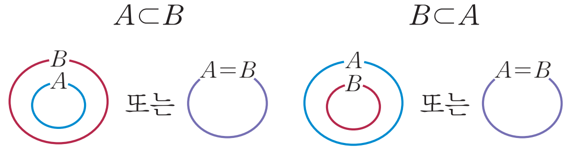
문제 5 두 집합 A, B에 대하여 A가 B의 진부분집합인지 아닌지 말하여라.

(1) $A=\{$미, 솔$\}$, $B=\{$도, 미, 솔$\}$
(2) $A=\{x\,|\,x\text{는 3의 약수}\}$, $B=\{x\,|\,x\text{는 5보다 작은 홀수}\}$

본문 해설

❶ 두 집합 A, B의 원소가 모두 같을 때, 즉 $A=B$일 때, 집합 A의 모든 원소는 집합 B에 속하고, 집합 B의 모든 원소는 집합 A에 속한다. 따라서 $A=B$이면 $A\subset B$이고 $B\subset A$이다.
한편 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속하고 집합 B의 모든 원소가 집합 A에 속하면 두 집합 A, B의 원소는 모두 같으므로 $A=B$이다.
이때 $A\subset B$인 경우와 $B\subset A$인 경우를 각각 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같으므로 $A\subset B$이고 $B\subset A$이면 $A=B$임을 확인할 수 있다.

$A\subset B$ $B\subset A$



4

목표| 두 집합이 서로 같을 조건을 이해하여 기호를 바르게 사용할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\{1\}\ \boxed{\neq}\ \{0\}$
(2) $\{2,\ 4,\ 6\}\ \boxed{=}\ \{6,\ 4,\ 2\}$
(3) $\{x\,|\,x\text{는 10 이하의 홀수}\}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 이므로
$\{x\,|\,x\text{는 10 이하의 홀수}\}\ \boxed{\neq}\ \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$
(4) $\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\}$는 3의 배수의 집합이므로
$\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\}\ \boxed{=}\ \{x\,|\,x\text{는 3의 배수}\}$

본문 해설

❷ 진부분집합은 부분집합 중에서 자기 자신을 제외한 것이다.
예 집합 $A=\{1,\ 2\}$일 때,

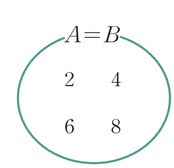
$$\underbrace{\underbrace{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\}}_{\text{진부분집합}},\ \underbrace{\{1,\ 2\}}_{\text{같은 집합}}}_{\text{부분집합}}$$

5

목표| 한 집합이 다른 집합의 진부분집합인지 판단할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\{$미, 솔$\}\subset\{$도, 미, 솔$\}$이고, $\{$미, 솔$\}\neq\{$도, 미, 솔$\}$이므로 **A는 B의 진부분집합이다.**
(2) $A=\{1,\ 3\}$, $B=\{1,\ 3\}$이고, $A\subset B$, $A=B$이므로 **A는 B의 진부분집합이 아니다.**

지/도/자/료 $A=B$와 $A\neq B$



1. 두 집합 A, B에 대하여 $A=B$의 정의를 기호를 사용하여 이해하지 못하는 경우 집합 A와 집합 B의 원소를 비교하고, 오른쪽 그림과 같이 벤 다이어그램으로 나타내어 봄으로써 두 집합이 같음을 직관적으로 알 수 있도록 한 후 기호를 이용하여 표현해 보는 기회를 제공하여야 한다.
2. $A\not\subset B$ 또는 $B\not\subset A$인 경우의 두 집합 A, B의 예를 벤 다이어그램으로 나타내어 봄으로써 $A\neq B$의 의미를 명확하게 알 수 있도록 지도한다.

03 집합의 연산

소단원 지도 목표

① 합집합과 교집합, 집합의 서로소의 뜻을 알게 한다.
② 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계를 이해하게 한다.
③ 여집합과 차집합의 뜻을 알게 한다.
④ 집합의 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.
⑤ 차집합과 여집합의 성질을 이해하게 한다.
⑥ 드모르간의 법칙을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 합집합과 교집합을 정의할 때 사용된 '또는'과 '그리고'의 의미를 이해하게 한다.

2. 합집합의 원소의 개수를 구하는 식은 벤 다이어그램을 통해 직관적으로 도입할 수 있도록 한다.

3. 여집합은 반드시 전체집합이 먼저 정의되어 있어야 하지만 문맥상 전체집합이 분명할 때에는 생략할 수 있음에 유의하게 한다.

4. 집합의 연산법칙은 벤 다이어그램으로 확인하는 정도로 간단히 다룬다.

새로 나온 용어와 기호

- 합집합(合集合, union)
- 교집합(交集合, intersection)
- (집합의) 서로소(disjoint)
- 전체집합(全體集合, universal set)
- 여집합(餘集合, complement)
- 차집합(差集合, difference set)
- (집합의) 교환법칙(交換法則, commutative law)
- (집합의) 결합법칙(結合法則, associative law)
- (집합의) 분배법칙(分配法則, distributive law)
- 드모르간의 법칙(De Morgan's law)
- $A\cup B$, $A\cap B$, U, A^C, $A-B$

교과서 22 쪽

03 집합의 연산

● 집합의 연산을 할 수 있다.

합집합과 교집합이란 무엇인가?

생각 열기 **반려동물**

동물 행동학자 로렌츠(Lorenz, K. Z. ; 1903~1989)는 애완동물을 사람들과 함께 살아간다는 의미에서 반려동물이라고 부를 것을 제안하였다. 이 주장에는 사람과 동물은 사랑을 주고받으며 더불어 살아가는 동등한 존재라는 의미가 깔려 있다.

탐구 활동 **다음 그림을 보고, 물음에 답하여 보자.**

1. 정미가 기르고 싶어 하거나 준호가 기르고 싶어 하는 동물을 모두 말하여 보자.
2. 정미도 기르고 싶어 하고 준호도 기르고 싶어 하는 동물을 모두 말하여 보자.

탐구 활동에서 정미가 기르고 싶어 하는 동물의 집합을 A라 하고, 준호가 기르고 싶어 하는 동물의 집합을 B라고 하면

$$A=\{개,\ 토끼,\ 앵무새\},\ B=\{개,\ 고양이,\ 열대어,\ 토끼\}$$

이다. 이때 집합 A에 속하거나 집합 B에 속하는 모든 원소로 이루어진 집합은

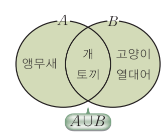
$$\{개,\ 토끼,\ 앵무새,\ 고양이,\ 열대어\}$$

이다.

이와 같이 두 집합 A, B에 대하여 A에 속하거나 B에 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 **합집합**이라고 하며, 이것을 기호로

$$A\cup B$$

와 같이 나타낸다.



생각 열기 참/고/자/료

동물 행동학은 동물 행동의 특성, 의미, 진화 따위를 비교 · 연구하는 생물학의 한 분야이다. 오스트리아의 로렌츠(Lorenz, K. ; 1903~1989)는 방목한 동물의 본능 행동을 연구하여 비교 행동학의 확립에 기여하였으며 1973년 노벨 생리학 · 의학상을 받았다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 사람의 대화에서 합집합과 교집합의 의미를 알게 하려는 것이다.

1. 개, 토끼, 앵무새, 고양이, 열대어

2. 개, 토끼

교과서 23 쪽

① 두 집합 A와 B의 합집합을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 또는 } x\in B\}$$

한편 집합 A에도 속하고 집합 B에도 속하는 모든 원소로 이루어진 집합은

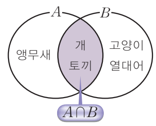
{개, 토끼}

이다.

② 이와 같이 두 집합 A, B에 대하여 A에도 속하고 B에도 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 **교집합**이라고 하며, 이것을 기호로

$$A\cap B$$

와 같이 나타낸다.



두 집합 A와 B의 교집합을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 그리고 } x\in B\}$$

특히 두 집합 A와 B 사이에 공통인 원소가 없을 때, 즉

$$A\cap B=\varnothing$$

일 때, 집합 A와 집합 B는 **서로소**라고 한다.

중① 자연수에서는 최대공약수가 1인 두 수를 서로소라고 한다.

$A\cap\varnothing=\varnothing$이므로 $\varnothing$은 모든 집합과 서로소이다.

보기 (1) 두 집합 $A=\{3, 6, 9\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$에 대하여
$A\cup B=\{3, 4, 5, 6, 9\}$, $A\cap B=\{3, 6\}$
(2) 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{x\mid x$는 6의 배수$\}$에 대하여
$A\cap B=\varnothing$이므로 집합 A와 집합 B는 서로소이다.

문제 1 다음 두 집합 A, B에 대하여 $A\cup B$와 $A\cap B$를 구하고, 두 집합 A, B가 서로소인 것을 찾아라.

(1) $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5\}$
(2) $A=\{x\mid x$는 8의 약수$\}$, $B=\{x\mid x$는 10의 약수$\}$
(3) $A=\{a, b, c\}$, $B=\{c, d, e, f\}$
(4) $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\varnothing$

사고력 기르기
추론
▸의사소통
문제 해결

두 집합 A, B에 대하여 A와 $A\cup B$, A와 $A\cap B$ 사이의 포함 관계를 말하여 보자.

1

목표| 주어진 두 집합의 합집합과 교집합을 각각 구하고 서로소인 것을 찾을 수 있게 한다.

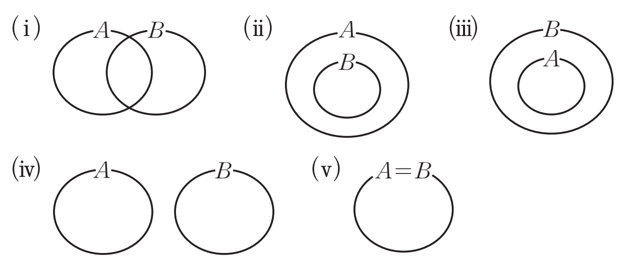
풀이| (1) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$A\cap B=\{3, 4\}$
(2) $A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$,
$A\cap B=\{1, 2\}$,
(3) $A\cup B=\{a, b, c, d, e, f\}$, $A\cap B=\{c\}$
(4) $A\cup B=\{2, 4, 6\}$, $A\cap B=\varnothing$
두 집합 A, B가 서로소인 것은 (4)이다.

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 집합과 합집합, 집합과 교집합 사이의 포함 관계를 생각하여 보도록 하는 문제이다.

풀이| 다음과 같이 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 모든 경우에 A는 $A\cup B$에 포함되고, $A\cap B$는 A에 포함됨을 알 수 있다.

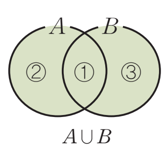
즉, $A\subset A\cup B$, $A\cap B\subset A$임을 알 수 있다.



본문 해설

① 두 집합 A, B의 합집합을 조건제시법으로 나타내면 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 또는 $x\in B\}$이다. 이때 '또는'은 '이거나'라는 의미로서 '$x\in A$ 또는 $x\in B$'는

'$x\in A$ 그리고 $x\in B$' ⋯⋯ ①
'$x\in A$ 그리고 $x\notin B$' ⋯⋯ ②
'$x\notin A$ 그리고 $x\in B$' ⋯⋯ ③



의 세 가지 경우를 모두 포괄한다.

즉, 두 집합 A, B의 합집합 $A\cup B$는 집합 A, B의 모든 원소를 합쳐 놓은 집합이라는 뜻이다.

② 두 집합 A, B의 교집합을 조건제시법으로 나타내면 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 그리고 $x\in B\}$이다. 이때 '그리고'는 '동시에'라는 의미로서 '$x\in A$ 그리고 $x\in B$'는 x가 두 집합 A, B에 모두 속한다는 뜻이다. 즉, 두 집합 A, B의 교집합 $A\cap B$는 집합 A, B가 공통으로 가지는 원소의 집합이라는 뜻이다.

지/도/자/료 서로소의 의미

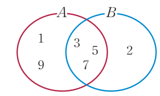
'서로소'는 두 자연수의 공약수를 설명할 때와 두 집합 사이의 포함 관계를 설명할 때 사용된다. 같은 용어이지만 서로 다른 의미를 나타내므로 주의하도록 지도한다.

교과서 24 쪽

이제 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계에 대하여 알아보자.

두 집합 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$에 대하여

$$n(A)=5,\ n(B)=4,$$
$$n(A\cup B)=6,\ n(A\cap B)=3$$



이다.

이때 $n(A)+n(B)-n(A\cap B)=5+4-3=6$이므로

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

가 성립함을 알 수 있다.

일반적으로 다음이 성립한다.

1 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계

원소가 유한개인 두 집합 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

특히 두 집합 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이면 $n(A\cap B)=0$이므로 다음이 성립한다.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

보기 두 집합 A, B에 대하여 $n(A)=7$, $n(B)=8$, $n(A\cap B)=4$일 때,

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=7+8-4=11$$

문제 2 두 집합 A, B에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $n(A)=5$, $n(B)=6$, $n(A\cap B)=2$일 때, $n(A\cup B)$

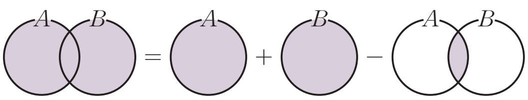
(2) $n(A)=4$, $n(B)=9$, $n(A\cup B)=10$일 때, $n(A\cap B)$

실생활

문제 3 성민이네 반에서는 비빔밥과 스파게티 중 좋아하는 음식은 무엇인가에 대한 설문 조사를 실시하였다. 비빔밥은 20명, 스파게티는 12명이 좋아한다고 답하였고, 비빔밥과 스파게티를 모두 좋아한다고 답한 학생은 5명이라고 한다. 이때 비빔밥 또는 스파게티를 좋아한다고 답한 학생은 몇 명인지 구하여라.

본문 해설

1 $n(A\cup B)$를 구하기 위하여 $n(A)+n(B)$를 구하면 $n(A\cap B)$가 중복되어 두 번 더해지므로 $n(A\cap B)$를 한 번 빼야 한다. 이는 벤 다이어그램을 통해서도 확인할 수 있다.



한편

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

로부터 다음을 알 수 있다.

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$
$$n(A)=n(A\cup B)-n(B)+n(A\cap B)$$
$$n(B)=n(A\cup B)-n(A)+n(A\cap B)$$

2

목표 | $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$를 이해하고, $n(A\cup B)$와 $n(A\cap B)$를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $n(A\cup B)$

$$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=5+6-2=\mathbf{9}$$

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

이므로 $10=4+9-n(A\cap B)$

$n(A\cap B)=\mathbf{3}$

3

목표 | 실생활에서 합집합의 원소의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | 비빔밥을 좋아하는 학생의 집합을 A, 스파게티를 좋아하는 학생의 집합을 B라고 하면

$n(A)=20$, $n(B)=12$이고 $n(A\cap B)=5$이므로

$n(A\cup B)=20+12-5=27$

따라서 구하는 학생 수는 **27명**이다.

지/도/자/료 원소의 개수에 대한 오개념 지도 방법

두 집합 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{3, 5, 7\}$에 대하여 합집합을 $A\cup B=\{1, 3, 5, 3, 5, 7\}$로 생각하고 $n(A\cup B)=6$으로 나타내는 경우가 있다. 같은 원소가 중복될 때에는 한 번만 쓰고 그 개수도 한 개임을 주지시키고 벤 다이어그램을 통하여 이해시킬 필요가 있다.

읽/기/자/료 집합과 관련된 기호의 유래

1. { }: 독일의 수학자 칸토어(Cantor, G. ; 1845~1918)가 1895년에 쓴 원고에 처음 사용되었다. 집합은 A, B, C, ⋯ 등의 대문자로, 원소는 a, b, c, ⋯ 등의 소문자를 사용하여 나타낸다.
2. $\in$, $\ni$: 1903년 영국의 수학자이자 철학자인 러셀(Russell, B. A. W. ; 1871~1970)이 1903년에 처음 사용하였는데, 원소(element)의 첫글자를 기호화한 것이다.
3. $\subset$, $\supset$: 이탈리아의 수학자 페아노(Peano, G. ; 1858~1932)가 처음으로 사용하였다. 이는 포함한다는 의미의 라틴어 Contineo의 첫 글자인 C에서 비롯된 것으로 알려져 있다.
4. $\cup$, $\cap$: 이 기호가 언제 처음으로 사용되었는지는 분명하지 않다. 그러나 독일의 수학자 슈뢰더(Schrodeör, E. ; 1841~1902)가 논리합과 논리곱을 나타내기 위해 사용한 기호 $+$, $\times$가 덧셈, 곱셈 기호와 구분하기 어렵기 때문에 사용한 기호 $\vee$, $\wedge$를 변형하여 이탈리아의 수학자 페아노가 사용했다고 알려져 있다.

교과서 25 쪽

여집합이란 무엇인가?

탐구 활동

과일 바구니에 사과, 배, 귤, 바나나, 오렌지가 들어 있다.
다음 물음에 답하여 보자.

1. 귤과 바나나를 모두 먹었다면 남아 있는 과일은 무엇인가?
2. 사과, 배, 귤, 바나나를 모두 먹었다면 남아 있는 과일은 무엇인가?

어떤 집합에 대하여 그것의 부분집합을 생각할 때, 처음에 주어진 집합을 **전체집합**이라고 하며, 이것을 기호로

$$U$$

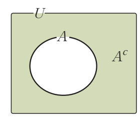
와 같이 나타낸다.

⊖ U는 영어 단어 Universal(전체의)의 첫 글자를, A^C의 C는 영어 단어 Complement(여집합)의 첫 글자를 기호화한 것이다.

❶ 집합 A가 전체집합 U의 부분집합일 때, U의 원소 중에서 A에 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 U에 대한 A의 **여집합**이라고 하며, 이것을 기호로

$$A^C$$

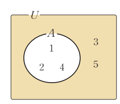
과 같이 나타낸다.



전체집합 U에 대한 집합 A의 여집합을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A^C=\{x \mid x\in U \text{ 그리고 } x\notin A\}$$

보기 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대한 집합 $A=\{1, 2, 4\}$의 여집합은 $A^C=\{3, 5\}$이다.



문제 4 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 집합의 여집합을 구하여라.

(1) $A=\{2, 4, 6\}$ (2) $B=\{1\}$
(3) $C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (4) $D=\{x \mid x$는 7보다 작은 자연수$\}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 처음 바구니에 있던 과일과 남은 과일을 이용하여 여집합의 개념을 이해하게 하려는 것이다.

1. 남아 있는 과일은 **사과, 배, 오렌지**이다.

2. 남아 있는 과일은 **오렌지**뿐이다.

본문 해설

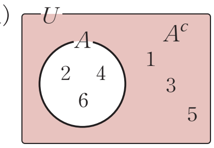
❶ 여집합을 정의하기 위해서는 반드시 전체집합 U가 필요하다. 이를테면 집합 $A=\{x \mid x\geq 2\}$에 대하여 전체집합 U가 자연수 전체의 집합일 때에는 $A^C=\{1\}$이지만 전체집합 U가 정수 전체의 집합이라면 $A^C=\{1, 0, -1, -2, -3, \cdots\}$이다. 이와 같이 전체집합이 무엇인가에 따라 여집합이 달라지므로 집합의 여집합을 생각할 때에는 반드시 전체집합 U를 확인해야 한다.

4

목표 | 전체집합에 대하여 각 집합의 여집합을 구할 수 있게 한다.

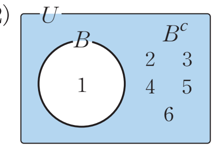
풀이 |

(1)



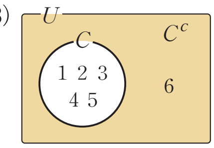
$A^C=\{1, 3, 5\}$

(2)



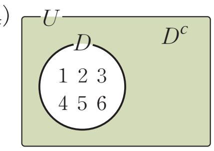
$B^C=\{2, 3, 4, 5, 6\}$

(3)



$C^C=\{6\}$

(4)



$D^C=\varnothing$

기/초/력 향상 문제

다음 물음에 답하여라.

1 전체집합 $U=\{x \mid x$는 실수$\}$에 대하여 $Q=\{x \mid x$는 유리수$\}$의 여집합을 구하여라.

2 전체집합 $U=\{x \mid x$는 복소수$\}$에 대하여 $R=\{x \mid x$는 실수$\}$의 여집합을 구하여라.

3 전체집합 $U=\{x \mid x$는 자연수$\}$에 대하여 $E=\{x \mid x$는 짝수$\}$의 여집합을 구하여라.

4 전체집합 $U=\{x \mid x$는 유리수$\}$에 대하여 $T=\{x \mid x$는 유한소수$\}$의 여집합을 구하여라.

답 **1** $Q^C=\{x \mid x$는 무리수$\}$ **2** $R^C=\{x \mid x$는 허수$\}$
3 $E^C=\{x \mid x$는 홀수$\}$ **4** $T^C=\{x \mid x$는 순환소수$\}$

교과서 26 쪽

차집합이란 무엇인가?

탐구 활동 오른쪽 표는 두 상점 A, B에서 파는 물건을 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

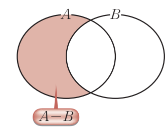
1. 상점 B에서는 팔지 않고 상점 A에서만 파는 물건은 무엇인가?
2. 상점 A에서는 팔지 않고 상점 B에서만 파는 물건은 무엇인가?

상점 A	상점 B
운동화	양말
구두	운동화
슬리퍼	공
양말	모자

❶ 두 집합 A, B에 대하여 A의 원소 중에서 B에 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 A에 대한 B의 **차집합**이라고 하며, 이것을 기호로

$$A-B$$

와 같이 나타낸다.



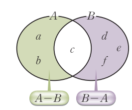
집합 A에 대한 집합 B의 차집합을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A-B=\{x\,|\,x\in A \text{ 그리고 } x\notin B\}$$

보기 두 집합 $A=\{a, b, c\}$, $B=\{c, d, e, f\}$에 대하여

$A-B=\{a, b\}$

$B-A=\{d, e, f\}$



문제 5 다음 두 집합 A, B에 대하여 $A-B$와 $B-A$를 구하여라.

(1) $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{3, 5, 7, 9\}$

(2) $A=\{x\,|\,x$는 6의 약수$\}$, $B=\{x\,|\,x$는 15의 약수$\}$

문제 6 두 집합 $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $A-B$ (2) $A-(A\cap B)$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

두 집합 A, B에 대하여 $A-B=\varnothing$일 때, A와 B 사이의 관계를 설명하여 보자.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 각 상점에서 파는 물건을 비교하여 봄으로써 차집합의 개념을 이해하게 하려는 것이다.

1. 구두, 슬리퍼

2. 공, 모자

본문 해설

❶ 두 집합 A, B에 대하여 차집합 $A-B$는 A의 원소 중에서 B에도 속하는 원소를 제외한 나머지 원소의 집합이므로 A에서 $A\cap B$의 원소를 제외한 원소의 집합과 같다. 즉, $A-B=A-(A\cap B)$이다.
한편 A^C은 전체집합 U의 원소 중에서 A의 원소를 제외한 나머지 원소의 집합이므로 $A^C=U-A$이다.

5

목표| 차집합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $A-B=\{\mathbf{1}\}$, $B-A=\{\mathbf{7},\ \mathbf{9}\}$
(2) $A-B=\{\mathbf{2},\ \mathbf{6}\}$, $B-A=\{\mathbf{5},\ \mathbf{15}\}$

6

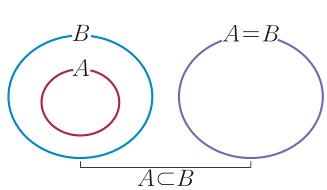
목표| $A-B=A-(A\cap B)$임을 알게 한다.

풀이| (1) $A-B=\{\mathbf{2},\ \mathbf{4}\}$
(2) $A-(A\cap B)=\{\mathbf{2},\ \mathbf{4}\}$

사고력 기르기

출제 의도| $A-B=\varnothing$이 성립하는 두 집합 사이의 관계를 생각해 봄으로써 차집합의 개념과 두 집합 사이의 포함 관계를 알도록 하는 문제이다.

풀이| $A-B$의 원소가 하나도 없으면 집합 A의 모든 원소는 집합 B에 속한다. 즉, $A-B=\varnothing$이면 $\boldsymbol{A\subset B}$이다.



지/도/자/료 차집합에 대한 오개념 지도 방법

1. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$에 대하여 차집합 $A-B=\{1,\ 5,\ 6\}$과 같이 두 집합에서 중복된 원소를 제외하고 남은 원소를 모두 차집합의 원소로 생각하는 경우가 많다. $A-B$는 집합 A의 원소이지만 집합 B의 원소가 아닌 것의 집합임을 정확히 이해하게 한다.

2. 차집합의 원소의 개수를 $n(A-B)=n(A)-n(B)$와 같이 계산하는 경우 또한 많다. 따라서 벤 다이어그램을 이용하여 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$임을 직관적으로 알 수 있도록 지도한다.

3. $A=B$와 같이 특수한 경우를 제외하면 $A-B$와 $B-A$는 같지 않음을 알도록 한다.

교과서 27 쪽

집합의 연산에서는 어떤 법칙이 성립하는가?

탐구 활동 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. $A\cup B$와 $B\cup A$를 각각 구하고 비교하여 보자.
2. $A\cap B$와 $B\cap A$를 각각 구하고 비교하여 보자.

❶ 일반적으로 두 집합 A, B에 대하여

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$$

가 성립한다. 이것을 집합의 **교환법칙**이라고 한다.

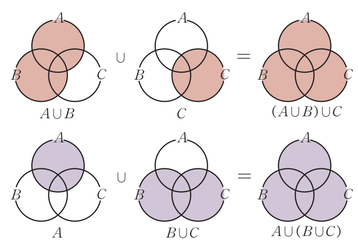
집합의 교환법칙
(1) $A\cup B=B\cup A$ [합집합에 대한 교환법칙]
(2) $A\cap B=B\cap A$ [교집합에 대한 교환법칙]

문제 7 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 5\}$에 대하여 다음과 같은 교환법칙이 성립함을 보여라.
(1) $A\cup B=B\cup A$ (2) $A\cap B=B\cap A$

예제 01 세 집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

$$(A\cup B)\cup C=A\cup (B\cup C)$$

풀이



따라서 $(A\cup B)\cup C=A\cup (B\cup C)$가 성립한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 합집합과 교집합을 이용하여 집합의 교환법칙을 알도록 하기 위한 것이다.

1. $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$B\cup A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
따라서 $A\cup B=B\cup A$이다.

2. $A\cap B=\{4, 5\}$
$B\cap A=\{4, 5\}$
따라서 $A\cap B=B\cap A$이다.

본문 해설

❶ 임의의 두 집합 A, B에 대하여

$$\begin{aligned}A\cup B&=\{x\mid x\in A \text{ 또는 } x\in B\}\\&=\{x\mid x\in B \text{ 또는 } x\in A\}\\&=B\cup A\end{aligned}$$

이고

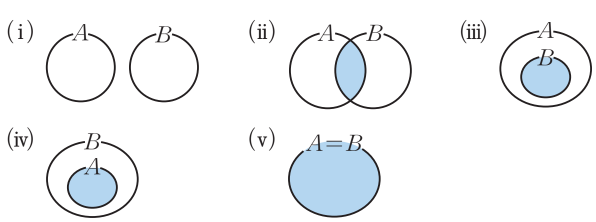
$$\begin{aligned}A\cap B&=\{x\mid x\in A \text{ 그리고 } x\in B\}\\&=\{x\mid x\in B \text{ 그리고 } x\in A\}\\&=B\cap A\end{aligned}$$

이므로 합집합, 교집합에 대한 교환법칙이 성립한다.

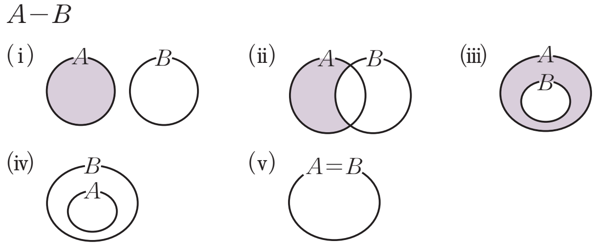
지/도/자/료 포함 관계에 따른 차집합의 형태

두 집합 A, B 사이의 관계에 따라 교집합과 차집합은 다음과 같이 여러 가지 경우로 나타난다.

(1) $A\cap B$



(2) $A-B$



7

목표 | 집합의 교환법칙을 이해하게 한다.

풀이 | (1) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B\cup A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 $A\cup B=B\cup A$이다.
(2) $A\cap B=\{2, 3\}$, $B\cap A=\{2, 3\}$이므로 $A\cap B=B\cap A$이다.

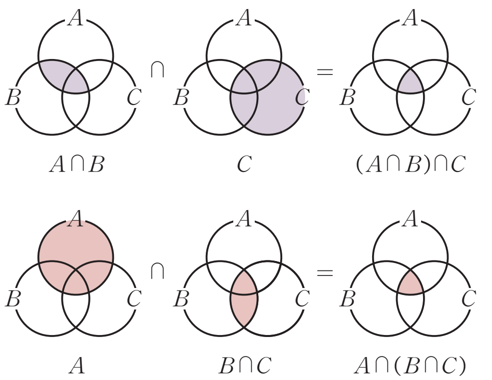
지/도/자/료 집합의 교환법칙

두 집합 A, B에 대하여 합집합, 교집합에 대한 교환법칙은 진리표를 이용하여 두 명제의 진릿값이 같다는 것을 확인하는 과정을 통해 증명할 수 있다. 그러나 “수학Ⅱ”에서는 이것이 불가능하다. 또한 벤 다이어그램으로 설명하는 것도 쉽지 않다. 따라서 구체적인 예시를 통해 직관적으로 받아드릴 수 있도록 한다.

8

목표 | 집합의 결합법칙이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 이해하게 한다.

풀이 |



따라서 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$가 성립한다.

교과서 28 쪽

문제 8 세 집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

❶ 일반적으로 세 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다. 이것을 집합의 **결합법칙**이라고 한다.

- $(A\cup B)\cup C$
  $=A\cup(B\cup C)$
  $=A\cup B\cup C$
- $(A\cap B)\cap C$
  $=A\cap(B\cap C)$
  $=A\cap B\cap C$

집합의 결합법칙

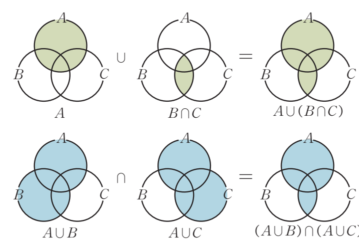
(1) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ [합집합에 대한 결합법칙]

(2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ [교집합에 대한 결합법칙]

예제 02 세 집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

풀이



따라서 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$가 성립한다.

문제 9 세 집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

본문 해설

❶ 합집합, 교집합의 정의를 이용하면

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cup C&=\{x\mid x\in(A\cup B)\text{ 또는 }x\in C\}\\&=\{x\mid(x\in A\text{ 또는 }x\in B)\text{ 또는 }x\in C\}\\&=\{x\mid x\in A\text{ 또는 }(x\in B\text{ 또는 }x\in C)\}\\&=\{x\mid x\in A\text{ 또는 }x\in(B\cup C)\}\\&=A\cup(B\cup C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cap C&=\{x\mid x\in(A\cap B)\text{ 그리고 }x\in C\}\\&=\{x\mid(x\in A\text{ 그리고 }x\in B)\text{ 그리고 }x\in C\}\\&=\{x\mid x\in A\text{ 그리고 }(x\in B\text{ 그리고 }x\in C)\}\\&=\{x\mid x\in A\text{ 그리고 }x\in(B\cap C)\}\\&=A\cap(B\cap C)\end{aligned}$$

이므로 합집합, 교집합에 대한 결합법칙이 성립한다.
이때 결합법칙이 성립한다는 것은 연산의 순서에 관계가 없다는 것이므로

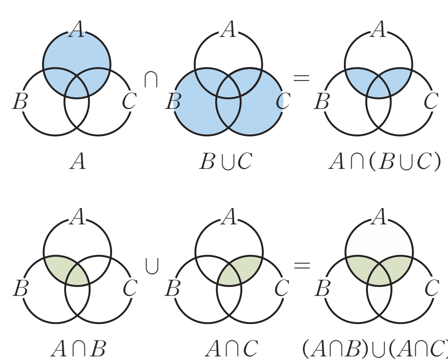
$(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$, $(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$

로 나타낼 수 있다.

9

목표 | 집합의 분배법칙이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 이해하게 한다.

풀이 |



따라서 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$가 성립한다.

교과서 29 쪽

❶ 일반적으로 세 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다. 이것을 집합의 **분배법칙**이라고 한다.

$A\cup(B\cap C)$
$=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
$A\cap(B\cup C)$
$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

집합의 분배법칙

(1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

문제 10 18의 약수의 집합을 A, 30의 약수의 집합을 B, 10보다 작은 자연수의 집합을 C라고 할 때, 다음이 성립함을 보여라.

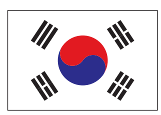
(1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

드모르간의 법칙이란 무엇인가?

생각 열기 팔괘

팔괘는 고대 우리나라와 중국에서 세상의 이치를 설명하기 위하여 사용했던 것으로, 이어진 선(━)과 끊어진 선(╍)으로 이루어져 있다. 이것은 건(乾: ☰), 태(兌: ☱), 이(離: ☲), 진(震: ☳), 손(巽: ☴), 감(坎: ☵), 간(艮: ☶), 곤(坤: ☷)의 8가지 상인데, 이 중에서 태극기에 그려져 있는 '건, 이, 감, 곤'은 각각 '하늘, 불, 물, 땅'을 의미한다.

탐구 활동 팔괘 전체의 집합을 U라 하고, 태극기에 있는 괘의 집합을 A, 끊어진 선(╍)이 2개 이상인 괘의 집합을 B라고 할 때, 다음을 비교하여 보자.



1. $A-B$와 $A\cap B^C$
2. $(A^C)^C$과 A
3. $(A\cup B)^C$과 $A^C\cap B^C$
4. $(A\cap B)^C$과 $A^C\cup B^C$

10

목표| 구체적인 예시를 이용하여 분배법칙이 성립함을 확인할 수 있게 한다.

풀이| $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
$B=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
$C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(1) $A\cup(B\cap C)=\{1, 2, 3, 5, 6, 9, 18\}$
$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1, 2, 3, 5, 6, 9, 18\}$
따라서 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$가 성립한다.

(2) $A\cap(B\cup C)=\{1, 2, 3, 6, 9\}$
$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{1, 2, 3, 6, 9\}$
따라서 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$가 성립한다.

생각 열기 참/고/자/료

팔괘에서 태는 늪, 진은 천둥, 손은 바람, 간은 산을 의미한다.

본문 해설

❶ 합집합, 교집합의 정의를 이용하면

$$\begin{aligned} A\cup(B\cap C) &= \{x \mid x\in A \text{ 또는 } x\in(B\cap C)\} \\ &= \{x \mid x\in A \text{ 또는 } (x\in B \text{ 그리고 } x\in C)\} \\ &= \{x \mid (x\in A \text{ 또는 } x\in B) \\ &\qquad \text{그리고 } (x\in A \text{ 또는 } x\in C)\} \\ &= \{x \mid x\in(A\cup B) \text{ 그리고 } x\in(A\cup C)\} \\ &= (A\cup B)\cap(A\cup C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\cap(B\cup C) &= \{x \mid x\in A \text{ 그리고 } x\in(B\cup C)\} \\ &= \{x \mid x\in A \text{ 그리고 } (x\in B \text{ 또는 } x\in C)\} \\ &= \{x \mid (x\in A \text{ 그리고 } x\in B) \\ &\qquad \text{또는 } (x\in A \text{ 그리고 } x\in C)\} \\ &= \{x \mid x\in(A\cap B) \text{ 또는 } x\in(A\cap C)\} \\ &= (A\cap B)\cup(A\cap C) \end{aligned}$$

이므로 분배법칙이 성립한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 차집합과 여집합의 뜻과 드모르간의 법칙을 알게 하려는 것이다.

$U=\{$건, 태, 이, 진, 손, 감, 간, 곤$\}$, $A=\{$건, 이, 감, 곤$\}$, $B=\{$진, 감, 간, 곤$\}$이다.

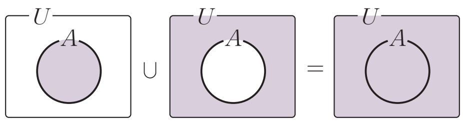
1. $A-B=\{$건, 이$\}$, $A\cap B^C=\{$건, 이$\}$
   따라서 $\boldsymbol{A-B=A\cap B^C}$이다.
2. $(A^C)^C=\{$태, 진, 손, 간$\}^C=\{$건, 이, 감, 곤$\}=A$
   따라서 $\boldsymbol{(A^C)^C=A}$이다.
3. $(A\cup B)^C=\{$태, 손$\}$, $A^C\cap B^C=\{$태, 손$\}$
   따라서 $\boldsymbol{(A\cup B)^C=A^C\cap B^C}$이다.
4. $(A\cap B)^C=\{$건, 태, 이, 진, 손, 간$\}$
   $A^C\cup B^C=\{$건, 태, 이, 진, 손, 간$\}$
   따라서 $\boldsymbol{(A\cap B)^C=A^C\cup B^C}$이다.

11

목표| 벤 다이어그램을 이용하여 집합의 연산에 관한 등식이 성립함을 보일 수 있게 한다.

풀이|

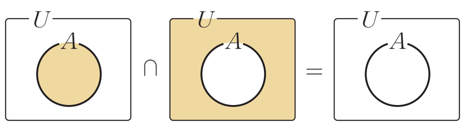
(1)



A　　　A^c　　　$A\cup A^c$

따라서 $A\cup A^C=U$가 성립한다.

(2)



A　　　A^c　　　$A\cap A^c$

따라서 $A\cap A^C=\varnothing$이 성립한다.

교과서 30 쪽

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 두 부분집합

$$A=\{2, 4, 6\},\ B=\{3, 4, 6\}$$

에 대하여 $A-B$와 $A\cap B^C$을 구하면 다음과 같다.

$$A-B=\{2\}=A\cap B^C$$

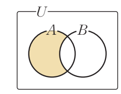
또 $(A^C)^C$과 A를 구하면 다음과 같다.

$$(A^C)^C=\{1, 3, 5\}^C=\{2, 4, 6\}=A$$

예제 03 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

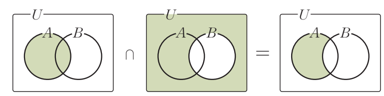
(1) $A-B=A\cap B^C$　　　(2) $(A^C)^C=A$

풀이 (1) $A-B$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽과 같다.



$A-B$

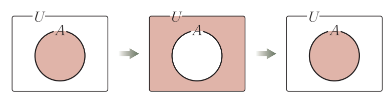
또 $A\cap B^C$을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



A　　　B^C　　　$A\cap B^C$

따라서 $A-B=A\cap B^C$이 성립한다.

(2) $(A^C)^C$을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



A　　　A^C　　　$(A^C)^C$

따라서 $(A^C)^C=A$가 성립한다.

문제 11 전체집합 U의 부분집합 A에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

(1) $A\cup A^C=U$　　　(2) $A\cap A^C=\varnothing$

지/도/자/료　대칭차집합과 그 성질

$(A-B)\cup(B-A)$를 두 집합 A와 B의 대칭차집합(symmetric difference)이라고 한다.

대칭차집합은 집합의 성질을 이용하면 다음과 같이 여러 가지 형태로 바꾸어 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}(A-B)\cup(B-A)&=(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)\\&=(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)\\&=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C\\&=(A\cup B)-(A\cap B)\end{aligned}$$

또한 대칭차집합에 대한 교환법칙과 결합법칙이 성립한다.

즉, 세 집합 A, B, C에 대하여 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$라고 하면

$A\oplus B=B\oplus A$

$A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$

가 성립한다.

읽/기/자/료　힐베르트의 호텔

힐베르트(Hilbert, D. ; 1862~1943)는 무한집합을 다음과 같은 호텔에 비유하여 설명하였다.

어느 호텔이 1호실, 2호실, 3호실, …로 번호가 매겨진 무한히 많은 방을 가졌다고 한다. 호텔이 만원인 상태에서 손님 한 사람이 도착했다. 새로운 손님이 투숙할 수 있도록 무한 호텔의 지배인은 각 호실의 손님들에게 다음과 같이 방송했다.

“참으로 죄송합니다. 새로운 손님이 투숙할 방이 부족하오니, 각 호실에 계신 손님께서는 자신의 객실 번호에 1을 더한 번호의 방으로 옮겨 주시기 바랍니다.”

그렇게 새로운 손님은 1호실에 머물 수 있게 되었다. 잠시 후 이번에는 100명의 손님이 도착하였다. 이 호텔의 지배인은 다음과 같이 방송하였다.

“대단히 죄송합니다. 새로 100명의 손님이 오셔서 방이 부족하오니, 각 호실에 계신 손님께서는 자신의 객실 번호에 100을 더한 번호의 방으로 옮겨 주시기 바랍니다.”

그렇게 새로운 100명의 손님은 1호실에서 100호실까지 머물 수 있게 되었다. 그런데 얼마 후에 또 이 호텔에 A_1, A_2, A_3, …의 무한히 많은 손님이 도착했다. 이 호텔의 지배인은 다음과 같이 방송을 했다.

“정말로 죄송합니다. 각 호실에 계신 손님께서는 자신의 객실 번호에 2배를 한 번호의 방으로 옮겨 주시기 바랍니다.”

그렇게 무한히 많은 A_1, A_2, A_3, …의 손님은 1호실, 3호실, 5호실, …에 머물 수 있게 되었다. 이렇듯 새로운 손님이 들어오고 나가도 무한 호텔의 방은 언제나 모자라지도 남지도 않고 가득 찰 수 있게 되었다.

일반적으로 차집합과 여집합에 대하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

❶ 차집합과 여집합의 성질

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

(1) $A-B=A\cap B^C$　　(2) $(A^C)^C=A$

(3) $A\cup A^C=U$, $A\cap A^C=\varnothing$　　(4) $U^C=\varnothing$, $\varnothing^C=U$

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 두 부분집합

$$A=\{2,\ 4,\ 6\},\ B=\{3,\ 4,\ 6\}$$

에 대하여 $(A\cup B)^C$과 $A^C\cap B^C$, $(A\cap B)^C$과 $A^C\cup B^C$을 구하면 다음과 같다.

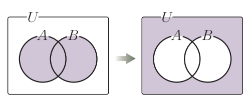
$$(A\cup B)^C=\{1,\ 5\}=A^C\cap B^C$$

$$(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}=A^C\cup B^C$$

예제 04 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

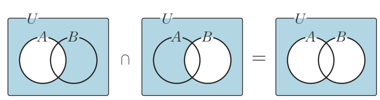
$$\boxed{(A\cup B)^C=A^C\cap B^C}$$

풀이 $(A\cup B)^C$을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$A\cup B$　　$(A\cup B)^C$

또 $A^C\cap B^C$을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



A^C　　B^C　　$A^C\cap B^C$

따라서 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$이 성립한다.

지/도/자/료

1. 합집합, 교집합에 대한 연산은 교환법칙, 결합법칙이 성립하지만 차집합에 대한 연산은 일반적으로 교환법칙, 결합법칙이 성립하지 않는다. 예를 들어

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$일 때, $A-B=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B-A=\{7\}$이므로 $A-B\neq B-A$

또 $(A-B)-C=\{4,\ 6\}$,

$A-(B-C)=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이므로

$(A-B)-C\neq A-(B-C)$

2. 드모르간의 법칙에서 $(A\cup B)^C=A^C\cup B^C$이 아님에 주의해야 한다. 교집합에 관한 드모르간의 법칙도 마찬가지로 $(A\cap B)^C=A^C\cap B^C$가 아님에 주의해야 한다.

3. 집합의 여러 가지 연산법칙에서 오른쪽과 같이 $\cup$, $\cap$, U, $\varnothing$을 차례로 $\cap$, $\cup$, $\varnothing$, U로 바꾸어 놓은 관계식도 그대로 성립한다. 이런 성질을 쌍대성의 원리(principle of daulity)라고 한다.

$$\begin{array}{cccc} \cup & \cap & U & \varnothing \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \cap & \cup & \varnothing & U \end{array}$$

본문 해설

❶ (1) $A-B=\{x\,|\,x\in A$ 그리고 $x\notin B\}$

$=\{x\,|\,x\in A$ 그리고 $(x\in U$ 그리고 $x\notin B)\}$

$=\{x\,|\,x\in A\}\cap\{x\,|\,x\in U$ 그리고 $x\notin B\}$

$=A\cap B^C$

(2) $(A^C)^C=\{x\,|\,x\in U$ 그리고 $x\notin A^C\}$

$=\{x\,|\,x\in A\}$

$=A$

(3) $A\cup A^C=\{x\,|\,x\in A$ 또는 $x\in A^C\}$

$=\{x\,|\,x\in A$ 또는 $(x\in U$ 그리고 $x\notin A)\}$

$=U$

$A\cap A^C=\{x\,|\,x\in A$ 그리고 $x\in A^C\}$

$=\{x\,|\,x\in A$ 그리고 $(x\in U$ 그리고 $x\notin A)\}$

$=\varnothing$

(4) $U^C=\{x\,|\,x\in U$ 그리고 $x\notin U\}=\varnothing$

$\varnothing^C=\{x\,|\,x\in U$ 그리고 $x\notin\varnothing\}=\{x\,|\,x\in U\}=U$

읽/기/자/료 드모르간

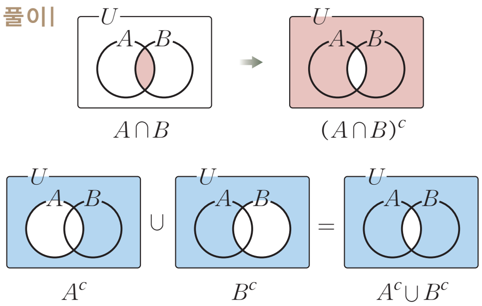
드모르간(De Morgan, A. ; 1806~1871)은 1806년 인도네시아 마두라에서 태어나 케임브리지 대학을 졸업하고 1828년 22세의 어린 나이에 새로 설립된 런던 유니버시티 칼리지의 수학 교수로 임명되어 1831년부터 1836년까지를 제외하고는 1866년까지 교수로 재직했다. 그는 1866년에 '런던 수학회'를 창설하여 초대 회장이 되었다. 수학자로서 그는 수학을 더욱 엄밀한 기초 위에 세우고자 노력했으며, 집합 연산의 기초적 법칙을 발견하였다. 특히 그는 1838년에 당시까지 수학적 증명에서 명확하지 않게 사용되어 오던 절차를 정확히 기술하기 위한 방법으로 수학적 귀납법을 정의하고 도입하였다. 또한 그는 1849년에 복소수의 성질을 기하학적으로 해석하여 4원수(四元數)를 제안하였으며, 분수를 표시할 때 사선을 쓸 것을 제안하여 수학 기호의 발전에도 공헌하였다.

그를 유명하게 한 드모르간의 법칙은 논리학에서 시작되었으나 오늘날에는 논리학뿐만 아니라 집합에서도 유용하게 사용되고 있다. 그의 주요 저서로는 "산술 원론", "대수 원론", "대수학의 기초에 관하여" 등이 있다.

12

목표| 벤 다이어그램을 이용하여 드모르간 법칙이 성립함을 보일 수 있게 한다.

풀이|



따라서 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$이 성립한다.

교과서 32 쪽

문제 12 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$

● 드모르간(De Morgan, A. : 1806~1871): 영국의 수학자로 집합론과 논리학 등의 분야에서 많은 업적을 남겼다.

❶ 일반적으로 합집합과 교집합의 여집합에 대하여 다음이 성립한다. 이것을 **드모르간의 법칙**이라고 한다.

드모르간의 법칙

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

(1) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ (2) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

지금까지 알아본 집합의 연산법칙을 이용하여 집합에 관한 여러 가지 등식이 성립함을 보일 수 있다.

예제 05 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 집합의 성질과 연산법칙을 이용하여 보여라.

$$(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$$

풀이 $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)$ (차집합의 성질)

$=A\cap(B^c\cup C^c)$ (분배법칙)

$=A\cap(B\cap C)^c$ (드모르간의 법칙)

$=A-(B\cap C)$ (차집합의 성질)

문제 13 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 집합의 성질과 연산법칙을 이용하여 보여라.

(1) $A\cup(A\cap B)^c=U$

(2) $A-(A-B)=A\cap B$

본문 해설

❶ (1) $(A\cup B)^C=\{x\,|\,x\in U$ 그리고 $x\notin(A\cup B)\}$

$=\{x\,|\,x\in U$ 그리고 $(x\notin A$ 그리고 $x\notin B)\}$

$=\{x\,|\,x\in U$ 그리고 $x\notin A\}$ $\cap\{x\,|\,x\in U$ 그리고 $x\notin B\}$

$=A^C\cap B^C$

(2) $(A\cap B)^C=\{x\,|\,x\in U$ 그리고 $x\notin(A\cap B)\}$

$=\{x\,|\,x\in U$ 그리고 $(x\notin A$ 또는 $x\notin B)\}$

$=\{x\,|\,x\in U$ 그리고 $x\notin A\}$ $\cup\{x\,|\,x\in U$ 그리고 $x\notin B\}$

$=A^C\cup B^C$

이 성립함을 알 수 있다.

13

목표| 집합의 성질과 연산법칙을 이용하여 등식이 성립함을 보일 수 있게 한다.

풀이| (1) $A\cup(A\cap B)^C$

$=A\cup(A^C\cup B^C)$ (드모르간의 법칙)

$=(A\cup A^C)\cup B^C$ (결합법칙)

$=U\cup B^C$ (여집합의 성질)

$=U$

(2) $A-(A-B)$

$=A-(A\cap B^C)$ (차집합의 성질)

$=A\cap(A\cap B^C)^C$ (차집합의 성질)

$=A\cap\{A^C\cup(B^C)^C\}$ (드모르간의 법칙)

$=A\cap(A^C\cup B)$ (여집합의 성질)

$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$ (분배법칙)

$=\varnothing\cup(A\cap B)$ (여집합의 성질)

$=A\cap B$

지/도/자/료 드모르간의 법칙의 확장

드모르간의 법칙과 결합법칙을 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$(A\cap B\cap C)^C=\{(A\cap B)\cap C\}^C=(A\cap B)^C\cup C^C$

$=A^C\cup B^C\cup C^C$

$(A\cup B\cup C)^C=\{(A\cup B)\cup C\}^C=(A\cup B)^C\cap C^C$

$=A^C\cap B^C\cap C^C$

집합이 4개 이상인 경우에도 마찬가지로 성립한다.

중단원 기초

[해답 p.212]

수준별 학습

1 다음 중에서 집합인 것을 모두 찾아라.

01 집합의 뜻과 표현 — 집합의 뜻

㉠ 4의 약수의 모임
㉡ 작은 자연수의 모임
㉢ 10보다 큰 짝수의 모임
㉣ 우리 반 학생 중에서 축구를 잘하는 학생의 모임

2 다음 중에서 집합 $\{3, 6\}$의 진부분집합을 모두 찾아라.

02 집합 사이의 포함 관계 — 진부분집합

㉠ $\{6\}$　　㉡ $\{6, 3\}$
㉢ $\{3, 6, 9\}$　　㉣ $\varnothing$

3 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 집합 $B=\{1, 2, 3\}$과 서로소인 집합을 모두 구하여라.

03 집합의 연산 — 서로소

4 두 집합 A, B에 대하여

$$n(A)=5,\ n(B)=4,\ n(A\cap B)=2$$

일 때, $n(A\cup B)$를 구하여라.

03 집합의 연산 — 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계

5 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 두 부분집합

$$A=\{1, 3, 5\},\ B=\{2, 3, 5\}$$

에 대하여 다음 집합을 구하고, 같은 집합끼리 짝지어라.

03 집합의 연산 — 드모르간의 법칙

(1) $(A\cup B)^C$　　(2) $A^C\cap B^C$
(3) $(A\cap B)^C$　　(4) $A^C\cup B^C$

중/단/원 기초

1

목표| 집합인 것과 집합이 아닌 것을 구분할 수 있게 한다.

풀이| ㉠ 4의 약수의 모임은 그 대상을 분명히 알 수 있으므로 집합이다.
㉡ 작은 자연수의 모임은 '작다.'는 기준이 사람마다 다르므로 집합이 아니다.
㉢ 10보다 큰 짝수의 모임은 그 대상을 분명히 알 수 있으므로 집합이다.
㉣ 우리 반 학생 중에서 축구를 잘하는 학생의 모임은 '잘한다.'는 기준이 사람마다 다르므로 집합이 아니다.
따라서 집합인 것은 ㉠, ㉢이다.

2

목표| 주어진 집합의 진부분집합을 모두 찾을 수 있게 한다.

풀이| $\{3, 6\}$의 진부분집합은 $\varnothing$, $\{3\}$, $\{6\}$이다. 따라서 $\{3, 6\}$의 진부분집합인 것은 ㉠, ㉣이다.

3

목표| 주어진 집합과 서로소인 집합을 구할 수 있게 한다.

풀이| 집합 A의 부분집합 중에서 집합 B와 서로소인 집합은 $\varnothing$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{4, 5\}$이다.

4

목표| 두 집합의 합집합의 원소의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=5+4-2=\mathbf{7}$

5

목표| 구체적인 예시를 이용하여 드모르간의 법칙이 성립함을 확인할 수 있게 한다.

풀이| (1) $A\cup B=\{1, 2, 3, 5\}$이므로
$(A\cup B)^C=\{\mathbf{4, 6}\}$
(2) $A^C=\{2, 4, 6\}$, $B^C=\{1, 4, 6\}$이므로
$A^C\cap B^C=\{\mathbf{4, 6}\}$
(3) $A\cap B=\{3, 5\}$이므로
$(A\cap B)^C=\{\mathbf{1, 2, 4, 6}\}$
(4) $A^C=\{2, 4, 6\}$, $B^C=\{1, 4, 6\}$이므로
$A^C\cup B^C=\{\mathbf{1, 2, 4, 6}\}$
따라서 같은 집합은 **(1)과 (2), (3)과 (4)**이다.

교과서 34 쪽

중단원 기본

[해답 p.212]

수준별 학습

1 집합 $A=\{x \mid x$는 4의 약수$\}$, $B=\{x \mid x$는 8의 약수$\}$일 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 찾아라.

㉠ $2 \in A$	㉡ $8 \notin B$
㉢ $A \subset B$	㉣ $B \subset A$

01 집합의 뜻과 표현
02 집합 사이의 포함 관계

2 집합 $\{a, b, c\}$의 진부분집합 중에서 a를 원소로 가지는 집합을 모두 구하여라.

02 집합 사이의 포함 관계
진부분집합

3 우리 반에서 가수 H의 공연을 본 적이 있는 학생은 7명, 가수 S의 공연을 본 적이 있는 학생은 10명이다. 가수 H 또는 가수 S의 공연을 본 적이 있는 학생이 12명일 때, 가수 H와 가수 S의 공연을 모두 본 적이 있는 학생은 몇 명인지 구하여라.

03 집합의 연산
합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계

4 집합 $A=\{1, 2, 4, 5\}$에 대하여 다음을 만족시키는 집합 B를 구하여라.

$$(A \cup B)-(A \cap B)=\{1, 3, 4\}$$

03 집합의 연산

5 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음을 간단히 나타내어라.

(1) $A \cap (A \cup B)^C$　(2) $A \cup (A \cup B)^C$
(3) $(A \cup B) \cap (A^C \cap B^C)$　(4) $(A \cap B) \cup (A^C \cup B^C)$

03 집합의 연산
집합의 연산법칙

중/단/원 기본

1

목표| 집합과 원소, 집합과 집합 사이의 포함 관계를 이해하고 기호 $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$를 알맞게 사용할 수 있게 한다.

풀이| $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로
$2 \in A$, $8 \in B$, $A \subset B$, $B \not\subset A$
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

2

목표| 주어진 집합의 진부부집합 중에서 특정 원소를 포함하는 집합을 구할 수 있게 한다.

풀이| 원소 a를 제외한 $\{b, c\}$의 진부분집합인 $\varnothing$, $\{b\}$, $\{c\}$에 a를 포함시키면 되므로 구하는 진부분집합은 $\{\boldsymbol{a}\}$, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$이다.

3

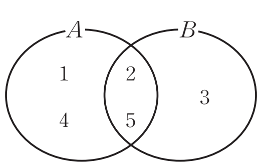
목표| 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계를 이용하여 교집합의 원소의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 가수 H, S의 공연을 본 적이 있는 학생의 집합을 각각 A, B라고 하면
$n(A)=7$, $n(B)=10$, $n(A \cup B)=12$
$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$이므로
$12=7+10-n(A \cap B)$
따라서 $n(A \cap B)=5$이므로 가수 H와 가수 S의 공연을 모두 본 적이 있는 학생은 **5명**이다.

4

목표| 집합의 연산을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 벤 다이어그램으로 나타내면



따라서 B는 $\{\mathbf{2, 3, 5}\}$이다.

5

목표| 집합의 연산법칙을 이용하여 주어진 집합을 간단히 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $A \cap (A \cup B)^C = A \cap (A^C \cap B^C)$
$= (A \cap A^C) \cap B^C$
$= \varnothing \cap B^C = \boldsymbol{\varnothing}$

(2) $A \cup (A \cup B)^C = A \cup (A^C \cap B^C)$
$= (A \cup A^C) \cap (A \cup B^C)$
$= U \cap (A \cup B^C)$
$= \boldsymbol{A \cup B^C}$

(3) $(A \cup B) \cap (A^C \cap B^C)$
$= (A \cup B) \cap (A \cup B)^C = \boldsymbol{\varnothing}$

(4) $(A \cap B) \cup (A^C \cup B^C)$
$= (A \cap B) \cup (A \cap B)^C = \boldsymbol{U}$

교과서 35 쪽

중단원 실력

[해답 p.212]

수준별 학습

1 집합 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$에 대하여

$$X=\{x \mid x=a\times b,\ a\in A,\ b\in A\}$$
$$Y=\{y \mid y=a\div b,\ a\in A,\ b\in A\}$$

일 때, $n(X)$와 $n(Y)$를 구하여라.

01 집합의 뜻과 표현

2 두 집합 $A=\{1,\ 3\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$에 대하여 $A\subset X$, $X\subset B$를 만족시키는 집합 X는 모두 몇 개인지 구하여라.

02 집합 사이의 포함 관계
부분집합

3 두 집합 $A=\{a,\ b,\ 5\}$, $B=\{a+1,\ 4,\ 6\}$에 대하여 $A=B$일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

02 집합 사이의 포함 관계

4 오른쪽 표는 혜진이네 반 학생 30명을 대상으로 놀이 공원에서 바이킹과 범퍼카를 탄 학생 수를 조사하여 나타낸 것이다. 바이킹과 범퍼카 중에서 어느 것도 타지 않은 학생이 3명일 때, 바이킹만 탄 학생은 몇 명인지 구하여라.

놀이 기구	학생 수
바이킹	22명
범퍼카	16명

03 집합의 연산

5 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 집합의 성질과 연산법칙을 이용하여 보여라.

$$(A\cup B)\cap\{C\cup(A^C\cap B^C)\}=(A\cup B)\cap C$$

03 집합의 연산
집합의 연산법칙

중/단/원 실력

1

목표| 주어진 집합의 원소의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $a\in A$, $b\in A$이므로 $a\times b$의 값은 오른쪽과 같다.

a \ b	1	3	5
1	1	3	5
3	3	9	15
5	5	15	25

따라서

$X=\{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 25\}$

이므로 $n(X)=$**6**이다.

$a\in A$, $b\in A$이므로 $a\div b$의 값은 오른쪽과 같다.

a \ b	1	3	5
1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
3	3	9	$\frac{3}{5}$
5	5	$\frac{5}{3}$	25

따라서

$Y=\left\{\frac{1}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{5},\ 1,\ \frac{5}{3},\ 3,\ 5\right\}$

이므로 $n(Y)=$**7**이다.

2

목표| 집합 사이의 포함 관계를 이해하게 한다.

풀이| $A\subset X$, $X\subset B$를 만족시키는 집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 집합 A를 포함하는 집합이다. 즉, 집합 B에서 원소 1, 3을 제외한 $\{5,\ 7,\ 9\}$의 부분집합에 1, 3을 포함시키면 되므로 집합 X가 될 수 있는 집합은

$\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 7\}$, $\{1,\ 3,\ 9\}$, $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $\{1,\ 3,\ 5,\ 9\}$, $\{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$, $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

이다. 따라서 집합 X의 개수는 **8개**이다.

3

목표| 집합 사이의 포함 관계를 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $A=B$이므로 A, B의 모든 원소가 같다. 따라서 $a+1=5$이므로 $\boldsymbol{a=4}$이고,

$A=\{4,\ b,\ 5\}$, $B=\{5,\ 4,\ 6\}$이므로 $\boldsymbol{b=6}$이다.

4

목표| 집합의 연산의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 혜진이네 반 학생 전체의 집합을 U, 바이킹과 범퍼카를 탄 학생의 집합을 각각 A, B라고 하자.

$n(U)=30$, $n(A)=22$, $n(B)=16$, $n((A\cup B)^C)=3$

이므로

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=30-3=27$

바이킹만 탄 학생의 집합은 $A-B$이므로

$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=27-16=11$

따라서 구하는 학생 수는 **11명**이다.

5

목표| 집합의 성질과 연산법칙을 이용하여 집합의 연산에 관한 등식이 성립함을 보일 수 있게 한다.

풀이| $(A\cup B)\cap\{C\cup(A^C\cap B^C)\}$

$=(A\cup B)\cap\{C\cup(A\cup B)^C\}$ (드모르간의 법칙)

$=\{(A\cup B)\cap C\}\cup\{(A\cup B)\cap(A\cup B)^C\}$ (분배법칙)

$=\{(A\cup B)\cap C\}\cup\varnothing$ (여집합의 성질)

$=(A\cup B)\cap C$

2 명제

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해하게 한다.
② 명제의 역과 대우를 이해하게 한다.
③ 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해하게 한다.
④ 필요조건과 충분조건을 이해하게 한다.
⑤ 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 명제와 증명	명제의 뜻
	정의, 증명, 정리
02 조건과 진리집합	명제와 조건의 부정
	진리집합
	‘모든’과 ‘어떤’을 포함하는 명제
03 명제의 역과 대우	명제의 역과 대우
	명제와 그 대우 사이의 관계
	귀류법
04 필요조건과 충분조건	충분조건, 필요조건
05 절대부등식	절대부등식의 증명
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

들어가면서 주어진 상황에 대하여 정확한 판단을 하고 합리적인 결론을 내릴 수 있도록 하기 위해서는 논리적인 사고가 요구된다. 이때 밑바탕이 되는 것이 명제이다.
이 단원에서는 수학과 논리적 사고의 기초가 되는 명제를 토대로 하여 수학적 사고의 기초를 다질 수 있도록 지도한다.

교과서 36 쪽

2 명제

소크라테스와 추론

고대 그리스의 철학자 소크라테스(Socrates ; ?B.C. 470~B.C. 399)는 현명하다고 이름난 여러 사람들을 찾아가 자문을 구하였다. 그런데 막상 그들과 토론하여 보니 소문과는 다르게 현명하지 않다는 결론을 내렸고, 그들의 무지를 밝히는 토론과 추론을 계속하였다. 결국 소크라테스는 많은 적을 만들게 되었고 재판에서 젊은이들에게 나쁜 영향을 끼쳤다는 죄로 사형 선고를 받았다. 그는 재판이 끝난 후 살 수 있는 기회가 있었지만 여러 가지 사실로부터 죽는 것이 옳다는 결론을 내리고 죽음을 맞이하였다.

소크라테스의 죽음(The Death of Socrates): 프랑스의 화가 다비드(David, J. L. ; 1748~1825)의 작품으로 소크라테스가 독배를 마시기 직전의 모습이다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 53쪽

여러 가지 사실로부터 옳은 결론을 어떻게 도출할 수 있을까?

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해한다.	상	조건의 진리집합을 구하고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제의 참, 거짓을 판단하여 그 이유를 설명할 수 있다.
	중	조건의 진리집합을 구할 수 있다.
	하	명제와 조건을 구분할 수 있다.
2. 명제의 역과 대우를 이해한다.	상	명제의 역과 대우를 말하고, 참, 거짓을 판단할 수 있다.
	중	명제의 역과 대우를 말할 수 있다.
	하	명제의 역을 말할 수 있다.
3. 필요조건과 충분조건을 이해한다.	상	충분조건, 필요조건, 필요충분조건을 판별하고, 조건의 진리집합 사이의 관계를 설명할 수 있다.
	중	충분조건, 필요조건, 필요충분조건을 판별할 수 있다.
	하	충분조건, 필요조건, 필요충분조건의 뜻을 말할 수 있다.

교과서 37 쪽

01 명제와 증명

● 명제의 뜻을 안다.

명제란 무엇인가?

생각 열기 오늘 날씨는 따뜻하다?

탐구 활동 다음 문장을 보고, 물음에 답하여 보자.

ㄱ. 독도는 대한민국의 영토이다.	ㄴ. 코끼리는 용감하다.
ㄷ. 4는 8의 약수이다.	ㄹ. 태양은 지구보다 작다.

1. 참인 문장은 어느 것인가?
2. 거짓인 문장은 어느 것인가?
3. 참인지 거짓인지를 판별할 수 없는 문장은 어느 것인가?

우리가 사용하는 문장이나 식 중에는 그 내용이 참인지 거짓인지를 판별할 수 있는 것과 판별할 수 없는 것이 있다.

이때 그 내용이 참인지 거짓인지를 명확히 판별할 수 있는 문장이나 식을 **명제**라고 한다.

성취 기준		성취 수준
4. 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.	상	절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.
	중	절대부등식인 것과 아닌 것을 구분할 수 있다.
	하	절대부등식의 뜻을 말할 수 있다.
5. 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.	상	귀류법 또는 대우를 이용하여 주어진 명제를 증명할 수 있다.
	중	주어진 명제를 귀류법 또는 대우를 이용하여 증명하는 과정을 완성할 수 있다.
	하	명제의 부정 또는 대우를 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

01 명제와 증명

소단원 지도 목표

① 명제의 뜻을 알고, 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.
② 명제의 가정과 결론의 뜻을 알고, 명제의 가정과 결론을 구분할 수 있게 한다.
③ 용어의 정의, 정리, 증명의 의미를 이해하고, 간단한 증명을 할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 명제의 증명은 간단한 것만 다룬다.

2. 명제의 뜻은 수학적인 문장을 이해하는 수준에서 간단히 다룬다.

3. 어떤 명제를 증명하기 위해서는 먼저 그 명제의 가정과 결론을 분명히 구분해야 함을 알게 한다.

새로 나온 용어와 기호

- 명제(命題, proposition)
- 가정(假定, hypothesis)
- 결론(結論, conclusion)
- 정의(定義, definition)
- 증명(證明, proof)
- 정리(定理, theorem)
- $p \longrightarrow q$

생각 열기 참/고/자/료

'오늘 날씨는 따뜻하다.'라는 문장에서 '따뜻하다.'의 기준은 사람마다 다르기 때문에 이 문장은 참인지 거짓인지를 명확히 판별할 수 없다. 이를 통해 자연스럽게 명제의 뜻을 이해하게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 일상생활에서 사용하는 문장의 참, 거짓을 판별해 봄으로써 명제의 뜻을 알게 하려는 것이다.

1. 참인 문장은 ㄱ, ㄷ이다.

2. 거짓인 문장은 ㄹ이다.

3. 참인지 거짓인지 판별할 수 없는 문장은 ㄴ이다.

교과서 38 쪽

예제 01 다음 중에서 명제인 것을 모두 찾고, 그것이 참인지 거짓인지를 말하여라.

1 참, 거짓을 분명하게 판별할 수 있는 것을 찾는다.

(1) $2x-3<1$

(2) 7은 2의 배수이다.

(3) 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이다.

풀이 (1) $x=1$이면 참이 되고 $x=3$이면 거짓이 되어 '$2x-3<1$'은 참인지 거짓인지를 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

(2) 7은 2의 배수가 아니므로 거짓인 명제이다.

(3) 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로 참인 명제이다.

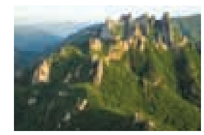
답 (1) 명제가 아니다. (2) 거짓인 명제 (3) 참인 명제

문제 1 다음 중에서 명제인 것을 모두 찾고, 그것이 참인지 거짓인지를 말하여라.

(1) 설악산은 높다.

(2) $a=b$이면 $a+3=b+3$이다.

(3) 넓이가 같은 두 삼각형은 서로 합동이다.



명제 '$x=2$이면 $3x-1=5$이다.'에서 '$x=2$'를 p라 하고, '$3x-1=5$'를 q라고 하면 이 명제는

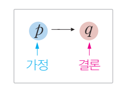
'p이면 q이다.'

의 꼴로 나타내어진다.

2 이때 명제 'p이면 q이다.'에서 p를 가정, q를 결론이라고 하며, 이것을 기호로

$$p \longrightarrow q$$

와 같이 나타낸다.



보기 (1) 명제 '$x=-3$이면 $|x|=3$이다.'에서 '$x=-3$'은 가정이고, '$|x|=3$'은 결론이다.

(2) 명제 '맞꼭지각의 크기는 서로 같다.'를 $p \longrightarrow q$의 꼴로 바꾸면

'두 각이 맞꼭지각이면 두 각의 크기는 서로 같다.'

이므로 '두 각은 맞꼭지각이다.'는 가정이고, '두 각의 크기는 서로 같다.'는 결론이다.

본문 해설

1 명제는 참, 거짓을 판별할 수 있는 문장이나 식이므로 감탄문, 의문문, 명령문은 명제가 아니다. 또 방정식 $x+3=7$, 부등식 $x+3<7$과 같이 x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지는 것도 명제가 아니다.

그러나 $x+3=3+x$와 같은 항등식은 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로 명제이다.

1

목표 | 명제인 것과 명제가 아닌 것을 구분하고 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

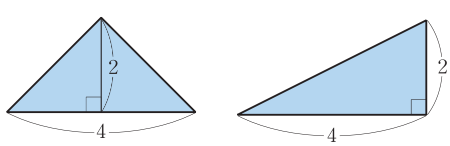
풀이 (1) '높다'의 기준이 명확하지 않아 참인지 거짓인지를 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

(2) $a=b$이면 $a+3=b+3$은 항상 참이므로 **참인 명제**이다.

(3) 다음 두 삼각형의 각각의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times4\times2=4$$

로 같지만 서로 합동이 아니므로 **거짓인 명제**이다.



본문 해설

2 주어진 문장이나 식이 명제인 경우 가정과 결론이 잘 드러나지 않는 형태로 제시될 수도 있지만 어떠한 경우라도 'p이면 q이다.'의 꼴로 바꾸어 나타낼 수 있다.

예 명제 '평행사변형은 사다리꼴이다.'를 $p \longrightarrow q$의 꼴로 바꾸면 '주어진 사각형이 평행사변형이면 그 사각형은 사다리꼴이다.'와 같이 나타낼 수 있다. 이때 '주어진 사각형은 평행사변형이다.'는 가정이고, '주어진 사각형은 사다리꼴이다.'는 결론이다.

지/도/자/료 명제에 대한 오개념 지도 방법

1. '대한민국의 수도는 부산이다.', '$3<2$'와 같이 거짓인 문장이나 식은 명제가 아니라고 생각하는 경우가 많다. 거짓이 분명한 문장이나 식의 예를 풍부하게 들어 항상 거짓인 문장이나 식도 명제임을 자연스럽게 인식할 수 있도록 지도한다.
2. 많은 학생들이 명제가 모든 경우에 성립하지 않아야 거짓이라고 착각하므로 명제가 거짓임을 보이려면 그 명제가 옳지 않음을 보여주는 하나의 예만 찾으면 된다는 것을 강조한다. 이때 명제가 거짓임을 말해주는 예를 '반례(counter example)'라고 한다.
   예 명제 '$x^2>1$이면 $x>1$이다.'는 거짓이다.
   왜냐하면 $x=-2$일 때 $x^2>1$이지만 $x<1$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
3. 가정과 결론이 잘 드러나지 않는 형태의 명제를 'p이면 q이다.'의 꼴로 나타낼 때에는 원래의 명제의 내용이 바뀌지 않도록 주의하게 한다.

문제 2 다음 명제의 가정과 결론을 말하여라.

(1) $x^2 \le 4$이면 $-2 \le x \le 2$이다.

(2) 두 수 a, b가 자연수이면 $a+b$는 자연수이다.

문제 3 다음 명제의 가정과 결론을 말하여라.

'p이면 q이다.'의 꼴로 바꾼 뒤에 가정과 결론을 찾는다.

(1) 정삼각형 ABC의 세 내각의 크기는 같다.

(2) 함수 $f(x)=(x-3)^2+2$의 최솟값은 2이다.

용어의 정의, 정리, 증명이란 무엇인가?

탐구 활동 다음 그림을 보고, 물음에 답하여 보자.

1. 세 학생이 '눈'을 다르게 생각한 이유를 말하여 보자.
2. '눈'과 같이 하나의 단어를 사람마다 다르게 생각할 수 있는 경우를 말하여 보자.

일상생활에서 사용하고 있는 용어의 뜻을 사람마다 다르게 말하면 혼란이 일어날 수도 있으므로 이에 대한 분명한 약속이 필요하다.

마찬가지로 수학에서 사용하는 용어도 그 뜻을 명확하게 밝혀야 의미를 제대로 전달할 수 있다.

2

목표| 주어진 명제의 가정과 결론을 구분할 수 있게 한다.

풀이| (1) 가정: $x^2 \le 4$

결론: $-2 \le x \le 2$

(2) 가정: 두 수 a, b는 자연수이다.

결론: $a+b$는 자연수이다.

3

목표| 주어진 명제의 가정과 결론을 구분할 수 있게 한다.

풀이| (1) 가정: 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

결론: 삼각형 ABC의 세 내각의 크기는 같다.

(2) 가정: 함수 $f(x)=(x-3)^2+2$이다.

결론: 함수 f의 최솟값은 2이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 하나의 용어를 여러 가지 의미로 사용하면 혼란이 오고 불편하므로 용어를 명확하게 정의할 필요성을 느끼게 하려는 것이다.

1. '눈'의 뜻은 여러 가지인데 선생님께서 준비물인 눈의 뜻을 분명하게 설명하지 않아서이다.

2. (i) 배

① 사람이나 동물의 몸에서 가슴과 엉덩이 사이의 부위

② 사람이나 짐 따위를 싣고 물 위로 떠다니도록 나무나 쇠로 만든 물건

③ 배나무의 열매

등

(ii) 발

① 사람이나 동물의 다리 맨 끝 부분

② 총알, 포탄, 화살 따위를 쏜 횟수를 세는 단위

③ 실이나 국수 따위의 가늘고 긴 물체의 가락

등

기/초/력 향상 문제

다음 중에서 명제인 것을 모두 찾아라.

1 $\sqrt{3}$은 무리수이다.

2 새가 되면 좋겠다!

3 지금은 덥다.

4 호주는 더운 나라다.

5 닮음인 두 삼각형의 넓이는 같다.

6 3×5

7 -4는 음수이다.

답 1, 5, 7

본문 해설

❶ 수학에서 사용하는 용어, 기호는 혼동이나 혼용을 막기 위해서 하나만을 정해 놓은 것이므로 그 용어를 다르게 말한 것은 정의는 아니지만 틀린 것도 아니다. 다르게 말하여진 것은 증명을 통하여 정리가 될 수 있다. 예를 들어 명제 '이등변삼각형은 두 변의 길이가 같은 삼각형이다.'는 정의이다. 그러나 명제 '이등변삼각형은 두 밑각의 크기가 같다.'는 정리이고 참인 명제이다.

4

목표 | 도형에서 사용하는 용어의 정의를 명확하게 이해하게 한다.

풀이 | (1) 두 도형이 모양과 크기가 같아서 완전히 포개어지는 것

(2) 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 사용하여 도형을 그리는 것

(3) 한 내각이 직각인 삼각형

(4) 네 변의 길이가 모두 같고, 네 내각의 크기가 모두 같은 사각형

교과서 40 쪽

이등변삼각형의 뜻은

'두 변의 길이가 같은 삼각형'

'두 내각의 크기가 같은 삼각형'

과 같이 서로 다르게 말할 수 있지만 한 용어의 뜻을 여러 가지로 정하면 혼란이 생길 수 있으므로 '두 변의 길이가 같은 삼각형'으로 정한다.

❶ 이와 같이 용어의 뜻을 명확하게 정한 문장을 그 용어의 **정의**라고 한다.

● 정의는 용어의 뜻에 대한 약속이다.

보기 정삼각형과 직사각형의 정의는 각각 다음과 같다.

(1) 정삼각형: 세 변의 길이가 모두 같은 삼각형

(2) 직사각형: 네 내각의 크기가 모두 같은 사각형

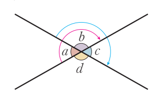
문제 4 다음 용어의 정의를 말하여라.

(1) 합동 (2) 작도

(3) 직각삼각형 (4) 정사각형

명제 '맞꼭지각의 크기는 서로 같다.'가 참임을 설명하여 보자.

오른쪽 그림에서



$$\angle a+\angle b=180^\circ,\ \angle b+\angle c=180^\circ$$

이므로 $\angle a+\angle b=\angle b+\angle c$에서

$$\angle a=\angle c$$

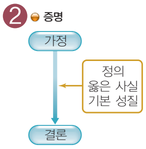
이다. 마찬가지 방법으로

$$\angle b=\angle d$$

임을 알 수 있다.

따라서 명제 '맞꼭지각의 크기는 서로 같다.'는 참이다.

❷ ● 증명



이와 같이 실험이나 경험을 따르지 않고 정의나 이미 알고 있는 옳은 사실, 밝혀진 성질 등을 이용하여 명제의 가정으로부터 결론을 체계적으로 이끌어 내어 명제가 참임을 설명하는 것을 **증명**이라고 한다.

본문 해설

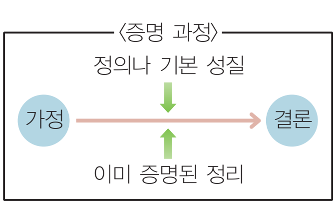
❷ 일반적으로 명제를 증명을 할 때에는 다음과 같은 순서에 따르면 편리하다.

❶ 주어진 명제를 이해하고, 명제를 가정과 결론으로 나눈다.

❷ 명제의 내용에 알맞은 그림을 그리고 기호를 사용하여 나타낸다.

❸ 주어진 명제와 관련된 정의, 정리, 성질을 생각한다.

❹ 가정과 앞에서 생각한 정의, 정리, 성질 등으로부터 결론을 이끌어 낸다.



지/도/자/료

1. 무정의 용어

수학에서 사용하는 용어를 정의할 때 다른 용어가 필요해지고 다른 용어를 정의하기 위해서는 또 다른 용어가 필요해진다. 이와 같이 계속 정의를 하다보면 가장 기본적이고 직관적인 용어에 이르게 되는데 이러한 용어는 더 이상 정의하지 않고 그대로 사용하게 된다. 이와 같이 한 용어의 정의에 다른 용어를 사용할 때, 정의 없이 사용하는 용어를 무정의 용어라고 한다. 예를 들어 '점', '선', '면'은 무정의 용어이다.

2. 여러 가지 도형의 정의

- 이등변삼각형: 두 변의 길이가 같은 삼각형
- 정삼각형: 세 변의 길이가 모두 같은 삼각형
- 예각삼각형: 세 내각의 크기가 모두 예각인 삼각형
- 직각삼각형: 한 내각의 크기가 직각인 삼각형
- 둔각삼각형: 한 내각의 크기가 둔각인 삼각형
- 사다리꼴: 한 쌍의 대변이 서로 평행인 사각형

또한 참임이 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것이나 여러 가지 성질을 증명할 때 자주 이용되는 것을 정리라고 한다.

예를 들어 다음은 모두 정리이다.

'평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 동위각과 엇각의 크기는 각각 서로 같다.'

'삼각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.'

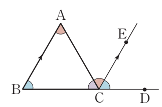
예제 02 삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은 180°임을 증명하여라.

명제가 참임을 증명할 때에는 다음과 같은 순서를 따르면 편리하다.
❶ 무엇을 증명해야 하는지를 파악하고, 주어진 명제를 가정과 결론으로 나눈다.
❷ 가정에 알맞은 그림을 그리고 기호를 붙인다.
❸ 정의, 이미 알고 있는 옳은 사실, 밝혀진 성질 등을 이용하여 가정에서 결론을 이끌어 낸다.

가정 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$는 삼각형 ABC의 세 내각이다.

결론 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

증명 삼각형 ABC에서 변 BC의 연장선 위에 점 D를 잡고, 꼭짓점 C에서 변 AB에 평행하도록 반직선 CE를 그으면



$\angle A=\angle ACE$ (엇각)

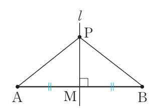
$\angle B=\angle ECD$ (동위각)

이므로

$\angle A+\angle B+\angle C=\angle ACE+\angle ECD+\angle ACB=180^\circ$ (평각)

따라서 삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은 180°이다.

문제 5 다음은 선분 AB의 수직이등분선 l과 선분 AB의 교점을 M이라고 할 때, 직선 l 위의 점 M이 아닌 한 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PB}$임을 증명하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.



[가정] 직선 l은 선분 AB의 수직이등분선이고, 점 M은 선분 AB와 직선 l의 교점이다.
$\overline{AM}=\overline{BM}$, $\angle AMP=\angle BMP=$ □

[결론] $\overline{PA}=\overline{PB}$

[증명] 삼각형 PAM과 삼각형 PBM에서

$\overline{AM}=\overline{BM}$ (가정) ……①

$\angle AMP=\angle BMP=$ □ (가정) ……②

□은 공통 ……③

①, ②, ③에서 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로

$\triangle PAM\equiv$ □

따라서 $\overline{PA}=\overline{PB}$이다.

• 평행사변형: 두 쌍의 대변이 서로 평행인 사각형
• 직사각형: 네 각의 크기가 모두 같은 사각형
• 마름모: 네 변의 길이가 모두 같은 사각형
• 정사각형: 네 각의 크기가 모두 같고, 네 변의 길이가 모두 같은 사각형
• 등변사다리꼴: 한 쌍의 대변이 평행하고, 두 밑각의 크기가 같은 사각형

5

목표 | 명제를 가정과 결론으로 나눈 다음 가정과 기본적인 성질을 이용하여 결론을 이끌어낼 수 있게 한다.

풀이 | **[가정]** 직선 l은 선분 AB의 수직이등분선이고, 점 M은 선분 AB와 직선 l의 교점이다.
$\overline{AM}=\overline{BM}$, $\angle AMP=\angle BMP=\boxed{90^\circ}$

[결론] $\overline{PA}=\overline{PB}$

[증명] 삼각형 PAM과 삼각형 PBM에서

$\overline{AM}=\overline{BM}$ (가정) …… ①

$\angle AMP=\angle BMP=\boxed{90^\circ}$ (가정) …… ②

$\boxed{\overline{PM}}$은 공통 …… ③

①, ②, ③에서 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로

$\triangle PAM\equiv\boxed{\triangle PBM}$

따라서 $\overline{PA}=\overline{PB}$이다.

지/도/자/료 증명할 때 유의할 점

명제를 증명할 때에는 다음을 유의하도록 지도한다.

1. 가정에 제시된 내용은 모두 활용하도록 한다.
2. 옳지 않은 성질은 이용하지 않도록 한다.
3. 주관적인 추측이나 아직 증명하지 않은 성질은 비록 옳을지라도 이용하지 않도록 한다.
4. 그림의 모양만으로 섣부른 결론을 내리지 않도록 한다.
5. 보조적으로 사용된 개념, 성질, 기호 등에 관한 설명을 빠뜨리지 않도록 한다.
6. 증명하고자 하는 결론을 중간 과정에서 사용하지 않도록 한다.

읽/기/자/료 공리와 공준

증명하지 않고 옳다고 인정하는 기본적인 명제를 공리(axiom) 또는 공준(postulate)이라고 한다. 유클리드(Euclid ; ?B.C. 325~?B.C. 265)의 "원론"에서는 다음의 5가지 공준을 제시하고 있다.

[공준 1] 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점을 지나는 직선은 유일하게 존재한다.

[공준 2] 임의의 두 선분 AB, CD에 대하여 점 B가 점 A와 E 사이에 있고, 선분 CD가 선분 BE와 합동인 점 E가 유일하게 존재한다.

[공준 3] 임의의 서로 다른 두 점 O, A에 대하여 중심이 O이고, 반지름이 OA인 원이 존재한다.

[공준 4] 모든 직각은 서로 합동이다.

[공준 5] 한 직선 l과 l 위에 있지 않은 한 점 P가 주어질 때, 점 P를 지나고 직선 l과 평행인 직선 m이 유일하게 존재한다.

유클리드는 일반적이고 보편적인 것을 공리, 좀 더 구체적인 것을 공준이라고 구별하였지만 오늘날에는 특별히 구분하지 않는다.

02 조건과 진리집합

소단원 지도 목표

① 조건의 의미를 이해하게 한다.
② 명제 또는 조건의 부정을 이해하게 한다.
③ 진리집합을 구할 수 있게 한다.
④ '모든'과 '어떤'이 들어 있는 명제의 참, 거짓을 구별할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 조건의 뜻은 수학적인 문장을 이해하는 수준에서 간단히 다룬다.

2. 진리집합의 뜻을 명확하게 이해하게 하고, 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓을 진리집합의 포함 관계를 이용하여 판별할 수 있게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 조건(條件, condition)
• 부정(否定, negation)
• 진리집합(眞理集合, truth set)
• $\sim p$

교과서 42 쪽

02 조건과 진리집합

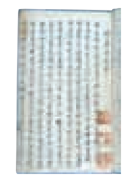
● 조건의 뜻을 알고, '모든', '어떤'을 포함한 명제를 이해한다.

명제와 조건의 부정을 어떻게 하는가?

생각 열기

별주부전

토끼전이라고도 하는 별주부전은 동물을 의인화한 우화 소설로 조선 후기에 판소리로 불렸다. 현재 약 55종의 서로 다른 판본이 전해지고 있기 때문에 어떤 판본이냐에 따라 별주부전, 토끼전, 토별가, 수궁가, 퇴별전, 퇴별가, 토의 간 등 다양하게 불린다.



탐구 활동

다음 그림을 보고, 물음에 답하여 보자.

1. ①, ② 중에서 명제인 것은 어느 것인가?
2. ③의 대답으로 'x는 바다 동물이다.'가 참이 되도록 x에 알맞은 동물을 말하여 보자.
3. ④는 참인 명제이다. 이 명제를 거짓인 명제로 만들려면 어떻게 해야 하는지 말하여 보자.

탐구 활동에서 '문어는 바다 동물이다.'는 참인 명제이고, 'x는 바다 동물이다.'는 명제가 아니다.

그런데 'x는 바다 동물이다.'에서 x가 '고등어'이면 '고등어는 바다 동물이다.'는 참인 명제가 되고, x가 '사슴'이면 '사슴은 바다 동물이다.'는 거짓인 명제가 된다.

1 이와 같이 변수 x를 포함하는 문장이나 식이 x의 값에 따라 참, 거짓이 결정될 때, 이 문장이나 식을 **조건**이라고 한다.

● 일반적으로 조건은 명제가 아니다.

보기 (1) '2는 짝수이다.'는 참, 거짓을 판별할 수 있으므로 명제이다.
(2) 'x는 짝수이다.'는 x의 값에 따라 참이나 거짓이 결정되므로 조건이다.

생각 열기 참/고/자/료

별주부전은 춘향전, 심청전 등과 같이 영 · 정조 시대에 형성된 작품으로, 판소리 수궁가를 소설화한 것이다. 옛날부터 전하는 고구려의 설화인 귀토지설에 재미있고 우스운 익살을 가미한 내용으로 한글이 생기자 정착된 의인소설이다. 판본에 따라서 내용이 약간씩 다르기는 하나, 우화적이고 고사를 인용해가며 미사여구로 표현하여 전편에 희극적인 분위기를 조성한 점에서 공통적이다.
한국전통소리문화 홈페이지(http://www.koreamusic.org)에서 수궁가 일부의 판소리 음성 자료를 들어볼 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 명제와 조건을 구분하고, 그것의 부정을 알도록 하기 위한 것이다.

1. ①은 의문문이므로 참, 거짓을 판별할 수 없다.
따라서 명제가 아니다.
②의 '별주부전은 소설이다.'는 참, 거짓을 판별할 수 있으므로 명제이다.

2. 'x는 바다 동물이다.'에서 x가 **자라, 문어, 상어, 갈치** 등이면 참이다.

3. '문어는 바다 동물이다.'는 참인 명제이므로 참이 아니라고 하면 거짓이 된다. 즉, **'문어는 바다 동물이 아니다.'**라고 하면 거짓이 된다.
참고| '문어가 아닌 것은 바다 동물이다.'나 '바다 동물은 문어이다.'도 거짓이다. 이와 같이 주어진 명제를 거짓으로 만드는 방법은 여러 가지가 있다.

교과서 43 쪽

문제 1 다음에 주어진 문장이나 식을 명제와 조건으로 구별하여라.

(1) $x^2-2x+1=0$

(2) 직사각형은 정사각형이다.

(3) $|x|<1$이면 $-1<x<1$이다.

(4) x는 실수가 아니다.

어떤 명제 또는 조건 p에 대하여 'p가 아니다.'를 p의 **부정**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\sim p$$

와 같이 나타낸다.

일반적으로 명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, 명제 p가 거짓이면 $\sim p$는 참이다.
또 $\sim p$의 부정은 p이다. 즉, $\sim(\sim p)=p$이다.

$\sim p$를 'p가 아니다.' 또는 'not p'라고 읽는다.

보기 (1) 명제 '3은 소수이다.'의 부정은 '3은 소수가 아니다.'이다.
(2) 조건 '$x=1$'의 부정은 '$x\neq1$'이다.

문제 2 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 2는 4의 배수이다. (2) $2+3>4$

(3) $\sqrt{3}$은 무리수이다. (4) $1^2+2^2=3^2$

문제 3 다음 조건의 부정을 말하여라.

(1) $x=2$ (2) x는 2의 배수이다.

(3) $x\leq3$ (4) x는 5의 약수가 아니다.

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

조건 'x는 짝수이다.'의 부정으로 'x는 홀수이다.'가 옳은지 토의하여 보자.

본문 해설

❶ 명제에는 참인 명제와 거짓인 명제가 있다. 이를테면 '$3>2$'는 참인 명제이고, '$3<2$'는 거짓인 명제이다. 그러나 '2×3'은 참, 거짓을 판별할 수 없고, '$x>2$'는 $x=3$일 때에는 참이 되지만 $x=1$일 때에는 거짓이 되므로 명제라고 할 수 없다. 이와 같이 x의 값에 따라 참, 거짓이 결정되는 문장이나 식을 조건이라고 한다.

1

목표| 명제와 조건의 뜻을 알고, 명제와 조건을 구별할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x=1$이면 참이 되고, 그렇지 않으면 거짓이 되므로 **조건**이다.

(2) 직사각형 중에서 정사각형이 아닌 것이 있으므로 거짓인 **명제**이다.

(3) 모든 x에 대하여 성립하므로 참인 **명제**이다.

(4) $x=i$이면 참이 되지만 $x=2$이면 거짓이 되므로 **조건**이다.

2

목표| 명제의 부정을 알고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) **2는 4의 배수가 아니다. (참)**

(2) $\mathbf{2+3\leq4}$ **(거짓)**

(3) $\sqrt{3}$**은 무리수가 아니다. (거짓)**

(4) $\mathbf{1^2+2^2\neq3^2}$ **(참)**

3

목표| 조건의 부정을 알게 한다.

풀이| (1) $\boldsymbol{x\neq2}$

(2) $\boldsymbol{x}$**는 3의 배수가 아니다.**

(3) $\boldsymbol{x>3}$

(4) $\boldsymbol{x}$**는 5의 약수이다.**

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 조건과 명제의 부정을 정확하게 이해하고 있는지 알아보기 위한 것이다.

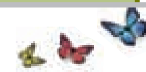
풀이| 'x는 짝수이다.'의 부정은 'x는 짝수가 아니다.'이다. 예를 들어 '$\frac{1}{2}$은 짝수이다.'는 거짓인 명제이지만 '$\frac{1}{2}$은 짝수가 아니다.'는 참인 명제이다. 그러나 'x는 짝수이다.'의 부정을 'x는 홀수이다.'라고 한다면 '$\frac{1}{2}$은 짝수이다.'도 거짓이고, 이 명제의 부정인 '$\frac{1}{2}$은 홀수이다.'도 거짓이므로 모순이다. 따라서 **'x는 짝수이다.'의 부정은 'x는 홀수이다.'가 아니고, 'x는 짝수가 아니다.'이다.**

지/도/자/료

1. 명제의 부정을 나타내는 기호로 $\sim p$ 또는 p^C 또는 $\bar{p}$ 등을 사용하지만 고등학교 교육과정에서는 $\sim p$만을 사용하여 지도한다.

2. 명제 또는 조건의 부정을 구할 때, '작다($<$)'의 부정을 '크다($>$)'로 착각하는 경우가 많다. '작다($<$)'의 부정은 '작지 않다'이므로 '크거나 같다($\geq$)'가 '작다($<$)'의 부정임에 유의할 수 있도록 지도한다.

교과서 44 쪽

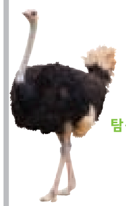


진리집합이란 무엇인가?

생각 열기

동물의 분류

지구 상에 서식하고 있는 동물은 여러 종류로 분류된다. 호랑이와 같은 포유류의 가장 큰 특징은 젖샘이 있어서 새끼에게 수유를 한다는 것이다. 곤충은 몸이 머리, 가슴, 배의 세 부분으로 명확히 구별되며, 지구 상의 동물 중에서 70 %를 차지하고 있다. 조류는 날개가 있고 다리가 둘인 척추동물로, 가장 작은 것은 벌새이며 가장 큰 것은 타조이다.



탐구 활동

전체집합 $U=\{$호랑이, 침팬지, 벌새, 무당벌레, 사슴, 귀뚜라미, 메뚜기, 타조$\}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 조건 'x는 포유류이다.'가 참이 되도록 하는 원소로 이루어진 집합을 구하여 보자.
2. 조건 'x는 조류이다.'가 참이 되도록 하는 원소로 이루어진 집합을 구하여 보자.
3. 조건 'x는 조류이다.'의 부정이 참이 되도록 하는 원소로 이루어진 집합을 구하여 보자.

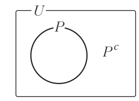
특별한 언급이 없으면 전체집합은 실수 전체의 집합이다.

❶ 전체집합 U의 원소 중에서 조건 p가 참이 되도록 하는 모든 원소로 이루어진 집합을 조건 p의 **진리집합**이라고 한다.

즉, 조건 p의 진리집합을 P라고 하면

$P=\{x\,|\,x\in U$이고 x는 조건 p를 참이 되도록 하는 원소$\}$

이다. 이때 조건 p의 부정 $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.



예제 01

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 조건 p를

$$p: x+1<4$$

라고 할 때, p의 진리집합과 $\sim p$의 진리집합을 구하여라.

풀이 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이고, 조건 p는

$$p: x+1<4$$

이므로 p의 진리집합은 $\{1, 2\}$이다.

조건 p의 부정 $\sim p$는

$$\sim p: x+1\geq 4$$

이므로 $\sim p$의 진리집합은 $\{3, 4, 5\}$이다.

답 p의 진리집합: $\{1, 2\}$, $\sim p$의 진리집합: $\{3, 4, 5\}$

생각 열기 참/고/자/료

조류 중에서 가장 작은 벌새는 몸길이가 6.5~21.5 cm이다. 반면 조류 중에서 가장 큰 타조는 머리 높이가 약 2.4 m, 등 높이가 약 1.4 m이며 몸무게가 약 155 kg이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주어진 조건을 만족시키는 동물을 집합으로 나타내어 봄으로써 진리집합을 자연스럽게 이해할 수 있도록 하기 위한 것이다.

1. 전체집합 U의 원소 중에서 포유류는 호랑이, 침팬지, 사슴이다.
따라서 구하는 집합은
{호랑이, 침팬지, 사슴}

2. 전체집합 U의 원소 중에서 조류는 벌새, 타조이다.
따라서 구하는 집합은
{벌새, 타조}

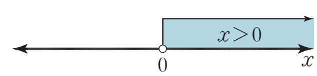
3. 'x는 조류이다.'의 부정은 'x는 조류가 아니다.'이므로 구하는 집합은 **2**에서 얻은 집합의 여집합이다.
따라서 구하는 집합은
{호랑이, 침팬지, 무당벌레, 사슴, 귀뚜라미, 메뚜기}

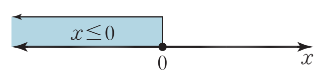
참고| 지구 상에 존재하는 모든 동물을 대상으로 하는 것이 아니라 주어진 전체집합의 원소 중에서 조건에 맞는 것을 찾는다.

본문 해설

❶ 조건 p의 진리집합은 전체집합 U에 따라 달라진다.
예를 들어 조건 $p: x+1<4$에 대하여
(i) $U=\{x\,|\,x$는 자연수$\}$일 때, 조건 p의 진리집합은 $\{1, 2\}$이다.
(ii) $U=\{x\,|\,x$는 정수$\}$일 때, 조건 p의 진리집합은 $\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$이다.

한편 조건 '$p: x>0$'과 이 조건의 부정 '$\sim p: x\leq 0$'의 진리집합을 수직선 위에 나타내면 각각 다음과 같다.





따라서 조건 p의 진리집합을
$P=\{x\,|\,x>0\}$
이라고 하면, 조건 $\sim p$의 진리집합은
$P^C=\{x\,|\,x\leq 0\}$
임을 알 수 있다.

교과서 45 쪽

문제 4 전체집합 $U=\{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건 p, q의 진리집합과 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합을 각각 구하여라.

(1) p : x는 소수이다. (2) q : $x(x-1)=0$

진리집합의 포함 관계를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

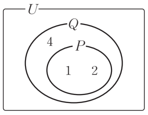
❶ 명제 'x가 2의 약수이면 x는 4의 약수이다.'는 참이다.

이때 조건

p : x는 2의 약수이다.

q : x는 4의 약수이다.

의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 $P\subset Q$이다.



조건 p와 q에 대하여 '$p \longrightarrow q$'는 명제가 된다.

일반적으로 명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P\subset Q$가 성립한다.

또 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 $P\not\subset Q$가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓과 진리집합 사이의 관계

명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때

(1) 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P\subset Q$이다.
또 $P\subset Q$이면 $p \longrightarrow q$는 참이다.

(2) 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 $P\not\subset Q$이다.
또 $P\not\subset Q$이면 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

예제 02 다음 명제의 참, 거짓을 진리집합을 이용하여 판별하여라.

(1) $x-2=0$이면 $x^2-4=0$이다. (2) $x+2>1$이면 $x>2$이다.

풀이 주어진 명제의 가정을 p, 결론을 q라 하고, 각각의 진리집합을 P, Q라고 하자.

(1) $P=\{2\}$, $Q=\{-2, 2\}$이므로 $P\subset Q$이다.
따라서 주어진 명제는 참이다.

(2) $P=\{x\,|\,x>-1\}$, $Q=\{x\,|\,x>2\}$이므로 $P\not\subset Q$이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

답 (1) 참 (2) 거짓

본문 해설

❶ 2의 약수는 모두 4의 약수이다. 따라서 명제 $p \longrightarrow q$, 즉 'x가 2의 약수이면 x는 4의 약수이다.'는 참이다. 즉, 조건 p의 진리집합 $P=\{1, 2\}$의 모든 원소가 조건 q의 진리집합 $Q=\{1, 2, 4\}$에 속하므로 $P\subset Q$이고, 이때 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
한편 4의 약수 중 4는 2의 약수가 아니다. 따라서 명제 $q \longrightarrow p$, 즉 'x가 4의 약수이면 x는 2의 약수이다.'는 거짓이다. 즉, 집합 Q에는 속하지만 집합 P에는 속하지 않는 원소 $x=4$가 있으므로 $Q\not\subset P$이고, 이때 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.

4

목표| 주어진 조건의 진리집합과 이 조건의 부정의 진리집합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 전체집합 $U=\{0, 1, 2, 3, 4\}$이고, 조건 p는

p: x는 소수이다.

이므로 p의 진리집합은 $\{x\,|\,x$는 소수$\}=\{\mathbf{2, 3}\}$이다.

조건 p의 부정 $\sim p$는

$\sim p$: x는 소수가 아니다.

이므로 $\sim p$의 진리집합은 $\{\mathbf{0, 1, 4}\}$이다.

(2) 전체집합 $U=\{0, 1, 2, 3, 4\}$이고, 조건 q는

q: $x(x-1)=0$

이므로 q의 진리집합은 $\{x\,|\,x(x-1)=0\}=\{\mathbf{0, 1}\}$이다.

조건 q의 부정 $\sim q$는

$\sim q$: $x(x-1)\neq 0$

이므로 $\sim q$의 진리집합은 $\{\mathbf{2, 3, 4}\}$이다.

지/도/자/료

1. 배중율

조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P\subset Q$ 또는 $P\not\subset Q$

중 반드시 어느 한 가지가 성립한다.

$P\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

$P\not\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

이와 같이 참이 아니면서 거짓도 아닌 중간적 제3자는 인정되지 않는다는 논리 법칙을 배중율(排中律, Principle of excluded)이라고 한다.

2. 반례와 진리집합

조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때 $P\subset Q$이면 $p \longrightarrow q$가 참이고, $P\not\subset Q$이면 $p \longrightarrow q$가 거짓이다. 따라서 조건 p를 만족시키는 값 중에서 Q에 속하지 않는 값이 있으면 $P\not\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 거짓이다. 그러므로 진리집합 P, Q에 대하여 $x\in P$이고 $x\notin Q$인 x의 값을 찾는 것은 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이기 위한 반례를 찾는 것과 같다.

교과서 46 쪽

문제 5 다음 명제의 참, 거짓을 진리집합을 이용하여 판별하여라.

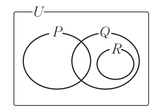
(1) 4의 배수는 8의 배수이다.

(2) $3x-4>0$이면 $x>0$이다.

(3) $x^2>1$이면 $x>1$이다.

(4) $x^2+x-6=0$이면 $x=2$이다.

발전 **문제 6** 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 할 때, 이들 집합 사이의 포함 관계가 오른쪽 그림과 같다고 한다. 조건 p, q, r를 이용하여 다음과 같은 명제를 만들었을 때, 이들의 참, 거짓을 진리집합을 이용하여 판별하여라.



(1) $r \longrightarrow q$ (2) $p \longrightarrow \sim r$

(3) $\sim q \longrightarrow \sim r$ (4) $r \longrightarrow \sim p$

창의 UP 다음 두 조건 p, q와 그 부정을 이용하여 명제를 3개 이상 만들고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

p : x는 홀수이다.	q : x는 소수이다.

'모든'과 '어떤'을 포함하는 명제의 참, 거짓은 어떠한가?

탐구 활동 **전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 조건 p: 'x는 5보다 작다.' 의 진리집합 P를 구하여 보자.
2. 조건 q: 'x는 짝수이다.' 의 진리집합 Q를 구하여 보자.
3. 조건 r: 'x는 5보다 크다.' 의 진리집합 R를 구하여 보자.
4. 세 집합 P, Q, R 중에서 U인 것과 $\varnothing$인 것을 말하여 보자.

5

목표 | 명제의 참, 거짓을 진리집합을 이용하여 판별할 수 있게 한다.

풀이 | (1) 두 조건

p: x는 4의 배수이다.

q: x는 8의 배수이다.

의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$,

$Q=\{8, 16, 24, 32, \cdots\}$

이므로 $P \not\subset Q$이다.

따라서 주어진 명제는 **거짓**이다.

(2) 두 조건

p: $3x-4>0$, q: $x>0$

의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\left\{x \middle| x>\frac{4}{3}\right\}$, $Q=\{x|x>0\}$

이므로 $P \subset Q$이다.

따라서 주어진 명제는 **참**이다.

(3) 두 조건

p: $x^2>1$, q: $x>1$

의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x|x>1$ 또는 $x<-1\}$, $Q=\{x|x>1\}$

이므로 $P \not\subset Q$이다.

따라서 주어진 명제는 **거짓**이다.

(4) $x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$이므로

$x=-3$ 또는 $x=2$

두 조건

p: $x^2+x-6=0$, q: $x=2$

의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{-3, 2\}$, $Q=\{2\}$이므로 $P \not\subset Q$이다.

따라서 주어진 명제는 **거짓**이다.

6

목표 | 명제의 참, 거짓을 진리집합을 이용하여 판별할 수 있게 한다.

풀이 | (1) 벤 다이어그램에서 r의 진리집합 R는 q의 진리집합 Q에 포함된다. 즉, $R \subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 **참**이다.

(2) $\sim r$의 진리집합은 R^C이다. 그런데 벤 다이어그램에서 $P \subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 **참**이다.

(3) $\sim q$의 진리집합은 Q^C, $\sim r$의 진리집합은 R^C이다. 그런데 벤 다이어그램에서 $Q^C \subset R^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 **참**이다.

(4) $\sim p$의 진리집합은 P^C이다. 그런데 벤 다이어그램에서 $R \subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$는 **참**이다.

창의 UP

출제 의도 | 주어진 조건으로 명제를 만들고, 그 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있도록 하기 위한 문제이다.

풀이 | • $p \longrightarrow q$: x가 홀수이면 x는 소수이다.

9는 홀수이지만 소수는 아니므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

• $p \longrightarrow \sim q$: x가 홀수이면 x는 소수가 아니다.

3은 홀수이고 소수이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.

• $q \longrightarrow p$: x가 소수이면 x는 홀수이다.

2는 소수이지만 홀수는 아니므로 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.

일반적으로 조건 p는 명제가 아닐 수 있지만 전체집합 U에 대하여 조건 p 앞에 '모든' 이나 '어떤' 이 있으면 참, 거짓이 구별되므로 명제가 된다.

1 전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때, 명제

'모든 x에 대하여 p이다.'

가 참인 경우는 U에 속하는 모든 원소 x에 대하여 p가 참인 것을 뜻한다. 즉, $P=U$이다.

또 명제

'어떤 x에 대하여 p이다.'

가 참인 경우는 U에 속하는 원소 중에서 p가 참이 되도록 하는 x가 존재한다는 뜻이다. 즉, $P\neq\varnothing$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

'모든'과 '어떤'을 포함하는 명제의 참, 거짓

전체집합 U에서의 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때

(1) $P=U$이면 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

(2) $P\neq U$이면 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'는 거짓이다.

(3) $P\neq\varnothing$이면 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

(4) $P=\varnothing$이면 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 거짓이다.

예제 03 전체집합 $U=\{-1, 0, 1\}$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 모든 x에 대하여 $x>0$이다.

(2) 어떤 x에 대하여 $x=|x|$이다.

풀이 (1) 조건 p: $x>0$의 진리집합을 P라고 하면 $P=\{1\}\neq U$이므로 명제 '모든 x에 대하여 $x>0$이다.'는 거짓이다.

(2) 조건 p: $x=|x|$의 진리집합을 P라고 하면 $P=\{0, 1\}\neq\varnothing$이므로 명제 '어떤 x에 대하여 $x=|x|$이다.'는 참이다.

답 (1) 거짓 (2) 참

문제 7 전체집합 $U=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 모든 x에 대하여 $|x|\le 2$이다.

(2) 어떤 x에 대하여 $(x-2)(x+2)>0$이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 진리집합이 전체집합, 전체집합의 부분집합, 공집합인 조건의 진리집합을 구하여 봄으로써 '모든'과 '어떤'이 포함된 명제에 대하여 이해하기 위한 것이다.

1. $P=\{1, 2, 3, 4\}$ **2.** $Q=\{2, 4\}$

3. $R=\varnothing$

4. U인 것은 P, $\varnothing$인 것은 R이다.

본문 해설

1 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'를 '임의의 x에 대하여 p이다.', '어떠한 x에 대하여도 p이다.' 등과 같이 나타내기도 한다.

전체집합 U에서 '모든 x에 대하여 p이다.'가 참이라는 것은 U의 모든 원소 x에 대하여 p가 참인 것을 뜻하므로 조건 p의 집리집합 P는 U와 같다. 즉, $P=U$이다.

따라서 $P=U$일 때 '모든 x에 대하여 p이다.'는 참, $P\neq U$일 때 '모든 x에 대하여 p이다.'는 거짓이 된다. 그러므로 '모든 x에 대하여 p이다.'가 거짓임을 밝히려면 $P\neq U$, 곧 $P^C\neq\varnothing$임을 밝히면 되므로 p가 거짓이 되는 원소 x가 존재한다는 것을 보이면 된다.

명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'를 'p인 x가 존재한다.', '적당한 x에 대하여 p이다.' 등과 같이 나타내기도 한다.

전체집합 U에서 '어떤 x에 대하여 p이다.'가 참이라는 것은 p가 참이 되게 하는 x가 존재한다는 뜻이므로 조건 p의 집리집합 P는 $\varnothing$이 아니다. 즉, $P\neq\varnothing$이다.

따라서 $P\neq\varnothing$일 때 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 참, $P=\varnothing$일 때 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 거짓이 된다.

7

목표 | '모든'과 '어떤'이 포함된 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $|x|\le 2$에서 $-2\le x\le 2$이다.

전체집합 U의 모든 원소는 -2보다 크거나 같고, 2보다 작거나 같다.

따라서 '모든 x에 대하여 $|x|\le 2$이다.'는 참이다.

(2) $(x-2)(x+2)>0$에서 $x>2$ 또는 $x<-2$이다.

전체집합 U의 원소 중에서 2보다 크거나 -2보다 작은 것은 없다.

따라서 '어떤 x에 대하여 $(x-2)(x+2)>0$이다.'는 거짓이다.

본문 해설

❶ 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때, 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'는 $P=U$임을 말하는 것이다. 이것을 부정하면 $P\neq U$, 즉 $P^C\neq\varnothing$이고, 이것은 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'를 말하는 것이다. 따라서 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'이다.

한편 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 $P\neq\varnothing$을 말하는 것이다. 이것을 부정하면 $P=\varnothing$이고, 이것은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'를 말하는 것이다. 따라서 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'이다.

예를 들어 명제 '모든 자연수 x에 대하여 $2x+1>2$이다.'의 부정은 '어떤 자연수 x에 대하여 $2x+1\leq 2$이다.'이고, 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2+2x=0$이다.'의 부정은 '모든 실수 x에 대하여 $x^2+2x\neq 0$이다.'이다.

교과서 48 쪽

이제 '모든'과 '어떤'을 포함하는 명제의 부정에 대하여 알아보자.

❶ 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'의 부정은 'p가 아닌 x가 있다.'이므로

'어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'

가 된다. 또한 '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 'p인 x가 없다.'이므로

'모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'

가 된다.

일반적으로 '모든'과 '어떤'을 포함하는 명제의 부정은 다음과 같다.

'모든'과 '어떤'을 포함하는 명제의 부정

(1) 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'이다.
(2) 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'이다.

예제 04 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 모든 자연수 x에 대하여 $x+4\geq 7$이다.
(2) 어떤 자연수 x에 대하여 $2x=4$이다.

풀이 (1) 주어진 명제의 부정은 '어떤 자연수 x에 대하여 $x+4<7$이다.'이고, $x=1$, 2인 경우 $x+4<7$이므로 이 명제는 참이다.
(2) 주어진 명제의 부정은 '모든 자연수 x에 대하여 $2x\neq 4$이다.'이고, $x=2$인 경우 $2x=4$이므로 이 명제는 거짓이다.

답 (1) 어떤 자연수 x에 대하여 $x+4<7$이다. (참)
(2) 모든 자연수 x에 대하여 $2x\neq 4$이다. (거짓)

문제 8 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 모든 자연수 x에 대하여 $x>2$이다.
(2) 어떤 자연수 x에 대하여 $x\neq 1$이다.

문제 9 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 모든 이등변삼각형은 정삼각형이다.
(2) 모든 8의 배수는 2의 배수이다.
(3) 어떤 평행사변형은 정사각형이다.
(4) 어떤 각은 직각이다.

8

목표| '모든'과 '어떤'이 포함된 명제의 부정을 알고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) 부정: **어떤 자연수 x에 대하여 $x\leq 2$이다.**
$x=1$, 2인 경우 $x\leq 2$이므로 이 명제는 **참**이다.
(2) 부정: **모든 자연수 x에 대하여 $x=1$이다.**
$x=2$인 경우 $x\neq 1$이므로 이 명제는 **거짓**이다.

9

목표| '모든'과 '어떤'이 포함된 명제의 부정을 알고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) 부정: **어떤 이등변삼각형은 정삼각형이 아니다.**
이등변삼각형 중에는 정삼각형이 아닌 것이 있으므로 이 명제는 **참**이다.
(2) 부정: **어떤 8의 배수는 2의 배수가 아니다.**
모든 8의 배수는 2의 배수이므로 이 명제는 **거짓**이다.
(3) 부정: **모든 평행사변형은 정사각형이 아니다.**
평행사변형 중에는 정사각형인 것이 있으므로 이 명제는 **거짓**이다.
(4) 부정: **모든 각은 직각이 아니다.**
각 중에는 직각인 것이 있으므로 이 명제는 **거짓**이다.

교과서 49 쪽

03 명제의 역과 대우

- 명제의 역과 대우를 이해한다.
- 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.

명제의 역과 대우란 무엇인가?

탐구 활동 두 조건

p: x는 4의 배수이다. q: x는 2의 배수이다.

에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 두 조건 p, q를 이용하여 다음 각 명제를 말하여 보자.

(1) $p \longrightarrow q$ (2) $q \longrightarrow p$ (3) $\sim q \longrightarrow \sim p$

2. **1**에서 구한 명제의 참, 거짓을 판별하여 보자.

탐구 활동의 두 조건 p, q에 대하여 명제

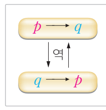
$$p \longrightarrow q\text{: }x\text{가 4의 배수이면 }x\text{는 2의 배수이다.}$$

에서 가정 p와 결론 q를 서로 바꾸면 새로운 명제

$$q \longrightarrow p\text{: }x\text{가 2의 배수이면 }x\text{는 4의 배수이다.}$$

를 얻는다.

이와 같이 명제의 가정과 결론을 서로 바꾸어 놓은 명제를 그 명제의 **역**이라고 한다.



즉, 명제 $p \longrightarrow q$의 역은 명제 $q \longrightarrow p$이다.

이때 명제 $p \longrightarrow q$: 'x가 4의 배수이면 x는 2의 배수이다.'는 참이지만 명제 $q \longrightarrow p$: 'x가 2의 배수이면 x는 4의 배수이다.'는 거짓이다.

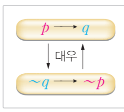
6은 2의 배수이지만 4의 배수는 아니다.

❶ 이와 같이 주어진 명제가 참이라고 해서 그 명제의 역이 항상 참이 되는 것은 아니다.

한편 탐구 활동의 두 조건 p, q의 부정 $\sim p$, $\sim q$를 이용하여 다음과 같은 명제를 만들 수 있다.

$$\sim q \longrightarrow \sim p\text{: }x\text{가 2의 배수가 아니면 }x\text{는 4의 배수가 아니다.}$$

이와 같이 명제의 가정과 결론을 각각 부정하고 서로 바꾸어 놓은 명제를 그 명제의 **대우**라고 한다.



즉, 명제 $p \longrightarrow q$의 대우는 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$이다.

새로 나온 용어와 기호

- 역(逆, converse)
- 대우(對偶, contrapositive)
- 귀류법(歸謬法, reduction to absurdity)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 조건 p, q로 만들 수 있는 여러 가지 명제의 참, 거짓을 판별하여 명제의 역과 대우를 이해하기 위한 것이다.

1. (1) x가 4의 배수이면 x는 2의 배수이다.
(2) x가 2의 배수이면 x는 4의 배수이다.
(3) x가 2의 배수가 아니면 x는 4의 배수가 아니다.

2. (1) 참   (2) 거짓   (3) 참

03 명제의 역과 대우

소단원 지도 목표

① 명제의 역과 대우의 뜻을 알게 한다.
② 명제와 그 대우 사이의 관계를 이해하게 한다.
③ 귀류법을 이용하여 명제를 증명할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 그 대우도 참임을 이해하게 한다. 또 이를 이용하여 주어진 명제가 참임을 증명할 수 있게 한다.

2. 대우를 이용한 증명법과 귀류법은 구체적인 예를 통하여 이해하게 한다.

본문 해설

❶ 명제 $p \longrightarrow q$에서 가정 p와 결론 q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 $P \subset Q$일 때, 명제 $p \longrightarrow q$는 참이 되고, 명제 $p \longrightarrow q$가 참일 때, $P \subset Q$가 성립한다.
따라서 $P \subset Q$일 때 $P=Q$가 아니면 $Q \subset P$라고 할 수 없으므로 명제 $q \longrightarrow p$는 반드시 참이라고는 할 수 없다.
즉, 어떤 명제가 참이라고 해서 그 명제의 역이 반드시 참이 되는 것은 아니고, 또 어떤 명제가 거짓이라고 해서 그 명제의 역도 반드시 거짓이 되는 것은 아니다. 예를 들어 명제 '자연수 a, b가 홀수이면 $a+b$는 짝수이다.'는 참이지만 $a=2$, $b=2$인 경우에는 $a+b$는 짝수이지만 a, b 각각이 짝수이므로 그 역은 거짓이다. 또 명제 '어떤 수가 3의 배수이면 6의 배수이다.'는 거짓이지만 그 역은 참이다.

교과서 50 쪽

예제 01 다음 명제의 역과 대우를 말하고, 그 각각의 참, 거짓을 판별하여라.

$x=1$이면 $x^2=1$이다.

어떤 명제가 거짓임을 보일 때, 그 명제가 성립하지 않는 예를 하나 들어도 된다. 이러한 예를 반례라고 한다.

풀이 역: $x^2=1$이면 $x=1$이다.

[반례] $x=-1$일 때 $x^2=1$이지만 $x\neq1$이므로 거짓이다.

대우: $x^2\neq1$이면 $x\neq1$이다.

$x^2\neq1$이면 $x\neq1$이고 $x\neq-1$이므로 참이다.

답 역: $x^2=1$이면 $x=1$이다. (거짓)
대우: $x^2\neq1$이면 $x\neq1$이다. (참)

문제 1 다음 명제의 역과 대우를 말하고, 그 각각의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 10의 약수는 5의 약수이다.

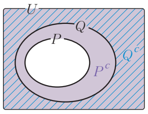
(2) $(x-2)(x+2)>0$이면 $x>2$이다.

(3) 정삼각형은 이등변삼각형이다.

발전 문제 2 명제 'a와 b가 무리수이면 $a+b$도 무리수이다.'의 역과 대우를 말하고, 그 각각의 참, 거짓을 판별하여라.

또는 $\xrightarrow{\text{부정}}$ 그리고
그리고 $\xrightarrow{\text{부정}}$ 또는

명제와 그 대우 사이에는 어떤 관계가 있는가?



전체집합 U에 대하여 어떤 명제 $p\longrightarrow q$가 참일 때, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 $P\subset Q$이므로 $Q^C\subset P^C$이다.

그런데 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합이 각각 P^C, Q^C이므로 대우 $\sim q\longrightarrow\sim p$는 참이다.

역으로 $\sim q\longrightarrow\sim p$가 참이면 $Q^C\subset P^C$에서 $P\subset Q$이므로 $p\longrightarrow q$는 참이다.

그러므로 어떤 명제가 참이면 그 대우는 항상 참이다. 또 어떤 명제의 대우가 참이면 그 명제도 참이다.

1

목표| 명제의 역과 대우를 구하고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) 역: **5의 약수는 10의 약수이다. (참)**

대우: **5의 약수가 아니면 10의 약수가 아니다. (거짓)**

[반례] 2는 5의 약수가 아니지만 10의 약수이다.

(2) 역: **$x>2$이면 $(x-2)(x+2)>0$이다. (참)**

대우: **$x\le2$이면 $(x-2)(x+2)\le0$이다. (거짓)**

[반례] $x=-3$이면

$(x-2)(x+2)=(-5)\times(-1)=5>0$

이다.

(3) 역: **이등변삼각형은 정삼각형이다. (거짓)**

대우: **이등변삼각형이 아니면 정삼각형이 아니다. (참)**

2

목표| 명제의 역과 대우를 구하고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

풀이| 역: **$a+b$가 무리수이면 a와 b가 무리수이다. (거짓)**

[반례] $a=1$, $b=\sqrt{2}$이면 $1+\sqrt{2}$는 무리수이지만 1은 무리수가 아니다.

대우: **$a+b$가 무리수가 아니면 a 또는 b가 무리수가 아니다. (거짓)**

[반례] $a=-\sqrt{2}$, $b=2+\sqrt{2}$일 때, $a+b=2$로 무리수가 아니지만 a와 b는 무리수이다.

3

목표| 대우를 이용하여 주어진 명제가 참임을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (1) 주어진 명제의 대우는

'자연수 n에 대하여 n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.'

이다. 자연수 n이 3의 배수가 아니면

$n=3k-1$ 또는 $n=3k-2$ (k는 자연수)

로 나타낼 수 있으므로

$n^2=(3k-1)^2=3(3k^2-2k+1)-2$

또는 $n^2=(3k-2)^2=3(3k^2-4k+2)-2$

이때 $3k^2-2k+1$과 $3k^2-4k+2$는 자연수이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.

따라서 자연수 n에 대하여 n^2이 3의 배수이면 n도 3의 배수이다.

(2) 주어진 명제의 대우는

'자연수 a, b에 대하여 a와 b가 홀수이면 ab도 홀수이다.'

이다. 자연수 a, b가 홀수이면

$a=2k-1$, $b=2l-1$ (k, l은 자연수)

로 나타낼 수 있으므로

$ab=(2k-1)(2l-1)$

$=2(2kl-k-l+1)-1$

이때 $2kl-k-l+1$이 자연수이므로 ab는 홀수이다.

따라서 자연수 a, b에 대하여 ab가 짝수이면 a 또는 b가 짝수이다.

참고| '그리고', '또는'이 들어 있는 명제의 부정은 주의해서 다루어야 한다.

교과서 51 쪽

명제를 직접 증명하기 어려울 때, 대우를 이용하여 증명하면 편리한 경우가 있다.

따라서 명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 증명하기 위하여 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참임을 증명해도 된다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

명제와 그 대우 사이의 관계

명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓과 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$의 참, 거짓은 일치한다.

예제 02 다음 명제가 참임을 증명하여라.

자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.

자연수 범위에서 조건 'x는 짝수이다.'의 부정은 'x는 홀수이다.'이다.

증명 주어진 명제의 대우는

'자연수 n에 대하여 n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'

자연수 n이 홀수이면

$$n=2k-1 \ (k\text{는 자연수})$$

로 나타낼 수 있으므로

$$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k+1)-1$$

이때 $2k^2-2k+1=k^2+(k-1)^2$은 자연수이므로 n^2은 홀수이다.

따라서 자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.

문제 3 다음 명제가 참임을 증명하여라.

(1) 자연수 n에 대하여 n^2이 3의 배수이면 n도 3의 배수이다.

(2) 자연수 a, b에 대하여 ab가 짝수이면 a 또는 b가 짝수이다.

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

'미인은 잠꾸러기이다.'와 같은 속설이나 '보기 좋은 떡이 먹기도 좋다.'와 같은 속담을 찾아보고, 명제처럼 생각하여 그것의 역과 대우를 말하여 보자.

예를 들어 '2의 배수이고 3의 배수인 수'의 부정을 생각해 보자.

2의 배수이면서 3의 배수인 수는 6의 배수이다.

따라서 $\sim$(2의 배수이고 3의 배수인 수)는 6의 배수가 아니어야 하므로 2의 배수가 아니거나 3의 배수가 아니어야 한다.

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 실생활에서 흔히 사용되는 속설이나 속담을 이용하여, 역과 대우를 이해하기 위한 문제이다.

풀이| • 천재는 악필이다.

역: 악필이면 천재이다.

대우: 악필이 아니면 천재가 아니다.

• 가지 많은 나무에 바람 잘 날 없다.

역: 바람 잘 날이 없으면 가지가 많은 나무이다.

대우: 바람 잘 날이 없지 않으면 가지가 많지 않은 나무이다.

• 가제는 게 편이다.

역: 게 편은 가제이다.

대우: 게 편이 아니면 가제가 아니다.

주의| 속설이나 속담은 대부분 명제가 아니므로 참, 거짓은 판별하지 않도록 주의한다.

지/도/자/료

1. '그리고', '또는'이 들어 있는 명제의 진리집합과 그 부정의 진리집합의 관계를 살펴보면 다음과 같다.

먼저 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x \mid x\text{는 } p\}$, $Q=\{x \mid x\text{는 } q\}$

이므로 조건 'p 또는 q'의 진리집합은

$\{x \mid x\text{는 } p \text{ 또는 } x\text{는 } q\}$

$=\{x \mid x\text{는 } p\} \cup \{x \mid x\text{는 } q\}=P \cup Q$

이고, 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은

$\{x \mid x\text{는 } p \text{ 그리고 } x\text{는 } q\}$

$=\{x \mid x\text{는 } p\} \cap \{x \mid x\text{는 } q\}=P \cap Q$

이다. 또 드모르간의 법칙에 의하여

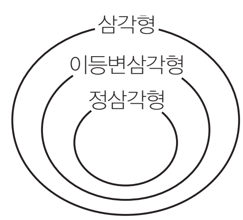
$(P \cup Q)^C=P^C \cap Q^C$, $(P \cap Q)^C=P^C \cup Q^C$

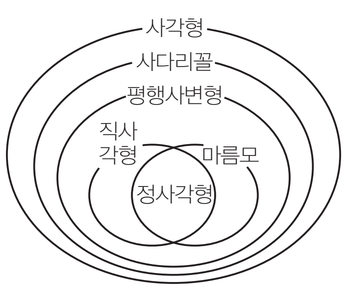
이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$\sim(p \text{ 또는 } q)=\sim p \text{ 그리고 } \sim q$

$\sim(p \text{ 그리고 } q)=\sim p \text{ 또는 } \sim q$

2. 중학교 교육과정에서 집합을 다루지 않으므로 여러 가지 삼각형, 사각형 사이의 포함 관계를 명확히 이해하지 못하는 경우가 있다. 따라서 다음 그림과 같이 삼각형, 사각형의 포함 관계를 벤 다이어그램을 이용하여 명확히 이해시킨다.





생각 열기 참/고/자/료

모순에 관한 이야기는 “한비자(韓非子)”에 나오는 것으로 비슷한 고사성어로는 자가당착(自家撞着)이 있다. 자가당착은 같은 사람의 말이나 행동이 앞뒤가 서로 맞지 않음을 뜻한다.

수학은 논리적인 사고를 키우기 위해 배우는데, 이는 결국 모순이 없게 생각을 다듬어 어떤 일을 할 수 있는 능력을 기르는 것이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 명제의 결론을 부정하면 모순이 일어남을 보여 원래의 명제가 참임을 증명하는 귀류법을 설명하기 위하여 도입된 것이다.

1. $a+1$이 홀수라고 하면 a는 $\boxed{\text{짝수}}$이므로 2는 a의 $\boxed{\text{약수}}$이다. 이것은 a가 $\boxed{\text{소수}}$라는 가정에 모순이다. 따라서 $a+1$은 $\boxed{\text{짝수}}$이다.

교과서 52 쪽

귀류법이란 무엇인가?

생각 열기

모순(矛盾)

모순은 어떤 사실의 앞뒤 또는 두 사실이 이치상 어긋나서 서로 맞지 않음을 이르는 말이다. 한자를 그대로 풀면 ‘창과 방패’로, 중국 초나라의 상인이 창과 방패를 팔면서 앞뒤가 맞지 않은 말을 하였다는 데서 유래하였다.

탐구 활동

다음 물음에 답하여 보자.

1. 다음은 명제의 결론을 부정하면 모순이 됨을 보여 명제 ‘자연수 a가 2가 아닌 소수이면 $a+1$은 짝수이다.’를 증명하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

> $a+1$이 홀수라고 하면 a는 $\boxed{}$이므로 2는 a의 $\boxed{}$이다. 이것은 a가 $\boxed{}$라는 가정에 모순이다. 따라서 $a+1$은 $\boxed{}$이다.

명제의 결론을 부정하면 모순이 일어남을 보여 명제가 참임을 증명하는 방법이 있다.

명제 ‘$\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.’가 참임을 증명하여 보자.

$\sqrt{2}$가 유리수라고 하면

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}\ (a,\ b\text{는 서로소인 자연수, } b\neq 0)$$

로 놓을 수 있다. 이 식의 양변을 제곱하면 $2=\frac{a^2}{b^2}$, 즉

$$a^2=2b^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

이고, a^2이 2의 배수이므로 51쪽의 예제 2에 의하여 a도 2의 배수이다.

읽/기/자/료 러셀의 패러독스

영국의 수학자 러셀(Russell, B. A. W. ; 1871～1970)이 1901년에 발견한 집합론의 패러독스를 러셀의 역리(逆理)라고도 한다.

자기 자신을 포함하지 않는 모든 집합의 집합을 Z, 즉 $Z=\{X\,|\,X\notin X\}$라고 할 때, “Z는 자기 자신에 속하는가, 또는 속하지 않는가?”라는 질문에 대하여 만일 Z가 Z에 속하지 않는다면 Z의 정의에 따라 Z는 자기 자신에 속한다. 또 Z가 Z에 속한다고 하면 Z의 정의에 따라 Z는 자기 자신에 속하지 않는다. 어느 경우이든 모순에 도달한다. 이것을 러셀은 다음과 같은 직관적인 비유로 제시하였다.

‘어느 마을에 이발사 한 명이 있다. 이 이발사는 스스로 면도하지 않는 모든 사람들만 면도해 준다고 한다. 그러면 이 이발사는 자기 스스로 면도할까 아니면 자기 스스로 면도하지 않을까?’

이 이발사가 자신의 수염을 깍는다면 그는 자기 자신의 수염을 깍는 사람이다. 그러므로 그는 자신의 수염을 깎을 수 없다. 만일 자기 자신의 수염을 깍지 않는다면 그는 그가 깎아 주어야 할 마을 사람들의 집합에 속한다. 따라서 그는 어느 쪽에도 속할 수 없다.

본문 해설

❶ 귀류법은 명제 $p \longrightarrow q$에서 가정 p가 참이고 결론 q가 참이 아니라면 모순이 일어남을 보여 $p \longrightarrow q$가 참임을 보이는 방법이다.

4

목표 | 명제가 참임을 귀류법으로 증명할 수 있게 한다.

풀이 | (i) a, b가 모두 짝수, 즉 $a=2m$, $b=2n$ (m, n은 자연수)이라고 하면 $ab=2m\times 2n=2(2mn)$

ab는 짝수가 되므로 가정에 모순이다.

(ii) a, b 중에서 하나만 짝수인 경우 중에서 a가 짝수, 즉 $a=2m$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)이라고 하면

$ab=2m\times(2n-1)=2(2mn-m)$

ab는 짝수가 되므로 가정에 모순이다.

b가 짝수일 때에도 마찬가지이다.

따라서 ‘자연수 a, b에 대하여 ab가 홀수이면 a, b는 모두 홀수이다.’는 참이다.

교과서 53 쪽

a가 2의 배수이므로

$$a=2k \ (k\text{는 자연수})$$

로 놓고 ①에 대입하면

$$(2k)^2=2b^2, \quad 2k^2=b^2$$

이다. 마찬가지로 b^2이 2의 배수이므로 b도 2의 배수이다.

이때 두 정수 a, b가 모두 2의 배수가 되어 a, b가 서로소라는 가정에 모순이다.

따라서 명제 '$\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.'는 참이다.

1 이와 같이 주어진 명제의 결론을 부정하면 가정 또는 이미 알려진 수학적 사실에 모순이 일어남을 보여 원래의 명제가 참임을 증명하는 방법을 **귀류법**이라고 한다.

대우를 이용한 증명은 귀류법의 한 종류이다.

예제 03 명제 '가장 큰 자연수는 존재하지 않는다.'가 참임을 귀류법으로 증명하여라.

증명 가장 큰 자연수가 존재한다고 하고, 이 자연수를 m이라고 하자.

모든 자연수 n에 대하여 $n<n+1$이므로

$$m<m+1$$

이때 $m+1$은 자연수이므로 m이 가장 큰 자연수라는 가정에 모순이다.

따라서 명제 '가장 큰 자연수는 존재하지 않는다.'는 참이다.

문제 4 명제 '자연수 a, b에 대하여 ab가 홀수이면 a, b는 모두 홀수이다.'가 참임을 귀류법으로 증명하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

어떤 사건에 대하여 네 명의 용의자 A, B, C, D를 조사한 결과 다음과 같은 사실을 알아내었다. 진짜 범인을 모두 찾아라.

ㄱ. B가 범인이 아니거나 D가 범인이 아니면 A는 범인이다.
ㄴ. A가 범인이면 B도 범인이다.
ㄷ. C가 범인이면 B는 범인이 아니다.
ㄹ. A가 범인이 아니거나 C가 범인이 아니면 D도 범인이 아니다.

고 있는 몇 개의 명제에서 출발하여 유효한 추론(연역, 귀납)을 적용하여 주어진 명제를 증명하는 방법이고, 간접증명법은 귀류법, 반례를 이용한 증명, 대우를 이용한 증명 등을 말한다. 이 중에서 몇 가지 증명 방법을 정리하면 다음과 같다.

1. 연역법

명제 $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $\cdots$, $p(n)$에 대하여

① $p(1) \Rightarrow p(2)$, $p(2) \Rightarrow p(3)$, $\cdots$, $p(n-1) \Rightarrow p(n)$이면 $p(1) \Rightarrow p(n)$

② $p(1) \Rightarrow p(2) \Rightarrow p(3) \Rightarrow p(1)$이면 $p(1) \Leftrightarrow p(2) \Leftrightarrow p(3)$이다.

와 같은 방법으로 증명하는 것

2. 수학적 귀납법

'$n \ge t$인 모든 정수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다.'를 증명할 때

① $p(t)$가 참이다.

② $k \ge t$인 $p(k)$가 참이면 $p(k+1)$도 참이다.

③ 따라서 $n \ge t$인 모든 정수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다.

의 순서로 증명하는 것

3. 반례를 이용한 증명

주어진 명제가 참이 아닐 경우 간단한 반례를 제시하는 것

단원 과제

목표| 실생활에서 발생할 수 있는 복잡한 문제를 명제의 여러 가지 성질을 활용하여 옳은 추론을 할 수 있게 하기 위한 문제이다.

풀이| A는 범인이거나 범인이 아니거나 둘 중 하나이다. 만일 A가 범인이 아니라면 ㄹ에 의하여 D도 범인이 아니다. 그러나 ㄱ에서 D가 범인이 아니면 A는 범인이라고 했으므로 모순이다. 따라서 A는 범인이다.

그런데 ㄴ으로부터 A가 범인이면 B도 범인이다. 또 ㄷ의 대우로부터 B가 범인이면 C는 범인이 아니다.

ㄹ에서 C가 범인이 아니면 D도 범인이 아니라고 했으므로 D는 범인이 아니다.

따라서 범인은 **A**와 **B**이다.

지/도/자/료 명제의 논리적 추론과 증명

명제의 논리적인 추론(정리)을 증명하는 방법에는 크게 직접증명법과 간접증명법이 있다. 직접증명법은 참이라고 인정되

읽/기/자/료 거짓말족과 참말족

어느 외딴섬에 늘 거짓말을 하는 거짓말족과 항상 참말만 하는 참말족이 살고 있었다. 한 탐험가가 이 섬에 도착해 보니 해변에 세 사람이 앉아 있었다. 오른쪽 사람은 "가운데 사람은 참말족"이라고 하였다. 가운데 사람은 "세 사람은 모두 같은 족"이라고 하였다. 왼쪽 사람은 "가운데 사람은 거짓말족"이라고 하였다. 이 세 사람 중 참말족은 누구이고 거짓말족은 누구일까?

오른쪽 사람이 참말족이라고 하면 그의 말에 따라 가운데 사람은 참말족이고, 가운데 사람의 말에 따라 세 사람은 모두 같은 족, 즉 참말족이다. 그런데 왼쪽 사람은 가운데 사람이 거짓말족이라고 했기 때문에 이 말이 참이든 거짓이든 모순이 생긴다.

그러면 오른쪽 사람이 거짓말족이라고 하면 그의 말에 따라 가운데 사람은 거짓말족이고, 가운데 사람이 거짓말족이므로 그의 말에 따라 왼쪽 사람은 참말족이다. 이 경우 왼쪽 사람은 가운데 사람이 거짓말족이라고 했으므로 참말을 한 것이다. 즉, 모순이 생기지 않으므로 오른쪽 사람과 가운데 사람은 거짓말족이고 왼쪽 사람은 참말족이다.

04 필요조건과 충분조건

소단원 지도 목표

① $p \Longrightarrow q$의 뜻을 알게 한다.
② 필요조건, 충분조건, 필요충분조건의 뜻을 알게 한다.
③ 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓을 판별하여 필요조건, 충분조건, 필요충분조건을 판별할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 필요조건과 충분조건은 예를 들어 간단히 지도하되, 그 의미를 분명히 이해하게 한다.

2. 두 조건, p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, $p \Longrightarrow q$와 $P \subset Q$는 같은 의미임을 이해하고, 이를 바탕으로 진리집합을 이용하여 필요조건과 충분조건을 말할 수 있도록 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

- 충분조건(充分條件, sufficient condition)
- 필요조건(必要條件, necessary condition)
- 필요충분조건(必要充分條件, necessary and sufficient condition)
- $p \Longrightarrow q$, $p \Longleftrightarrow q$

교과서 54 쪽

04 필요조건과 충분조건

● 필요조건과 충분조건을 이해한다.

필요조건과 충분조건이란 무엇인가?

탐구 활동 우리 반 학생 중에서 다음 ⟨1⟩, ⟨2⟩, ⟨3⟩을 만족시키는 학생의 집합을 각각 생각하고, 물음에 답하여 보자.

⟨1⟩ 안경을 쓴다.
⟨2⟩ 5월에 태어났다.
⟨3⟩ 형제가 있다.

1. 다음 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 할 때, P, Q, R를 구하여 보자.

p : ⟨1⟩을 만족시키는 학생
q : ⟨1⟩과 ⟨2⟩를 만족시키는 학생
r : ⟨1⟩, ⟨2⟩, ⟨3⟩을 모두 만족시키는 학생

2. 세 조건 p, q, r의 각 진리집합 P, Q, R에 대하여 이들 사이의 포함 관계를 말하여 보자.

3. 조건 r가 참인 명제가 되기 위해서는 조건 p는 반드시 참인 명제가 되어야 하는가?

● 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 아닌 경우는 $p \not\Longrightarrow q$로 나타낸다.

❶ 일반적으로 두 조건 p, q에 대하여 명제 $p \longrightarrow q$가 참일 때, 이것을 기호로

$$p \Longrightarrow q$$

와 같이 나타낸다. 이때

p는 q이기 위한 **충분조건**
q는 p이기 위한 **필요조건**

이라고 한다.

p이기 위한 필요조건

$$p \Rightarrow q$$

q이기 위한 충분조건

한편 $p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow p$일 때, p는 q이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건이다. 이것을 기호로

$$p \Longleftrightarrow q$$

와 같이 나타낸다. 이때

p는 q이기 위한 **필요충분조건**

이라고 한다.

● p가 q이기 위한 필요충분조건이면 q도 p이기 위한 필요충분조건이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, '명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$'임을 점검할 수 있도록 하기 위한 것이다.

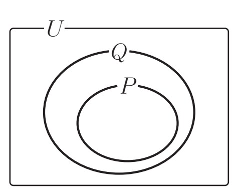
1. 조건 p는 안경을 쓰는 학생, 조건 q는 안경을 쓰고 5월에 태어난 학생, 조건 r는 안경을 쓰고 5월에 태어났으며 형제가 있는 학생이다. 우리 반 학생 중에서 이 조건을 만족시키는 진리집합을 구하여 각각 P, Q, R로 놓는다.

2. $R \subset Q \subset P$

3. 조건 r는 안경을 쓰고 5월에 태어났으며 형제가 있어야 한다. 따라서 '안경을 쓰는 학생'이라는 조건이 필요하다. 그러므로 조건 r가 참인 명제가 되기 위하여 조건 p는 **반드시 참인 명제가 되어야 한다.**

본문 해설

❶ 명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 이 명제가 참일 때, 기호로 $p \Longrightarrow q$와 같이 나타내고 진리집합 P, Q 사이에는 $P \subset Q$의 포함 관계가 성립한다. 이때
p는 q이기 위한 충분조건
q는 p이기 위한 필요조건
이라고 한다. 또 조건 p, q의 진리집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



교과서 55 쪽

예제 01 다음 두 조건 p, q에 대하여 p는 q이기 위한 어떤 조건인가?

(1) p : x는 8의 약수이다. q : x는 16의 약수이다.

(2) p : $3x-2>1$, q : $x>1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 다음이 성립하고 그 역도 성립한다.
- $p \Longrightarrow q$이면 $P \subset Q$
- $q \Longrightarrow p$이면 $Q \subset P$
- $p \Longleftrightarrow q$이면 $P=Q$

풀이 (1) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$$P=\{1, 2, 4, 8\},\ Q=\{1, 2, 4, 8, 16\}$$

$P \subset Q$이므로 $p \Longrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(2) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$$P=\{x \mid 3x-2>1\}=\{x \mid x>1\}$$
$$Q=\{x \mid x>1\}$$

$P=Q$이므로 $p \Longleftrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) 충분조건 (2) 필요충분조건

문제 1 다음 두 조건 p, q에 대하여 p는 q이기 위한 어떤 조건인가?

(1) p : x는 12의 약수이다. q : x는 6의 약수이다.

(2) p : $x>3$, q : $x(x+2)>0$

문제 2 두 집합 A, B에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같을 때, p는 q이기 위한 어떤 조건인가?

p : $A \cup B=B$, q : $A \subset B$

창의 up

실수 a, b, c에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같을 때, p는 q이기 위한 필요충분조건임을 설명하여라.

p : $|ab|+|bc|+|ca|=0$,
q : a, b, c 중에서 두 개 이상이 0이다.

창의 UP

출제 의도| 주어진 조건에 대하여 언제 충분조건, 필요조건, 필요충분조건이 되는지 정확하게 이해할 수 있게 하기 위한 문제이다.

풀이| 조건 p에서 세 절댓값의 합이 0이 되는 경우는 각각의 절댓값들이 0일 때뿐이다.
이때 $a=0$이면
$|ab|+|bc|+|ca|=0+|bc|+0=|bc|=0$
이므로 $b=0$ 또는 $c=0$이어야 한다.
또한 $b=0$인 경우와 $c=0$인 경우도 마찬가지이다.
따라서 a, b, c 중에서 두 개 이상이 0이므로
$p \Longrightarrow q$이다.
한편 a, b, c 중에서 두 개 이상이 0이면
$ab=bc=ca=0$에서 $|ab|+|bc|+|ca|=0$
이므로 $q \Longrightarrow p$이다.
그러므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

1

목표| 충분조건, 필요조건, 필요충분조건을 이해하게 한다.

풀이| (1) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Q=\{1, 2, 3, 6\}$
이므로 $Q \subset P$에서 $q \Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 **필요조건**이다.

(2) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{x \mid x>3\}$, $Q=\{x \mid x<-2$ 또는 $x>0\}$
이므로 $P \subset Q$에서 $p \Longrightarrow q$
따라서 p는 q이기 위한 **충분조건**이다.

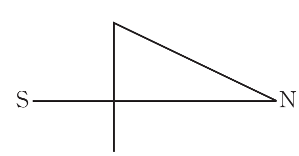
2

목표| 충분조건, 필요조건, 필요충분조건을 이해하게 한다.

풀이| $A \cup B=B$이면 $A \subset B$이다.
또한 $A \subset B$이면 $A \cup B=B$이다.
따라서 p는 q이기 위한 **필요충분조건**이다.

지/도/자/료

- 필요조건은 영어로 Necessary condition이고, 충분조건은 영어로 Sufficient condition이다. 그런데 N은 북쪽을 가리키고 S는 남쪽을 가리키므로 다음과 같은 그림으로 화살표의 왼쪽에 있는 것은 충분조건, 오른쪽에 있는 것은 필요조건이라고 기억하면 편리하다.



- 'p이면 q이다.'가 참일 때, 즉 $p \Longrightarrow q$일 때, 'p는 q를 논리적으로 함의(含意)한다.' 또는 'q는 p로부터 논리적으로 연역(演繹)된다.'라고 한다.

05 절대부등식

소단원 지도 목표

① 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.
② 절대부등식을 이용하여 최대, 최소에 관한 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 절대부등식의 증명에 이용되는 실수의 성질을 명확하게 이해하고, 이를 활용하여 부등식을 증명할 수 있게 한다.

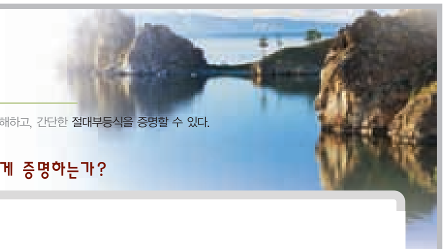
2. 등호가 포함된 절대부등식은 등호가 성립하는 경우를 명시하게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 절대부등식(絕對不等式, absolute inequality)

교과서 56 쪽

05 절대부등식



● 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

절대부등식을 어떻게 증명하는가?

생각 열기 **바이칼 호**

시베리아 남동쪽에 있는 바이칼 호는 최대 수심이 1742 m로 세계에서 가장 깊은 호수이며, 2500만 년이라는 역사를 가진 세계에서 가장 오래된 호수이다. 바이칼 호는 오랜 역사와 고립된 위치에 있었기 때문에 다양한 생물 종이 서식하여 1996년 유네스코 세계 자연 유산으로 지정되었다. 호수 주변에는 2600여 종의 동식물이 살고 있으며 이 중 80 % 이상은 이곳에만 있는 고유종이다.

탐구 활동 **바이칼 호의 수심은 1742 m로 세계의 호수 중에서 가장 깊다. 다음 물음에 답하여 보자.**
(단, 단위는 m이다.)

1. 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣어 보자.

(백두산 천지의 수심) □ 1742

2. 부등식 (세계 모든 호수의 수심)$\le$1742는 항상 성립한다고 말할 수 있는가?

부등식 $x^2-1<0$은 $-1<x<1$일 때에는 성립하지만 $x\le-1$ 또는 $x\ge1$일 때에는 성립하지 않는다.

그러나 부등식 $x^2+1>0$은 모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

이와 같이 부등식의 문자에 대입할 수 있는 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 부등식을 **절대부등식**이라고 한다.

보기 부등식 $x+3>x$, $x^2-2x+2>0$은 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 절대부등식이고, 부등식 $2x-3>0$, $x^2-2x\le0$은 특정한 범위의 x의 값에 대해서만 성립하므로 절대부등식이 아니다.

문제 1 다음 중에서 절대부등식을 모두 찾아라.

㉠ $(a+b)^2\ge0$	㉡ $x^2+x+1<0$
㉢ $a>0$, $b>0$일 때, $ab>0$	㉣ $x>0$, $y<0$일 때, $x+y<0$

생각 열기 참/고/자/료

바이칼 호는 수심이 깊을 뿐 아니라 물도 맑아서 물밑 가시거리가 최고 40.5 m나 된다. 약 330여 개의 강이 이곳으로 흘러드는데, 밖으로 나가는 수로는 앙가라 강 하나뿐이라는 것도 인상적이다. 호수 안에는 총 22개의 섬이 있는데, 가장 큰 것은 길이가 72 km인 알혼 섬이다. 알혼 섬은 호수 내에 위치한 섬으로는 세계에서 두 번째로 큰 규모를 자랑한다. 바이칼이라는 명칭은 몽골어로 '자연'을 뜻하는 '바이갈'에서 연유했다고 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 항상 성립하는 부등식의 예를 확인함으로써 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 부등식인 절대부등식이 존재함을 알아보도록 하기 위한 것이다.

1. (백두산 천지의 수심) $\boxed{<}$ 1742

2. 바이칼 호의 수심은 1742 m로 세계의 호수 중에서 가장 깊으므로 주어진 부등식은 **항상 성립한다.**

1

목표 | 절대부등식의 뜻을 이해하고, 절대부등식을 찾을 수 있게 한다.

풀이 | ㉠ 임의의 실수의 제곱은 0 이상이므로 두 실수 a, b에 대하여 $(a+b)^2\ge0$은 항상 성립한다.

㉡ $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

그런데 모든 실수 x에 대하여 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\ge0$이므로 $x^2+x+1>0$이다. 따라서 $x^2+x+1<0$인 실수 x는 존재하지 않는다.

㉢ 두 양수의 곱은 항상 양수이므로 $a>0$, $b>0$일 때, $ab>0$이다.

㉣ $x>0$, $y<0$일 때, $|x|<|y|$인 경우에만 $x+y<0$이 성립한다.

따라서 절대부등식은 ㉠, ㉢이다.

교과서 57 쪽

주어진 부등식이 절대부등식임을 증명할 때에는 그 부등식에 대입할 수 있는 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 이유를 밝혀야 한다.

절대부등식의 증명에는 다음과 같은 실수의 성질이 자주 이용된다.

절대부등식의 증명에 이용되는 실수의 성질

a, b가 실수일 때

(1) $a>b \iff a-b>0$	(2) $a^2\geq 0$
(3) $a^2+b^2\geq 0$	(4) $a^2+b^2=0 \iff a=b=0$
(5) $\lvert a\rvert^2=a^2$	(6) $a>0$, $b>0$일 때, $a>b \iff a^2>b^2$

예제 01 a, b가 실수일 때, 부등식 $a^2-ab+b^2\geq 0$을 증명하여라.

등호가 포함된 부등식을 증명할 때에는 등호가 성립하는 경우의 조건도 밝혀 준다.

증명 $a^2-ab+b^2=a^2-ab+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

그런데 $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2\geq 0$, $\frac{3}{4}b^2\geq 0$이므로 $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$

따라서 $a^2-ab+b^2\geq 0$이다.

여기서 등호는 $a-\frac{b}{2}=0$, $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.

문제 2 a, b가 실수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

(1) $a^2+ab+b^2\geq 0$ (2) $4a^2-4ab+3b^2\geq 0$

예제 02 a, b, x, y가 실수일 때, 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$을 증명하여라.

이 부등식을 코시-슈바르츠 부등식이라고 한다.

증명 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$
$=a^2y^2+b^2x^2-2abxy$
$=(ay-bx)^2\geq 0$

따라서 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$이다.

여기서 등호는 $ay=bx$일 때 성립한다.

문제 3 a, b, c가 실수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

(1) $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$ (2) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

3

목표| 실수의 성질을 이용하여 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2(a^2+b^2)-(a+b)^2$

$=(2a^2+2b^2)-(a^2+2ab+b^2)$

$=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\geq 0$

따라서 $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$이다.

여기서 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

(2) $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$

따라서 $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$이다.

여기서 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.

참고| 등호가 있는 절대부등식을 증명할 때에는 등호가 성립하는 경우를 설명하도록 한다. 등호가 성립하는 경우를 밝히는 것은 절대부등식을 이용하여 최대, 최소를 구하는 것의 바탕이 된다.

2

목표| 실수의 성질을 이용하여 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

그런데 $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2\geq 0$, $\frac{3}{4}b^2\geq 0$이므로

$a^2+ab+b^2\geq 0$

여기서 등호는 $a+\frac{b}{2}=0$, $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.

(2) $4a^2-4ab+3b^2=(2a-b)^2+2b^2$

그런데 $(2a-b)^2\geq 0$, $2b^2\geq 0$이므로

$4a^2-4ab+3b^2\geq 0$

여기서 등호는 $2a-b=0$, $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.

지/도/자/료 기본적인 절대부등식

(1) $a^2+2ab+b^2\geq 0$ (단, 등호는 $a+b=0$일 때 성립)

(2) $a^2\pm ab+b^2\geq 0$ (단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

(3) $a\leq b$, $c\leq d$일 때, $(a+b)(c+d)\leq 2(ac+bd)$ (단, 등호는 $a=b$, $c=d$일 때 성립)

(4) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

(5) a, b, c가 양수일 때, $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

(6) $a\geq 0$, $b\geq 0$일 때, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$ (단, 등호는 $a=0$ 또는 $b=0$일 때 성립)

(7) $\lvert a\rvert+\lvert b\rvert\geq\lvert a+b\rvert$ (단, 등호는 $ab\geq 0$일 때 성립)

참고| 절대부등식의 해는 항상 실수이므로 실수의 성질, 즉 (실수)$^2\geq 0$ 또는 |실수|≥ 0을 이용하여 절대부등식임을 증명한다.

교과서 58 쪽

예제 03 $a>0$, $b>0$일 때, 부등식 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$를 증명하여라.

두 양수 a, b에 대하여 $\dfrac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$를 각각 a와 b의 산술평균, 기하평균이라고 한다.

증명 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\dfrac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq0$

따라서 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$이다.

여기서 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

❶ **문제 4** $a>0$, $b>0$일 때, 부등식 $\sqrt{ab}\geq\dfrac{2ab}{a+b}$를 증명하여라.

두 양수 a, b에 대하여 $\dfrac{2ab}{a+b}$를 a와 b의 조화평균이라고 한다.

예제 04 a, b가 실수일 때, 부등식 $|a+b|\leq|a|+|b|$를 증명하여라.

(i) $a>0$, $b>0$일 때, $a>b \Longleftrightarrow a^2>b^2$
(ii) $|a|^2=a^2$

증명 $|a+b|\geq0$, $|a|+|b|\geq0$이므로 $|a+b|^2\leq(|a|+|b|)^2$임을 보이면 된다.

$$\begin{aligned}(|a|+|b|)^2-|a+b|^2&=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2\\&=a^2+2|ab|+b^2-a^2-2ab-b^2\\&=2(|ab|-ab)\end{aligned}$$

그런데 $|ab|\geq ab$이므로 $2(|ab|-ab)\geq0$

따라서 $|a+b|^2\leq(|a|+|b|)^2$이므로 $|a+b|\leq|a|+|b|$이다.

여기서 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab\geq0$일 때 성립한다.

문제 5 a, b가 실수일 때, 부등식 $|a|-|b|\leq|a-b|$를 증명하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

두 양수 a, b에 대하여 $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)$의 최솟값을 구하여 보자.

4

목표| 실수의 성질을 이용하여 기하평균과 조화평균의 대소 관계를 증명할 수 있게 한다.

풀이| $$\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)\sqrt{ab}-2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}$$

그런데 $a>0$, $b>0$일 때, $a+b>0$이므로

$$\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\geq0$$

따라서 $\sqrt{ab}\geq\dfrac{2ab}{a+b}$이다.

여기서 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

본문 해설

❶ 산술평균, 기하평균, 조화평균 사이에는 다음 관계가 항상 성립한다.

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

5

목표| 실수의 성질을 이용하여 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

풀이| $|a|-|b|\leq|a-b|$에서 $|a|\leq|a-b|+|b|$

$|a|\geq0$, $|a-b|+|b|\geq0$이므로

$|a|^2\leq(|a-b|+|b|)^2$임을 보이면 된다.

$(|a-b|+|b|)^2-|a|^2=2\{|ab-b^2|-(ab-b^2)\}$

그런데 $|ab-b^2|\geq ab-b^2$이므로

$2\{|ab-b^2|-(ab-b^2)\}\geq0$

따라서 $|a|^2\leq(|a-b|+|b|)^2$이므로

$|a|-|b|\leq|a-b|$

여기서 등호는 $ab-b^2\geq0$, 즉 $a\leq b\leq0$ 또는 $0\leq b\leq a$일 때 성립한다.

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 산술평균과 기하평균의 대소 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구하는 방법을 이해할 수 있도록 하기 위한 문제이다.

풀이| 분배법칙을 사용하여 주어진 식을 전개하여 보면

$$\begin{aligned}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)&=5+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}\\&\geq5+2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{b}{a}}\\&=5+2\sqrt{4}=\mathbf{9}\end{aligned}$$

주의| 산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의하여 $a+b$와 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}$의 최솟값은 각각 $2\sqrt{ab}$, $2\sqrt{\dfrac{4}{ab}}$이다. 그러나 $a+b$는 $a=b$일 때, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}$는 $b=4a$일 때 각각 최솟값을 가진다.

따라서 $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)\geq2\sqrt{ab}\cdot2\sqrt{\dfrac{4}{ab}}=8$과 같이 최솟값을 구하지 않도록 주의한다.

교과서 59 쪽

중단원 기초

[해답 p.216]

수준별 학습

1 다음은 어떤 용어의 정의인지 말하여라.

01 명제와 증명 용어의 정의

(1) 네 변의 길이가 모두 같은 사각형
(2) 두 직선이 한 점에서 만날 때, 서로 이웃하지 않는 두 각
(3) 변의 길이가 모두 같고 각의 크기가 모두 같은 다각형
(4) 한 평면 위에서 한 점으로부터 같은 거리에 있는 모든 점들의 집합

2 다음에 주어진 문장이나 식을 명제와 조건으로 구별하고, 그것의 부정을 말하여라.

02 조건과 진리집합 명제와 조건의 부정

(1) $3<4$ (2) $2x=5$
(3) 6은 3의 약수이다. (4) x는 허수이다.

3 다음 명제의 역과 대우를 말하여라.

03 명제의 역과 대우

(1) 6의 약수는 12의 약수이다.
(2) 실수이면 복소수이다.
(3) $x^2=3x$이면 $x=0$이다.
(4) $x<3$이면 $x^2-5x+6<0$이다.

4 다음 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 두 집합 사이의 포함 관계를 이용하여 p는 q이기 위한 어떤 조건인지 말하여라.

04 필요조건과 충분조건

(1) p : x는 홀수이다. q : $x^2-4x+3=0$
(2) p : $x=1$, q : $x^2=x$
(3) p : $x(x-2)=0$, q : $x=0$ 또는 $x=2$
(4) p : $x^2-x-12>0$, q : $x<-3$

5 x, y가 실수일 때, 부등식 $x^2+y^2\geq 2xy$를 증명하여라.

05 절대부등식

중/단/원 기초

1

목표| 수학에서 사용되는 용어의 정의를 이해하게 한다.

풀이| (1) **마름모** (2) **맞꼭지각**
(3) **정다각형** (4) **원**

2

목표| 명제와 조건을 구별하고 그것의 부정을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) **명제**
부정: $\mathbf{3\geq 4}$
(2) **조건**
부정: $\mathbf{2x\neq 5}$
(3) **명제**
부정: **6은 3의 약수가 아니다.**
(4) **조건**
부정: **x는 허수가 아니다.**

3

목표| 주어진 명제의 역과 대우를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 역: 12의 약수는 6의 약수이다.
대우: 12의 약수가 아니면 6의 약수도 아니다.
(2) 역: 복소수이면 실수이다.
대우: 복소수가 아니면 실수가 아니다.
(3) 역: $x=0$이면 $x^2=3x$이다.
대우: $x\neq 0$이면 $x^2\neq 3x$이다.
(4) 역: $x^2-5x+6<0$이면 $x<3$이다.
대우: $x^2-5x+6\geq 0$이면 $x\geq 3$이다.

4

목표| 진리집합을 이용하여 충분조건, 필요조건, 필요충분조건을 말할 수 있게 한다.

풀이| (1) $P=\{1, 3, 5, \cdots\}$, $Q=\{1, 3\}$에서 $Q\subset P$이므로 p는 q이기 위한 **필요조건**이다.
(2) $P=\{1\}$, $Q=\{0, 1\}$에서 $P\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 **충분조건**이다.
(3) $P=\{0, 2\}$, $Q=\{0, 2\}$에서 $P=Q$이므로 p는 q이기 위한 **필요충분조건**이다.
(4) $P=\{x\,|\,x<-3$ 또는 $x>4\}$, $Q=\{x\,|\,x<-3\}$에서 $Q\subset P$이므로 p는 q이기 위한 **필요조건**이다.

5

목표| 실수의 성질을 이용하여 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

풀이| $(x^2+y^2)-2xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geq 0$
따라서 $x^2+y^2\geq 2xy$이다.
단, 등호는 $x-y=0$, 즉 $x=y$일 때 성립한다.

교과서 60 쪽

중단원 기본

[해답 p.216]

수준별 학습

1 전체집합 $U=\{x|x$는 자연수$\}$에 대하여 다음 조건의 부정을 말하고, 그것의 진리집합을 구하여라. — 02 조건과 진리집합

(1) x는 10의 약수가 아니다. (2) $x^2-1=0$

(3) $|x-3|<4$ (4) $x^2+x-2\geq0$

2 다음 명제의 역과 대우를 말하고, 그 각각의 참, 거짓을 판별하여라. — 03 명제의 역과 대우

(1) 5의 약수는 10의 약수이다.

(2) $a<1$이면 $a^2<1$이다.

(3) 홀수의 제곱은 홀수이다.

(4) $ax=0$이면 $a=0$이다.

(5) 마름모는 사다리꼴이다.

3 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim p \longrightarrow r$가 참일 때, 다음 중에서 참인 것을 모두 찾아라. — 03 명제의 역과 대우

㉠ $p \longrightarrow r$	㉡ $\sim r \longrightarrow p$
㉢ $q \longrightarrow \sim p$	㉣ $q \longrightarrow r$

4 두 조건 — 04 필요조건과 충분조건

$$p:\ -1<x<1,\ q:\ -a+2<x<a+5$$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건일 때, 실수 a의 최솟값을 구하여라.

5 $a>0$, $b>0$일 때, 다음 부등식을 증명하여라. — 05 절대부등식

(1) $a^3+b^3\geq ab(a+b)$ (2) $1+\frac{a}{2}>\sqrt{1+a}$

중/단/원 기본

1

목표| 조건의 부정을 말하고, 그것의 진리집합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 부정: x는 10의 약수이다.

진리집합: $\{1, 2, 5, 10\}$

(2) 부정: $x^2-1\neq0$, 진리집합: $\{2, 3, 4, \cdots\}$

(3) 부정: $|x-3|\geq4$, 진리집합: $\{7, 8, 9, \cdots\}$

(4) 부정: $x^2+x-2<0$, 진리집합: $\varnothing$

2

목표| 명제의 역과 대우를 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) 역: 10의 약수는 5의 약수이다. (거짓)

대우: 10의 약수가 아니면 5의 약수가 아니다. (참)

(2) 역: $a^2<1$이면 $a<1$이다. (참)

대우: $a^2\geq1$이면 $a\geq1$이다. (거짓)

(3) 역: 홀수는 홀수의 제곱이다. (거짓)

대우: 홀수가 아닌 수는 홀수의 제곱이 아니다. (참)

(4) 역: $a=0$이면 $ax=0$이다. (참)

대우: $a\neq0$이면 $ax\neq0$이다. (거짓)

(5) 역: 사다리꼴은 마름모이다. (거짓)

대우: 사다리꼴이 아니면 마름모가 아니다. (참)

3

목표| 주어진 명제와 그 대우를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

풀이| $p \longrightarrow \sim q$, $\sim p \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우인 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim r \longrightarrow p$는 모두 참이다.

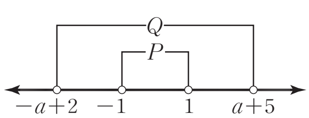
또 $q \longrightarrow \sim p$와 $\sim p \longrightarrow r$가 참이므로 $q \longrightarrow r$도 참이다.

따라서 ㉡, ㉢, ㉣은 참이다.

4

목표| 필요조건과 충분조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $p:\ -1<x<1$, $q:\ -a+2<x<a+5$의 진리집합을 각각 P, Q라 하고 수직선으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$P\subset Q$이어야 하므로

(ⅰ) $-a+2\leq-1$에서 $a\geq3$

(ⅱ) $a+5\geq1$에서 $a\geq-4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a\geq3$

따라서 a의 최솟값은 3이다.

5

목표| 실수의 성질을 이용하여 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a-b)^2$

$a+b>0$이므로 $(a+b)(a-b)^2\geq0$

따라서 $a^3+b^3\geq ab(a+b)$이다.

여기서 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

(2) $\left(1+\frac{a}{2}\right)^2-(\sqrt{1+a})^2=\frac{a^2}{4}>0$

따라서 $\left(1+\frac{a}{2}\right)^2>(\sqrt{1+a})^2$이므로

$1+\frac{a}{2}>\sqrt{1+a}$이다.

중단원 실력

[해답 p.216]

수준별 학습

1 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 모든 실수 x의 제곱은 0보다 크다.
(2) 어떤 소수는 홀수가 아니다.

02 조건과 진리집합
'모든'과 '어떤'을 포함하는 명제의 부정

2 두 조건

$p: x\le 1$ 또는 $x>2$, $q: x^2-(5a-2)x+4a^2-5a+1\le 0$

에 대하여 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되도록 하는 실수 a값의 범위를 구하여라.

02 조건과 진리집합

3 명제 'a, b가 양의 정수일 때, $a+b$가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수이고, 다른 하나는 짝수이다.'가 참임을 귀류법으로 증명하여라.

03 명제의 역과 대우
귀류법

4 세 조건 p, q, r의 진리집합 P, Q, R가 $P\cap Q=P$, $Q\cap R=\varnothing$일 때, p는 $\sim r$이기 위한 어떤 조건인가?

04 필요조건과 충분조건

5 실수 x에 대한 다음 부등식이 항상 성립할 필요충분조건을 구하여라.

(단, a, b, c는 상수)

(1) $ax+b>0$　　(2) $ax+b<0$
(3) $ax^2+bx+c>0$ (단, $a\ne 0$)　　(4) $ax^2+bx+c<0$ (단, $a\ne 0$)

05 절대부등식

중/단/원 실력

1

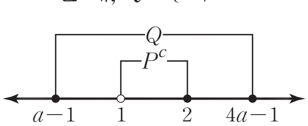
목표| '모든'과 '어떤'이 포함된 명제의 부정을 구하고, 그것의 참과 거짓을 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) **어떤 실수 x의 제곱은 0보다 작거나 같다. (참)**
(2) **모든 소수는 홀수이다. (거짓)**

2

목표| 주어진 명제의 진리집합을 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P^C=\{x\,|\,1<x\le 2\}$
(ⅰ) $a\ge 0$일 때, $Q=\{x\,|\,a-1\le x\le 4a-1\}$이다.



$P^C\subset Q$이어야 하므로
$a-1\le 1$, $4a-1\ge 2$에서　$a\le 2$, $a\ge \frac{3}{4}$
따라서 $\frac{3}{4}\le a\le 2$이다.
(ⅱ) $a<0$일 때, $Q=\{x\,|\,4a-1\le x\le a-1\}$이므로 (ⅰ)과 같은 방법으로
$4a-1\le 1$, $a-1\ge 2$에서　$a\le \frac{1}{2}$, $a\ge 3$
따라서 a의 값은 존재하지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 실수 a값의 범위는
$\boldsymbol{\frac{3}{4}\le a\le 2}$

3

목표| 귀류법을 이용하여 명제가 참임을 증명할 수 있게 한다.

풀이| a, b가 모두 짝수, 또는 a, b가 모두 홀수라고 하면 $a+b$는 짝수가 되므로 가정에 모순이다.
따라서 'a, b가 양의 정수일 때, $a+b$가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수이고, 다른 하나는 짝수이다.'는 참이다.

4

목표| 충분조건, 필요조건, 필요충분조건을 이해하게 한다.

풀이| $P\cap Q=P$이면 $P\subset Q$이므로　$p \Longrightarrow q$
$Q\cap R=\varnothing$이면 $Q\subset R^C$이므로　$q\Longrightarrow \sim r$
따라서 $p\Longrightarrow \sim r$이므로 p는 $\sim r$이기 위한 **충분조건**이다.

5

목표| 절대부등식이 성립할 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax+b>0$이 성립하려면　$\boldsymbol{a=0,\ b>0}$
(2) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax+b<0$이 성립하려면　$\boldsymbol{a=0,\ b<0}$
(3) $a\ne 0$일 때, 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면　$\boldsymbol{a>0,\ D=b^2-4ac<0}$
(4) $a\ne 0$일 때, 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c<0$이 성립하려면　$\boldsymbol{a<0,\ D=b^2-4ac<0}$

교과서 62 쪽

수행 과제

에피메니데스는 거짓말쟁이일까?

패러독스(paradox, 역설(逆說))는 일반적으로는 모순을 야기하지 않으나 특정한 경우에 모순을 일으키는 논증을 말한다. 유명한 패러독스 중 하나는 기원전 6세기에 크레타 섬에 살았던 시인이자 철학자인 에피메니데스의 이름을 빌린 '거짓말쟁이 패러독스' 이다. 그 내용은 다음과 같다.

> 크레타 섬 출신의 철학자 에피메니데스는 말하였다.
> "모든 크레타인은 거짓말쟁이이다."

에피메니데스는 진실을 말하였는가?

| 과 제 | 1 모든 크레타인이 실제로 거짓말쟁이일 때, 에피메니데스의 주장이 논리적으로 모순이 되는 이유를 말하여 보자.

| 과 제 | 2 모든 크레타인이 실제로 거짓말쟁이가 아닐 때, 에피메니데스의 주장이 논리적으로 모순이 되는 이유를 말하여 보자.

| 과 제 | 3 여러 가지 역설을 조사하고 발표하여 보자.

교과서 63 쪽

대단원 학습 내용 정리

1 집합

집합

(1) 집합: 주어진 조건에 의하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임
(2) 원소: 집합을 이루는 대상 하나하나
(3) a가 집합 A의 원소일 때, $a \in A$로 나타낸다.

집합 사이의 포함 관계

(1) 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때, 집합 A를 집합 B의 부분집합이라고 하며 $A \subset B$로 나타낸다.
(2) 두 집합 A, B의 원소가 모두 같으면 $A=B$이다.
(3) $A \neq B$이고 $A \subset B$일 때, 집합 A를 집합 B의 진부분집합이라고 한다.

집합의 연산

(1) 합집합: $A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$
(2) 교집합: $A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \in B\}$
(3) $A \cap B=\varnothing$일 때, 집합 A와 집합 B는 서로소라고 한다.
(4) $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$
(5) 여집합: $A^C=\{x \mid x \in U \text{ 그리고 } x \notin A\}$
(6) 차집합: $A-B=\{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$

집합의 연산법칙

(1) 교환법칙: $A \cup B=B \cup A$, $A \cap B=B \cap A$
(2) 결합법칙: $(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$
(3) 분배법칙: $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$
(4) 차집합과 여집합의 성질: $A-B=A \cap B^C$
$(A^C)^C=A$
$A \cup A^C=U$, $A \cap A^C=\varnothing$
$U^C=\varnothing$, $\varnothing^C=U$
(5) 드모르간의 법칙: $(A \cup B)^C=A^C \cap B^C$
$(A \cap B)^C=A^C \cup B^C$

2 명제

명제와 증명

(1) 명제: 참인지 거짓인지를 명확히 판별할 수 있는 문장이나 식
(2) 명제 $p \longrightarrow q$에서 p를 가정, q를 결론이라고 한다.
(3) 증명: 명제의 가정으로부터 결론을 체계적으로 이끌어 내어 명제가 참인 이유를 설명하는 것

조건과 진리집합

(1) 조건: 변수 x의 값에 따라 참, 거짓이 결정되는 문장이나 식
(2) 명제 또는 조건 p에 대하여 'p가 아니다.'를 p의 부정이라 하고 $\sim p$로 나타낸다.
(3) 진리집합: 전체집합 U의 원소 중에서 조건 p가 참이 되도록 하는 모든 원소로 이루어진 집합
(4) 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때,
(i) 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이다.
또 $P \subset Q$이면 $p \longrightarrow q$는 참이다.
(ii) 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 $P \not\subset Q$이다.
또 $P \not\subset Q$이면 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

명제의 역과 대우

(1) 명제 $p \longrightarrow q$의 역: $q \longrightarrow p$
명제 $p \longrightarrow q$의 대우: $\sim q \longrightarrow \sim p$
(2) 명제와 그 대우의 참, 거짓은 일치한다.
(3) 귀류법: 명제의 결론을 부정하면 모순이 일어남을 보여 원래의 명제가 참임을 증명하는 방법

필요조건과 충분조건

(1) $p \Longrightarrow q$일 때: p는 q이기 위한 충분조건
q는 p이기 위한 필요조건
(2) $p \Longleftrightarrow q$일 때: p는 q이기 위한 필요충분조건

절대부등식

부등식의 문자에 대입할 수 있는 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 부등식

| 용어와 기호 | 집합, 원소, 벤 다이어그램, 공집합, 부분집합, 진부분집합, 합집합, 교집합, (집합의) 서로소, 전체집합, 여집합, 차집합, (집합의) 교환법칙, (집합의) 결합법칙, (집합의) 분배법칙, 드모르간의 법칙, 명제, 가정, 결론, 정의, 증명, 정리, 조건, 부정, 진리집합, 역, 대우, 귀류법, 충분조건, 필요조건, 필요충분조건, 절대부등식, $a \in A$, $b \notin B$, $\varnothing$, $n(A)$, $A \subset B$, $A \not\subset B$, $A=B$, $A \neq B$, $A \cup B$, $A \cap B$, U, A^C, $A-B$, $p \longrightarrow q$, $\sim p$, $p \Longrightarrow q$, $p \Longleftrightarrow q$

수행 과제

● 수행 과제 의도

수학사의 한 예를 통하여 주어진 문제를 논리적으로 추론할 수 있는지 확인한다.

과제 1 _풀이

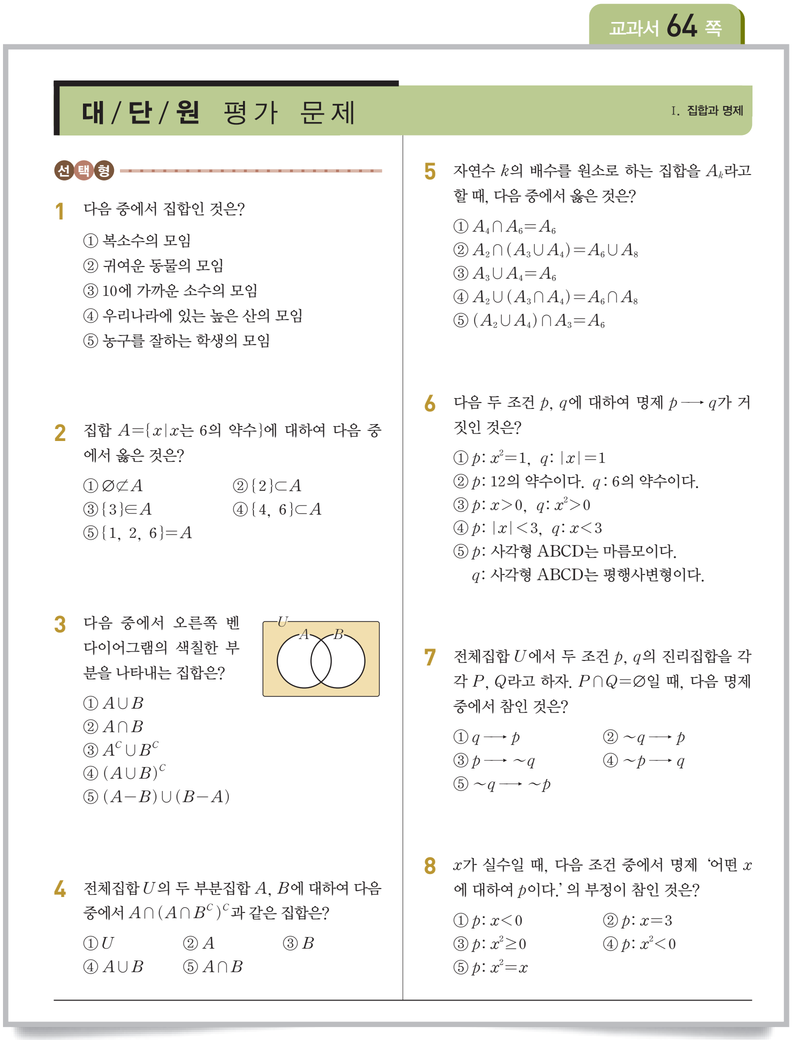
모든 크레타인이 실제로 거짓말쟁이라면 에피메니데스 자신도 크레타인이므로 거짓말쟁이이다. 따라서 자신의 주장인 '모든 크레타인은 거짓말쟁이이다.'도 거짓말이 되어야 한다. 그러면 어떤 크레타인은 거짓말쟁이가 아니게 된다. 그런데 실제로 모든 크레타인은 거짓말쟁이이므로 모순이 된다.

과제 2 _풀이

모든 크레타인이 실제로 거짓말쟁이가 아니라면 에피메니데스도 거짓말쟁이가 아니므로 그의 주장은 사실이다. 즉, 크레타인들은 모두 거짓말쟁이가 된다. 그런데 모든 크레타인은 거짓말쟁이가 아니므로 모순이 된다.

과제 3 _풀이

역설은 어떤 경우도 참, 거짓을 판별할 수 없는 문장이나 식이다. 이를테면 '예외 없는 규칙은 없다.', '이 문장은 거짓말이다.' 등이 있다.


교과서 64 쪽

대/단/원 평가 문제

I. 집합과 명제

선택형

1 다음 중에서 집합인 것은?

① 복소수의 모임
② 귀여운 동물의 모임
③ 10에 가까운 소수의 모임
④ 우리나라에 있는 높은 산의 모임
⑤ 농구를 잘하는 학생의 모임

2 집합 $A=\{x|x$는 6의 약수$\}$에 대하여 다음 중에서 옳은 것은?

① $\varnothing\not\subset A$ ② $\{2\}\subset A$
③ $\{3\}\in A$ ④ $\{4,\ 6\}\subset A$
⑤ $\{1,\ 2,\ 6\}=A$

3 다음 중에서 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?

U A B

① $A\cup B$
② $A\cap B$
③ $A^C\cup B^C$
④ $(A\cup B)^C$
⑤ $(A-B)\cup(B-A)$

4 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중에서 $A\cap(A\cap B^C)^C$과 같은 집합은?

① U ② A ③ B
④ $A\cup B$ ⑤ $A\cap B$

5 자연수 k의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k라고 할 때, 다음 중에서 옳은 것은?

① $A_4\cap A_6=A_6$
② $A_2\cap(A_3\cup A_4)=A_6\cup A_8$
③ $A_3\cup A_4=A_6$
④ $A_2\cup(A_3\cap A_4)=A_6\cap A_8$
⑤ $(A_2\cup A_4)\cap A_3=A_6$

6 다음 두 조건 p, q에 대하여 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓인 것은?

① p: $x^2=1$, q: $|x|=1$
② p: 12의 약수이다. q : 6의 약수이다.
③ p: $x>0$, q: $x^2>0$
④ p: $|x|<3$, q: $x<3$
⑤ p: 사각형 ABCD는 마름모이다.
  q: 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

7 전체집합 U에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자. $P\cap Q=\varnothing$일 때, 다음 명제 중에서 참인 것은?

① $q \longrightarrow p$ ② $\sim q \longrightarrow p$
③ $p \longrightarrow \sim q$ ④ $\sim p \longrightarrow q$
⑤ $\sim q \longrightarrow \sim p$

8 x가 실수일 때, 다음 조건 중에서 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.' 의 부정이 참인 것은?

① p: $x<0$ ② p: $x=3$
③ p: $x^2\geq 0$ ④ p: $x^2<0$
⑤ p: $x^2=x$

대/단/원 평가 문제

1

목표| 집합인 것과 집합이 아닌 것을 구분할 수 있게 한다.

풀이| ②, ③, ④, ⑤ '귀여운', '가까운', '높은', '잘하는'은 기준이 주관적이어서 그 대상이 분명하지 않다.

답 ①

2

목표| 집합의 기본 성질을 이해하게 한다.

풀이| $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로

① $\varnothing\subset A$

③ $\{3\}\subset A,\ 3\in A$

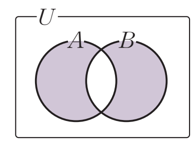
④ $\{4,\ 6\}\not\subset A$

답 ②

3

목표| 집합을 벤 다이어그램으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| ⑤ $(A-B)\cup(B-A)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



답 ④

4

목표| 집합의 연산의 성질을 이용하여 같은 집합을 찾을 수 있게 한다.

풀이|
$$\begin{aligned} &A\cap(A\cap B^C)^C \\ &=A\cap(A^C\cup B) \\ &=(A\cap A^C)\cup(A\cap B) \\ &=\varnothing\cup(A\cap B) \\ &=A\cap B \end{aligned}$$

답 ⑤

5

목표| 주어진 집합의 원소를 이해하고 집합의 연산의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| ① $A_4\cap A_6=A_{12}\neq A_6$

② $A_2\cap(A_3\cup A_4)=(A_2\cap A_3)\cup(A_2\cap A_4)$
$=A_6\cup A_4\neq A_6\cup A_8$

③ $A_3\cup A_4\neq A_6$

④ $A_2\cup(A_3\cap A_4)=A_2\cup A_{12}=A_2\neq A_{24}=A_6\cap A_8$

⑤ $(A_2\cup A_4)\cap A_3=A_2\cap A_3=A_6$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

6

목표| 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

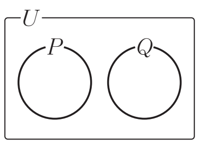
풀이| ① $x^2=1$이면 $x=\pm1$, 즉 $|x|=1$이다.
따라서 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
② 12는 12의 약수이지만 6의 약수는 아니다.
따라서 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
③ $x>0$이면 $x^2=x\cdot x>0$이다.
따라서 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
④ $|x|<3$이면 $-3<x<3$이므로 $x<3$이다.
따라서 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
⑤ □ABCD가 마름모이면 □ABCD는 평행사변형이다.
따라서 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
따라서 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓인 것은 ②이다.

답 ②

7

목표| 진리집합을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

풀이| $P\cap Q=\varnothing$일 때, 두 집합 P, Q를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $P\subset Q^C$이므로 $p \longrightarrow \sim q$는 참이다. 따라서 참인 것은 ③이다.

답 ③

8

목표| 명제의 부정을 알고 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

풀이| ① $\sim p$: $x\geq0$
② $\sim p$: $x\neq3$
③ $\sim p$: $x^2<0$
④ $\sim p$: $x^2\geq0$
⑤ $\sim p$: $x^2\neq x$
따라서 모든 실수 x에 대하여 $\sim p$가 참인 것은 ④이다.

답 ④

교과서 65 쪽

[해답 p.217]

9 다음 중에서 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 찾은 것은?

> ㉠ 두 집합 A, B에 대하여
> p: $A\subset B$, q: $A\cap B=A$
> ㉡ p: $2014\leq x\leq 2020$,
> q: $2015<x<2021$
> ㉢ p: 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.
> q: 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

10 실수 a, b에 대하여 다음의 A와 B의 대소를 비교하면?

> $A=(a^2+1)(b^2+1)$, $B=(ab+1)^2$

① $A>B$ ② $A<B$ ③ $A\geq B$
④ $A\leq B$ ⑤ $A=B$

서답형

11 집합 $A=\{x\mid x$는 350의 소인수$\}$일 때, 집합 A의 진부분집합을 모두 구하여라.

12 두 집합 A, B에 대하여
$n(A)=15$, $n(B)=10$, $n(A\cup B)=21$
일 때, $n(A-B)$를 구하여라.

13 실수 x에 대하여 집합 A, B, C, D가 각각 다음과 같을 때, 조건 $g(x)<0\leq f(x)$의 진리집합을 A, B, C, D로 나타내어라.

> $A=\{x\mid f(x)=0\}$, $B=\{x\mid f(x)>0\}$
> $C=\{x\mid g(x)=0\}$, $D=\{x\mid g(x)>0\}$

14 다음 명제의 역과 대우를 말하고, 그 각각의 참, 거짓을 판별하여라.
(1) x와 y가 짝수이면 xy는 홀수이다.
(2) 직사각형은 평행사변형이다.

|서|술|형|
15 실수 a에 대하여 다음 명제가 참임을 증명하여라.

> $a+2$가 무리수이면 a는 무리수이다.

|서|술|형|
16 두 조건
p: $|x|\leq a$, q: $-2\leq x\leq 6$
에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 a의 최댓값과 필요조건이 되도록 하는 a의 최솟값의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. (단, a는 양수이다.)

9

목표| 충분조건, 필요조건, 필요충분조건을 이해하게 한다.

풀이| ㉠ $A\subset B$이면 $A\cap B=A$이고, $A\cap B=A$이면 $A\subset B$이다.
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
㉡ 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 $P\not\subset Q$이고, $Q\not\subset P$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이 아니다.
㉢ 직사각형 중에는 이등변삼각형이 아닌 것이 있으므로 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이 아니다.
그러므로 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㉠뿐이다.

답 ①

10

목표| 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

풀이| $A-B=(a^2+1)(b^2+1)-(ab+1)^2$

$=(a^2b^2+a^2+b^2+1)-(a^2b^2+2ab+1)$

$=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geq 0$

따라서 $A\geq B$이다.

답 ③

11

목표| 진부분집합을 구할 수 있게 한다.

풀이| $350=2\times 5^2\times 7$이므로 $A=\{2,\ 5,\ 7\}$이다.

따라서 집합 A의 진부분집합은

$\varnothing$, $\{2\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{2,\ 5\}$, $\{2,\ 7\}$, $\{5,\ 7\}$

답 $\varnothing$, $\{2\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{2,\ 5\}$, $\{2,\ 7\}$, $\{5,\ 7\}$

12

목표| 집합의 성질을 이용하여 주어진 집합의 원소의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $n(A\cap B)=15+10-21=4$이므로

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=15-4=11$

답 11

13

목표| 주어진 조건의 진리집합을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)\geq 0$의 진리집합은 $A\cup B$

$g(x)<0$의 진리집합은 $(C\cup D)^C$

따라서 조건 $g(x)<0\leq f(x)$의 진리집합은

$(A\cup B)\cap(C\cup D)^C$

답 $(A\cup B)\cap(C\cup D)^C$

14

목표| 명제의 역과 대우를 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) 역: xy가 홀수이면 x와 y는 짝수이다. (거짓)

대우: xy가 홀수가 아니면 x 또는 y는 짝수가 아니다. (거짓)

(2) 역: 평행사변형은 직사각형이다. (거짓)

대우: 평행사변형이 아니면 직사각형이 아니다. (참)

답 풀이 참조

15

목표| 명제가 참임을 여러 가지 방법으로 증명할 수 있게 한다.

풀이| 실수 a에 대하여 주어진 명제의 대우는

'a가 유리수이면 $a+2$는 유리수이다.'

a가 유리수이면 $a=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 정수, $p\neq 0$)로 놓을 수 있으므로 $a+2=\dfrac{q}{p}+2=\dfrac{q+2p}{p}$

이때 $q+2p$도 정수이므로 $a+2$는 유리수이다.

따라서 $a+2$가 무리수이면 a는 무리수이다.

답 풀이 참조

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	주어진 명제의 대우 구하기	20%
	a를 유리수의 정의를 이용하여 나타내기	30%
	$a+2$가 유리수임을 보이기	40%
답 구하기	a에 대한 명제가 참임을 설명하기	10%

16

목표| 필요조건과 충분조건을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

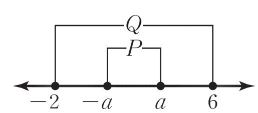
$P=\{x\mid -a\leq x\leq a\}$, $Q=\{x\mid -2\leq x\leq 6\}$

(i) p가 q이기 위한 충분조건이려면 $P\subset Q$

오른쪽 그림에서

$-a\geq -2$, $a\leq 6$

이어야 하므로 $0<a\leq 2$



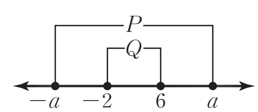
따라서 p가 q이기 위한 충분조건이 되는 a의 최댓값은 2이다.

(ii) p가 q이기 위한 필요조건이려면 $Q\subset P$

오른쪽 그림에서

$-a\leq -2$, $a\geq 6$

이어야 하므로 $a\geq 6$



따라서 p가 q이기 위한 필요조건이 되는 a의 최솟값은 6이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 값은 $2+6=8$

답 8

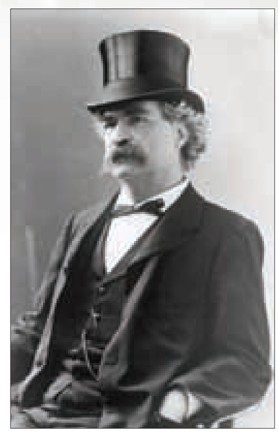
채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	두 조건 p, q에 대한 진리집합 구하기	10%
	진리집합을 이용하여 $p\Rightarrow q$인 a의 최댓값 구하기	40%
	진리집합을 이용하여 $q\Rightarrow p$인 a의 최솟값 구하기	40%
답 구하기	최댓값과 최솟값의 합 구하기	10%

M+ History

수 학 ✚ 역 사

마크 트웨인의 명제의 부정



마크 트웨인은 "톰 소여의 모험"과 "허클베리 핀의 모험"으로 우리에게 잘 알려져 있는 소설가이다. 그가 발표한 많은 작품들 중에 남북 전쟁이 끝난 이후 미국의 사회 상황을 풍자한 장편 소설 "금박시대"가 있는데, 1873년에 발표한 이 소설에서 그는 당시 미국 정부의 부패상과 정치인 그리고 자본가들의 야비한 실체를 적나라하게 폭로하였다. 이 소설이 출판되고 얼마 지나지 않아서 마크 트웨인은 기자들의 질문에 대답하면서 다음과 같이 말하였다.

"미국 국회의 어떤 의원은 나쁜 사람이다."

기자들이 이 말을 그대로 신문에 발표하자 워싱턴의 미국 국회 의원들은 일제히 마크 트웨인을 비난하였다.

그들은 그 말에 대하여 사실을 똑바로 밝히거나 잘못을 인정하는 성명을 발표하지 않으면 법적인 조치를 취하겠다고 위협하였다.

그래서 마크 트웨인은 다음과 같은 성명서를 발표하였다.

"며칠 전에 내가 '미국 국회의 어떤 의원은 나쁜 사람이다.' 라고 했는데 사람들이 그것은 사실이 아니라고 내게 말했다. 그래서 곰곰이 생각해 보니 내가 한 그 말은 잘못된 것이었다. 그래서 나는 오늘 특별히 성명을 발표하여 지난번에 내가 했던 말을 부정하여 '미국 국회의 어떤 의원은 나쁜 사람이 아니다.' 로 수정한다."

마크 트웨인은 자신이 처음에 한 말이 잘못되었다고 부정하기는 했지만, 결국은 처음에 한 말과 마찬가지의 교묘한 방법으로 미국 국회 의원을 경멸하는 자신의 뜻을 굽히지 않았던 것이다.

수학적으로 따지면 마크 트웨인이 한 말은 명제가 아니지만, 그의 말을 명제라고 가정할 때, 올바르게 부정하려면 그는 '미국 국회의 모든 의원은 나쁜 사람이 아니다.' 라고 했어야 한다.

사이버 가정 학습을 아시나요?

각 시도 교육청에서는 인터넷을 이용하여 학생들이 자율적으로 학습할 수 있도록 '사이버 가정 학습 사이트'를 운영하고 있다. 이 사이트를 활용하여 학습 효과를 높여 보자.

(1) 각 시도 교육청에서 운영하는 '사이버 가정 학습 사이트'의 주소는 다음과 같다.

서울특별시	http://www.kkulmat.com	부산광역시	http://cyber.busanedu.net
인천광역시	http://cyber.edu-i.org	대구광역시	http://estudy.edunavi.kr
대전광역시	http://djstudy.or.kr	광주광역시	http://edu.gedu.net
울산광역시	http://home.go.kr	경기도	http://danopy.goedu.kr
충청남도	http://smart.edus.or.kr	충청북도	http://star.cbedunet.or.kr
전라남도	http://cyber.jnei.or.kr	전라북도	http://eschool.jbedu.kr
경상남도	http://lms.gnedu.net	경상북도	http://lms.gyo6.net
강원도	http://ngcc.gweduone.net	제주특별자치도	http://jejuestudy.net

(2) '사이버 가정 학습 사이트'에서 고등학교 수학 자료를 찾아 학습에 활용하여 보자.

M+ Engineering 수 학 + 공 학

풍력 발전기의 전기 생산량은

바람의 세기에 대한 함수로 나타낼 수 있다.

함수

| 준 | 비 | 학 | 습 |

중① 함수의 뜻

1 다음 중에서 y가 x의 함수인 것을 모두 찾고, 함수인 것은 x와 y 사이의 관계식을 구하여라.

(1) 한 권에 1000원 하는 공책 x권의 값 y원 함수이고, 관계식은 $y=1000x$이다.

(2) 한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 넓이 y cm^2 함수이고, 관계식은 $y=x^2$이다.

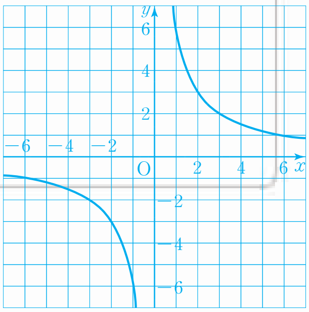
(3) 자연수 x의 약수 y 함수가 아니다.

중① 함숫값과 함수의 그래프

2 함수 $f(x)=\dfrac{6}{x}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $f(-2)$, $f(1)$의 값을 구하여라. $f(-2)=-3$, $f(1)=6$

(2) 함수의 그래프를 그려라.



단원의 지도 목표

1. 함수

① 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해하게 한다.
② 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있게 한다.
③ 역함수의 뜻을 알고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있게 한다.

2. 유리함수와 무리함수

① 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.
② 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 함수의 그래프는 공학적 도구를 활용하여 이해하게 할 수 있다.
② 유리식, 무리식은 유리함수, 무리함수의 의미를 이해할 수 있는 정도로 간단히 다룬다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습

[중1~3학년군]
함수와 그래프
일차함수와 그래프
일차함수와
일차방정식의 관계
이차함수와 그래프
[수학Ⅱ]
집합

본 단원

1. 함수
대응과 함수
합성함수와 역함수

2. 유리함수와 무리함수
유리함수
무리함수

후속 학습

[수학Ⅱ]
등차수열과 등비수열
[미적분Ⅱ]
지수함수와 로그함수의
뜻과 그래프
삼각함수의 뜻과 그래프

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~5	68~69	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 함수	중단원 도입		70	• 컴퓨터의 IP주소와 인터넷	
	01 대응과 함수		71~79	• 대응 • 함수 • 일대일함수와 일대일 대응 • 항등함수와 상수함수	대응, 정의역, 공역, 치역, 일대일함수, 일대일 대응, 항등함수, 상수함수, $f:\ X \longrightarrow Y$
	02 합성함수와 역함수	6~9	80~88	• 합성함수 • 역함수 • 역함수의 그래프의 성질	합성함수, 역함수, $g \circ f$, $(g \circ f)(x)$, $y=g(f(x))$, f^{-1}, $y=f^{-1}(x)$
	수준별 학습	10	89~91	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 유리함수와 무리함수	중단원 도입	11~15	92	• 모래시계 속의 함수	
	01 유리함수		93~101	• 유리식 • 유리함수 • 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프 • 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프 • 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프	유리식, 유리함수, 다항함수, 점근선
	02 무리함수	16~18	102~108	• 무리식 • 무리함수 • 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프 • 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프	무리식, 무리함수
	수준별 학습	19	109~111	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		20~21	112~119	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 함수 개념의 발달

함수의 개념의 근원은 고대 바빌로니아 시대까지 거슬러 올라간다. 바빌로니아 인들은 천체 위치의 주기성을 발견하고, 경험적 자료를 바탕으로 천체의 운동을 나타내는 경로를 추정하여 이를 수표로 나타내었는데, 이 수표는 함수 개념을 이용하여 만든 것이다. 그러나 본격적으로 개념화된 함수는 17세기에 이르러 역학에서 물체의 운동을 곡선으로 나타내어 연구하는 가운데 시간과 거리와 같은 변량 사이의 관계로서 수학에 도입되었다. 물론 그 이전에도 삼각비, 지수, 로그 등이 이용되었지만 삼각비와 지수, 로그가 생겨난 시기부터 함수적인 개념으로 사용된 것은 아니다. 유클리드(Euclid . ?B.C. 325～?B.C. 265)의 "원론"에 나오는 삼각비에 대한 내용에서도 삼각함수가 정의되고 고찰된 것은 아니며 프톨레마이오스(Ptolemaeos ; ?85～?165)에 의하여 만들어진 삼각함수적인 표 역시 필요한 두 양 사이의 상관관계를 통한 법칙선의 발견이라는 입장에서 다루지는 않았다. 15세기 후반에 네이피어(Napier, J. ; 1550～1617)가 발견한 로그 역시 천문학의 계산에 크게 이용되었지만 함수로서 로그를 생각하게 된 것은 그 후 상당한 세월이 흐르고 난 후이다.

오늘날과 같은 함수의 개념이 처음으로 사용된 것은 1692년의 독일의 수학자 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646～1716)의 논문에서였다. 그러나 그의 연구 방법은 주로 기하학적인 것이어서 그림을 통한 직관적인 판단이 선행되었으므로 논리적 엄밀성이 결여되었고, 증명도 완벽하지 못하였으며 함수라는 용어도 막연한 것이었다.

함수라는 용어는 라이프니츠와 베르누이(Bernoulli, J. ; 1654～1705)의 서신 왕래 가운데 처음으로 등장하였고, 함수 기호 f를 처음 사용한 수학자는 오일러(Euler, L. ; 1707～1783)였다. 오일러는 그의 책 "무한해석입문"에서 함수를 '변수와 몇 개의 상수로 만들어지는 해석적인 식'이라고 정의하였고, x의 임의의 함수는 직선 또는 곡선으로 나타내어지며 역으로 임의의 곡선은 함수로 나타내어진다고 하여 함수를 수식화하여 해석적인 식으로 다루었다. 오일러가 생각한 함수로는 다항함수, 유리함수, 무리함수와 같은 대수적 함수와 지수함수, 로그함수, 삼각함수와 같은 초월함수 등이 있다.

당시의 함수는 곡선과 밀접한 관련성을 가지고 있었고 그러한 곡선은 대부분 다가(多價) 대응이었으나, 한 변수의 다른 변수에 대한 종속 관계가 다가 대응이 되는 경우에는 다루기가 매우 혼란스러웠다. 특히 음함수와 같은 함수식에서 다른 변수로 나타낼 때, 여러 개의 식이 나오게 되는 경우에는 혼란을 일으키게 되므로 수학자들은 함수를 일가(一價) 대응으로 제한하게 되었고, 결국 이것이 함수의 일반적인 정의로 받아들여지게 되었다.

18세기 후반에 진동하는 끈에 대한 편미분방정식의 해에 대한 논의에서 하나의 해석적인 식으로 나타내어지지 않는 함수가 등장하였고, 푸리에(Fourier, J. B. J. ; 1768～1830)가 열전도에 관한 연구에서 임의의 함수는 삼각급수로 전개 가능하다는 주장을 제기하면서 함수는 하나의 해석적인 표현이 가능한 것이라는 전통적인 관념에 혁명적인 변화가 일어났다. 즉, 푸리에급수라고 표현되는 곡선을 연구하여 이전의 함수 개념보다 더 일반적인 관계를 생각하여 함수의 개념이 해석적인 식의 개념에서 벗어나게 되었다. 이에 따라 함수의 정의를 명확하게 하기 위하여 노력을 하게 되었다.

코시(Cauchy, A. L. ; 1789～1857)는 '변수 x, y 사이에 어떤 관계가 있어서 x의 값이 정해지면 이에 대하여 y의 값이 정해질 때, y를 x의 식으로 나타내고, x

를 독립변수, y를 종속변수라 하며 y는 x의 함수이다.' 라고 정의하였다. 이 정의로 인하여 오일러의 해석적인 식으로 나타내어진다는 개념에서 벗어나 변수 사이의 대응 관계로 함수를 정의할 수 있게 되었다.

그리고 이를 바탕으로 1837년에 디리클레(Dirichlet, J. P. G. L. ; 1805∼1859)는 그 이전에 코시가 가지고 있던 견해를 개선하여 다음과 같은 정의에 도달하였다.

> '변수는 수 집합의 임의의 원소를 나타낸다. 만일 두 변수 x, y에 대하여 x에 어떤 값이 주어질 때마다 어떤 법칙이나 대응에 의하여 y의 값이 자동적으로 정해지는 그와 같은 관계가 있으면 y를 x의 함수라고 한다.'

나중에 미적분학의 도입 과정에서 디리클레의 함수 개념이 제시되는 것이 전통이 되어 왔다. 그러나 그 정의는 매우 광범위한 것이고 해석적인 것과 같은 식에 의하여 x와 y 사이의 관계를 표현할 수 있는 어떠한 사항도 고려하지 않았다. 즉, 이것은 두 수의 집합 사이의 관계에 대한 기본적인 생각만을 강조하고 있을 뿐이었다.

2. 현대적 함수 개념

오늘날 우리가 사용하고 있는 함수를 곱집합, 순서쌍, 상등 관계, 합성 관계 등을 이용하여 정의하면 다음과 같다.

a와 b의 순서쌍 $(a,\ b)$를

$$(a,\ b)=(\{a\}, \{a,\ b\})$$

로 정의하면

(ⅰ) $(a,\ b)\neq(c,\ d) \iff a\neq c$ 또는 $b\neq d$

(ⅱ) $(a,\ b)=(c,\ d) \iff a=c$이고 $b=d$

임을 알 수 있다.

또 두 집합 A, B의 곱집합(Cartesian product) $A\times B$를

$$A\times B=\{(a,\ b)\,|\,a\in A,\ b\in B\}$$

로 정의한다.

이제 두 집합 사이의 관계(relation)를 정의하여 보자.

두 집합 A, B에 대하여 곱집합 $A\times B$의 부분집합을 집합 A에서 집합 B로의 관계라고 한다. 이를테면 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{a,\ b,\ c,\ d\}$일 때 곱집합 $A\times B$의 부분집합 $\{(1,\ a),\ (2,\ b),\ (3,\ c)\}$는 A에서 B로의 관계이다.

일반적으로 A에서 B로의 관계를 R로 나타내고, $(a,\ b)\in R$를 $b=R(a)$ 또는 aRb로 나타낸다. 이때 'a와 b는 R라는 관계를 가진다.'라고 한다.

또 관계 R의 정의역 Dom(R)와 치역 Range(R)를 각각 다음과 같이 정의한다.

$\mathrm{Dom}(R)$
$=\{a\in A\,|\,B$의 어떤 원소 b에 대하여 $(a,\ b)\in R\}$

$\mathrm{Range}(R)$
$=\{b\in B\,|\,A$의 어떤 원소 a에 대하여 $(a,\ b)\in R\}$

한편 R가 A에서 B로의 관계일 때 R의 역관계 R^{-1}를 다음과 같이 정의한다.

$$R^{-1}=\{(b,\ a)\,|\,(a,\ b)\in R\}$$

또 R가 A에서 B로의 관계이고, S가 B에서 C로의 관계일 때, R와 S의 합성 관계 $S\circ R$를 다음과 같이 정의한다.

$S\circ R=\{(a,\ c)\,|\,B$의 어떤 원소 b에 대하여
$(a,\ b)\in R$이고 $(b,\ c)\in S\}$

이제 위에서 정의한 관계를 이용하여 함수를 정의하여 보자.

집합 A에서 집합 B로의 관계 f가 다음 두 조건

(ⅰ) $\mathrm{Dom}(f)=A$

(ⅱ) $(x,\ y)\in f$이고 $(x,\ z)\in f$이면 $y=z$

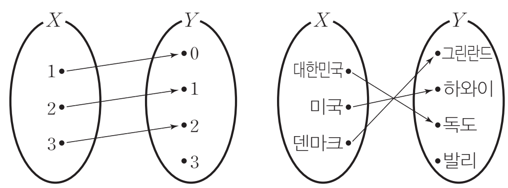
를 만족시킬 때, 이 관계 f를 집합 A에서 집합 B로의 함수(function)라고 한다.

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

대단원		Ⅱ. 함수	쪽수	교과서 68~72쪽
소단원		1. 함수　1-1 대응과 함수	차시	1/21
학습 목표		대응의 뜻을 이해할 수 있다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 중단원 도입 글을 읽고, 단원 과제를 발문하여 이번 단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다. ◐ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 대응의 뜻을 이해할 수 있다.		
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◐ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 해결하도록 한다. ◐ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◐ 학습 내용 설명 • **대응** 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝지은 것을 집합 X에서 집합 Y로의 대응이라고 한다. ◐ 문제 1번을 풀게 한다. • 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 함수에 대하여 알아본다.		

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

<table>
<tr><td colspan="2">대단원</td><td>Ⅱ. 함수</td><td>쪽수</td><td>교과서 72~74쪽</td></tr>
<tr><td colspan="2">소단원</td><td>1. 함수 1-1 대응과 함수</td><td>차시</td><td>2/21</td></tr>
<tr><td colspan="2">학습 목표</td><td colspan="3">함수의 뜻을 이해할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td>학습 과정</td><td colspan="2">교수 · 학습 활동</td><td>교수 · 학습상의 유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>선수 학습 확인
동기 유발

학습 목표 제시</td><td colspan="2">◎ 이전 차시에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다.
◎ 학습 동기 유발을 위한 발문을 한다.
예 다음 대응의 공통점을 말하여 보자.


◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다.
• 함수의 뜻을 이해할 수 있다.</td><td></td></tr>
<tr><td>전개</td><td>탐구 활동

개념 학습

문제 해결</td><td colspan="2">◎ 탐구 활동을 해결하도록 한다.
◎ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다.
◎ 학습 내용 설명
• 함수
(1) 공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 하나씩만 대응할 때, 이 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 함수라고 하며, $f: X \longrightarrow Y$로 쓴다.
(2) 집합 X를 함수 f의 정의역, 집합 Y를 함수 f의 공역이라고 한다.
(3) $f(x)$를 함수 f에 의한 x의 함숫값이라고 한다.
(4) $\{f(x) \mid x \in X\}$를 함수 f의 치역이라고 한다.
◎ 예제 01을 설명한다.
◎ 문제 2, 3, 4번을 풀게 한다.
• 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.</td><td></td></tr>
<tr><td>정리</td><td>학습 내용 정리
차시 예고</td><td colspan="2">◎ 본시의 학습 내용을 정리한다.
◎ 다음 차시를 예고한다.
• 두 함수가 서로 같을 조건과 함수의 그래프에 대하여 알아 본다.</td><td></td></tr>
</table>

1 함수

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해하게 한다.
② 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있게 한다.
③ 역함수의 뜻을 알고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 대응과 함수	대응
	함수
	일대일함수와 일대일 대응
	항등함수와 상수함수
02 합성함수와 역함수	합성함수
	역함수
	역함수의 그래프의 성질
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 70 쪽

1 함수

컴퓨터의 IP 주소와 인터넷

인터넷상에서 각각의 컴퓨터는 다른 컴퓨터와 구별되도록 고유한 IP 주소를 가진다.

IP 주소 체계인 IPv4의 주소는 123.123.123.123과 같이 네 부분으로 나뉘며 각 부분은 0에서 255까지의 세자리 자연수로 이루어져 있어 $(256)^4=(2^8)^4=2^{32}$, 즉 약 43억 개이다. 하지만 인터넷에 연결되는 단말기들의 수가 기하급수적으로 증가하자 이를 수용하기 위해서 2^{128}, 즉 약 3.4×10^{38} 개의 주소를 갖는 IPv6이라는 새로운 주소 체계가 개발되었다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자.

88쪽

IP 주소 체계에서 함수를 찾을 수 있을까?

들어가면서 중학교에서는 변화하는 두 양 사이의 관계로서 함수를 지도하였다. 그런데 컴퓨터와 IP 주소, 전화와 전화번호 등과 같이 서로 짝을 짓는 방식으로 함수를 설명할 수도 있다. 이 단원에서는 두 집합의 원소끼리 서로 짝을 짓는 대응 방식으로 함수를 도입하고 우리 주변의 자연 환경이나 사회 현상을 수학적인 안목으로 파악하는 경험을 통하여 함수적 사고를 할 수 있도록 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다.	상	일상생활 또는 대응 그림과 그래프를 보고 함수인 것을 찾아 그 이유를 설명할 수 있다.
	중	대응 그림과 그래프를 보고 함수인 것을 찾을 수 있다.
	하	대응 그림을 보고 함수인 것을 찾을 수 있다.
2. 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.	상	함수의 합성이 정의될 조건을 설명하고, 합성함수를 구할 수 있다.
	중	일차함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=cx+d$의 합성함수를 구할 수 있다.
	하	함수 $f(x)$, $g(x)$에 대한 합성함수 의 함숫값 $f(g(a))$ (단, a는 $f\circ g$의 정의역의 원소)를 구할 수 있다.
3. 역함수의 뜻을 알고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.	상	역함수의 존재 조건을 설명하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.
	중	일차함수 $f(x)=ax+b\,(a\neq0$, a, b는 간단한 정수)의 역함수를 구할 수 있다.
	하	함수 $f(x)$에 대하여 역함수의 함숫값 $f^{-1}(a)$ (단, a는 f의 치역의 원소)를 구할 수 있다.

교과서 71 쪽

01 대응과 함수

● 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다.

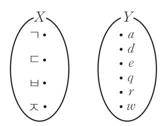
대응이란 무엇인가?

생각 열기 **키보드**

컴퓨터의 키보드는 한글, 알파벳, 숫자, 특수 기호 등 여러 가지 문자를 입력하도록 만든 장치이다. 키보드의 각 키에는 눌렀을 때 입력되는 여러 문자가 적혀 있다. 입력해야 할 문자의 수보다 키의 개수가 적으므로 하나의 키에는 보통 두 개 이상의 문자가 짝지어져 있다.

탐구 활동 **생각 열기의 키보드를 보고, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 같은 키에 적혀 있는 한글과 알파벳을 서로 짝지을 때, 오른쪽 그림에서 집합 X에 있는 한글에 짝지어지는 알파벳을 집합 Y에서 찾아 화살표로 연결하여 보자.
2. 한글을 알파벳으로 잘못 입력하였더니 '$snfl$'이 되었다. 원래 입력하려던 한글은 무엇인가?

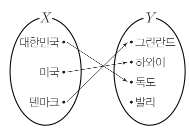


두 집합

$X=\{$대한민국, 미국, 덴마크$\}$,

$Y=\{$그린란드, 하와이, 독도, 발리$\}$

에 대하여 집합 X의 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 'y는 x에 속한 영토'의 관계로 짝지어지면 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.



❶ 이와 같이 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝지은 것을 집합 X에서 집합 Y로의 **대응**이라고 한다.

이때 집합 X의 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 짝지어지면 x에 y가 대응한다고 하며, 이것을 기호로 $x \longrightarrow y$와 같이 나타낸다.

● X와 Y 사이의 대응이 아니라 X에서 Y로의 대응이므로 대응하는 두 집합 사이에는 화살표와 같은 대응 방향이 있다.

01 대응과 함수

소단원 지도 목표

① 대응과 함수의 뜻을 알게 한다.
② 정의역, 공역, 치역의 뜻을 알게 한다.
③ 함수의 그래프를 이해하게 한다.
④ 일대일함수, 일대일 대응의 뜻을 알고, 차이점을 이해하게 한다.
⑤ 항등함수와 상수함수의 뜻을 알게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 중학교에서 학습한 함수의 개념과 대응 관계로 정의된 함수의 개념의 차이를 알게 한다.

2. 식이 같지 않더라도 정의역과 각 함숫값이 같을 경우에는 서로 같은 함수임을 이해하게 한다.

3. 일대일함수, 일대일 대응, 항등함수, 상수함수 등은 구체적인 예를 통해 이해시킨다.

새로 나온 용어와 기호

- 대응(對應, correspondence)
- 정의역(定義域, domain)
- 공역(共域, codomain)
- 치역(値域, range)
- 일대일함수(一對一函數, one to one function)
- 일대일 대응(一對一對應, one to one correspondence)
- 항등함수(恒等函數, identity function)
- 상수함수(常數函數, constant function)
- $f: X \longrightarrow Y$

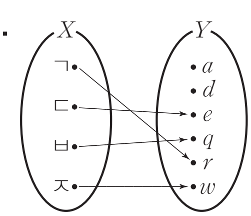
생각 열기 참/고/자/료

컴퓨터의 키보드는 마우스와 더불어 컴퓨터의 대표적인 입력 장치로 보통 키보드, 자판 등으로 불린다. 자판 위에 있는 키를 누르면 자음, 모음과 같은 글자의 구성 요소, 특수 문자, 숫자 등을 컴퓨터에 입력할 수 있으며, 여러 가지 특수키를 이용하여 컴퓨터를 조종할 수 있다. 보통 나라마다 키의 개수와 특수 글쇠의 형태가 다른 키보드가 쓰이며, 한 국가 안에서도 여러 가지 입력 방식이 있는 경우 두 가지 이상의 서로 다른 형태의 키보드가 쓰이기도 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 키보드의 같은 글쇠에 적혀 있는 한글과 알파벳의 관계를 이용하여 대응을 이해하기 위한 것이다.

1.



2. 누리

본문 해설

❶ 공집합이 아닌 두 집합 X, Y에서 어떤 주어진 관계에 의하여 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소가 짝지어지는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 대응이라고 한다.

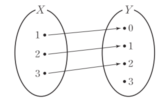
교과서 72 쪽

❶ 보기 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여

(1) 집합 X의 각 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 $y=x-1$의 관계로 대응할 때,

$$1 \longrightarrow 0,\quad 2 \longrightarrow 1,\quad 3 \longrightarrow 2$$

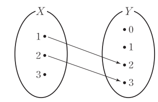
이므로 이 대응을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.



(2) 집합 X의 각 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 $y=x+1$의 관계로 대응할 때,

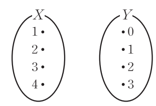
$$1 \longrightarrow 2,\quad 2 \longrightarrow 3$$

이고, 3에는 대응하는 원소가 없으므로 이 대응을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.

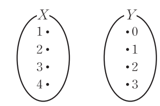


문제 1 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 집합 X의 각 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 다음 관계에 의하여 대응한 것을 그림으로 나타내어라.

(1) $y=$(x의 약수의 개수)

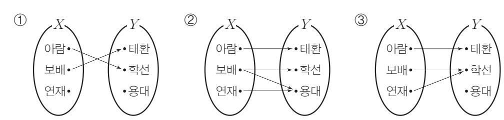


(2) $y=$(x의 양의 제곱근)



함수란 무엇인가?

탐구 활동 어떤 토론에서 여학생이 남학생에게 질문할 차례가 되었다. 다음 그림의 ①, ②, ③은 질문할 여학생의 집합 X에서 답변할 남학생의 집합 Y로의 대응을 각각 나타낸 것이다.



위의 대응을 보고, 다음 두 조건에 대하여 물음에 답하여 보자.

〈조건 1〉 모든 여학생은 남학생에게 질문을 한다.
〈조건 2〉 한 여학생이 두 명 이상의 남학생에게 질문을 할 수 없다.

1. 〈조건 1〉을 만족시키는 대응을 모두 찾아보자.
2. 〈조건 2〉를 만족시키는 대응을 모두 찾아보자.
3. 〈조건 1〉과 〈조건 2〉를 모두 만족시키는 대응을 찾아보자.

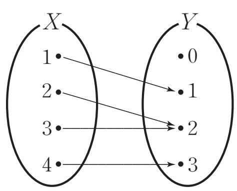
본문 해설

❶ 집합 Y의 원소 중 대응에서 제외되는 원소가 있는 경우에도 대응이라고 할 수 있다. 또 집합 X의 원소 중 대응에서 제외되는 원소가 있는 경우도 대응이라고 할 수 있다.

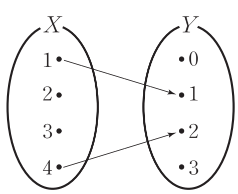
1

목표 | 주어진 두 집합에 대하여 조건을 만족시키는 대응을 그림으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이 | (1) 1, 2, 3, 4의 약수의 개수는 각각 1, 2, 2, 3이다.
따라서 대응을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.



(2) 1, 2, 3, 4의 양의 제곱근은 각각 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2이므로 X의 원소 1, 4에 대응하는 Y의 원소는 각각 1, 2이고 X의 원소 2, 3에 대응하는 Y의 원소는 없다.
따라서 대응을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.



탐구 활동의 이해

활동 목표 • 남학생과 여학생 사이의 토론에서 주어진 두 가지 조건을 이용하여 대응이 함수가 되기 위한 두 가지 조건을 자연스럽게 이해하도록 하기 위한 것이다.

1. 〈조건 1〉을 만족시키려면 여학생 모두에 남학생이 대응하여야 하므로 조건을 만족시키는 대응은 ②와 ③이다.

2. 〈조건 2〉를 만족시키려면 한 여학생과 두 명 이상의 남학생이 대응할 수 없으므로 조건을 만족시키는 대응은 ①과 ③이다.

3. 〈조건 1〉과 〈조건 2〉를 모두 만족시키는 대응은 **1**, **2**의 결과에 의하여 ③이다.

읽/기/자/료 함수의 정의의 역사적 변천

1. 관계로 함수를 도입한 라이프니츠

라이프니츠

함수(function)라는 용어는 독일의 수학자 라이프니츠가 1692년에 처음으로 도입하였다. 그는 곡선과 관련된 모든 양, 이를테면 곡선 위의 점의 좌표, 접선의 기울기와 같은 양을 나타내기 위한 개념으로 함수를 수학에 도입하였으며 변수 x값의 변화에 따라 다른 변수 y가 정해지면 y를 x의 함수라고 정의하였다.

2. 함수를 식으로 표현한 오일러

오일러

오일러는 “무한소해석입문”에서 변량 사이의 관계를 나타내는 해석적인 식을 함수라고 정의하고 ‘한 변수 x에 대한 함수란 x와 상수로 만들어진 관계식을 말한다.’라고 하였다. 또 현재의 함수 기호인 $f(x)$를 도입하여 ‘x의 임의의 함수는 직선 또는 곡선을 나타내며, 역으로 임의의 곡선은 함수로 나타낼 수 있다.’라고 하였다.

탐구 활동에서 〈조건 1〉과 〈조건 2〉를 모두 만족시키는 대응 ③은 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩만 대응한다.

1 이와 같이 공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 하나씩만 대응할 때, 이 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 함수라고 하며, 이것을 기호로

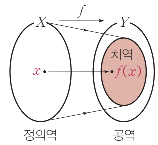
$$f: X \longrightarrow Y$$

와 같이 나타낸다.

함수를 나타내는 기호로, 흔히 함수를 뜻하는 'function'의 첫 글자 'f'와 f 다음의 알파벳인 g, h 등을 사용한다.

이때 집합 X를 함수 f의 **정의역**, 집합 Y를 함수 f의 **공역**이라고 한다.

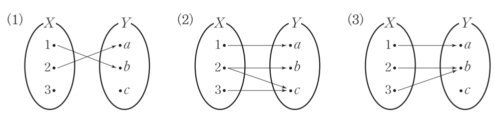
또 함수 f에 의하여 정의역 X의 각 원소 x에 공역 Y의 원소 y가 대응할 때, 이것을 기호로 $y=f(x)$와 같이 나타내고, $f(x)$를 함수 f에 의한 x의 함숫값이라고 한다.



그리고 함수 f의 함숫값 전체로 이루어진 집합 $\{f(x) \mid x \in X\}$를 함수 f의 **치역**이라고 한다.

참고 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 임의의 함숫값 $f(x)$ $(x \in X)$는 공역의 원소이다. 즉, $f(x) \in Y$이므로 치역 $\{f(x) \mid x \in X\}$는 항상 공역의 부분집합이다. 또한 치역 $\{f(x) \mid x \in X\}$를 간단히 $f(X)$로 나타내기도 한다.

예제 01 다음 대응 중에서 함수인 것을 찾고, 그 함수의 정의역, 공역, 치역을 구하여라.



풀이 (1)은 X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
(2)는 X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 b, c로 2개이므로 함수가 아니다.
(3)은 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩만 대응하므로 함수이다.
한편 (3)에서 이 함수의 정의역은 $\{1,\ 2,\ 3\}$이고, 공역은 $\{a,\ b,\ c\}$이다. 또 함숫값은 $f(1)=a$, $f(2)=b$, $f(3)=b$이므로 치역은 $\{a,\ b\}$이다.

답 (1) 함수가 아니다. (2) 함수가 아니다.
(3) 함수이다.
정의역: $\{1,\ 2,\ 3\}$, 공역: $\{a,\ b,\ c\}$, 치역: $\{a,\ b\}$

본문 해설

1 "X의 각 원소에"라는 말은 "X의 모든 원소에"라는 뜻이고, "하나씩만"은 X의 원소 하나에 Y의 원소가 둘 이상 대응하면 안 된다는 뜻이다. 즉, 집합 X에서 Y로의 대응 중 다음 두 조건을 만족시키는 것을 함수라 하고, 기호 $f: X \longrightarrow Y$로 나타낸다.

(i) 집합 X의 모든 원소가 대응된다.

(ii) x_1, $x_2 \in X$에 대하여
$x_1=x_2$이면 $f(x_1)=f(x_2)$이다.

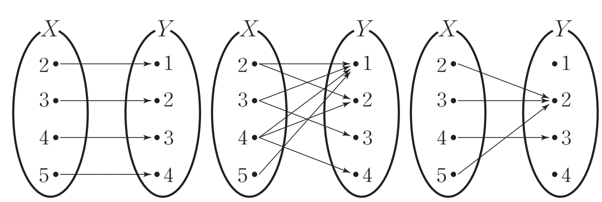
지/도/자/료

1. 독립변수와 종속변수

어떤 집합의 임의의 원소를 나타내는 문자를 '변수'라고 한다. 또 어떤 집합의 고정된 원소를 나타내는 문자 또는 수를 '상수'라고 한다. 따라서 함수 $y=f(x)$가 주어졌을 때, 문자 x는 정의역 X의 임의의 원소를 나타내는 변수이다. 이때 x는 정의역 X의 임의의 원소를 나타내므로 이를 '독립변수'라고 부른다. 한편 $f(x)$는 x의 값에 따라 정해지는 함숫값을 나타내는 기호이다. 따라서 $y=f(x)$로 놓으면 y는 x의 값에 따라 정해지는 공역 Y의 임의의 원소이다. 이러한 이유에서 y를 '종속변수'라고 한다.

2. 함수가 될 수 있는 대응

두 집합 $X=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음과 같이 여러 가지 대응을 생각할 수 있다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

대응은 [그림 1]과 같이 X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩 대응되는 일대일 대응, [그림 2]와 같이 X의 원소 하나에 Y의 원소 2개 이상이 대응되고 Y의 원소 하나가 X의 원소 2개 이상에 대응되는 다대다 대응, [그림 3]과 같이 Y의 원소 하나가 X의 원소가 1개 이상에 대응되는 다대일 대응으로 나누어 볼 수 있는데 일대일 또는 다대일 대응을 함수라고 한다.

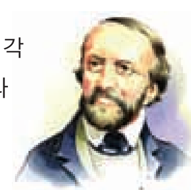
3. 대응 개념으로 함수를 정의한 코시

코시는 여러 개의 변수 가운데 어떤 관계가 있어 그중 하나의 값이 정해짐에 따라 다른 변수의 값이 정해질 때, 처음의 변수를 독립변수, 나중의 변수를 종속변수라 하고, 변수 사이의 관계를 함수로 정하였다.

코시

4. 일의적 대응으로 함수를 정의한 디리클레

디리클레는 두 변수 x, y에 대하여 x의 각 값에 따라 y의 값이 정해지는 대응만 있다면 y를 x의 함수라고 정의하여 두 변수 사이에 수식이나 법칙의 관계가 없어도 함수가 된다고 생각함으로써 함수의 의미를 확대하였다.



디리클레

5. 집합에서의 대응 관계로 함수를 정의한 데데킨트

데데킨트는 교과서의 함수의 정의와 같이 '집합 X의 각각의 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응될 때 함수가 된다.'고 정의하였다.

데데킨트

2

목표| 대응 중에서 함수인 것을 찾고, 함수의 정의역, 공역, 치역을 구할 수 있게 한다.

풀이| 대응 (1)과 (2)는 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 하나씩만 대응하므로 집합 X에서 집합 Y로의 함수이다.

(1) 정의역: $\{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3}\}$, 공역: $\{\mathbf{4},\ \mathbf{5},\ \mathbf{6}\}$, 치역: $\{\mathbf{4},\ \mathbf{5}\}$

(2) 정의역: $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{d},\ \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{s}\}$, 공역: {ㄴ, ㅁ, ㄹ, ㅇ}, 치역: {ㄴ, ㅁ, ㄹ, ㅇ}

대응 (3)은 집합 X의 원소 금성에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

3

목표| 대응 규칙과 정의역, 공역이 주어진 함수의 치역을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x=-2$일 때 $y=(-2)^2=4$

$x=-1$일 때 $y=(-1)^2=1$

$x=0$일 때 $y=0^2=0$

$x=1$일 때 $y=1^2=1$

$x=2$일 때 $y=2^2=4$

이므로 구하는 함수의 치역은 $\{\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{4}\}$이다.

(2) $x=-2$일 때 $y=-2\times(-2)+3=7$

$x=-1$일 때 $y=-2\times(-1)+3=5$

$x=0$일 때 $y=-2\times0+3=3$

$x=1$일 때 $y=-2\times1+3=1$

$x=2$일 때 $y=-2\times2+3=-1$

이므로 구하는 함수의 치역은 $\{\mathbf{-1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{3},\ \mathbf{5},\ \mathbf{7}\}$이다.

4

목표| 정의역과 공역이 주어지지 않은 함수의 정의역과 치역을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 모든 실수 x에 대하여 함숫값이 $-x+2$로 정의되므로 이 함수의 정의역은 **실수 전체의 집합**이다.
임의의 실수 y에 대하여 $y=-x+2$인 실수 x의 값이 존재하므로 이 함수의 치역은 **실수 전체의 집합**이다.

(2) 모든 실수 x에 대하여 함숫값이 $|x|$로 정의되므로 이 함수의 정의역은 **실수 전체의 집합**이다.

$|x|=\begin{cases} x\ (x\geq0) \\ -x\ (x<0)\end{cases}$ 이므로 이 함수의 치역은

$\{\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0}$**인 실수**$\}$

(3) 모든 실수 x에 대하여 함숫값이 x^2-1로 정의되므로 이 함수의 정의역은 **실수 전체의 집합**이다.

$x^2-1\geq-1$이므로 이 함수의 치역은

$\{\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{y}\geq\mathbf{-1}$**인 실수**$\}$

(4) 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 함숫값이 $\frac{2}{x}$로 정의되므로 이 함수의 정의역은 $\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$**인 실수**$\}$이다.

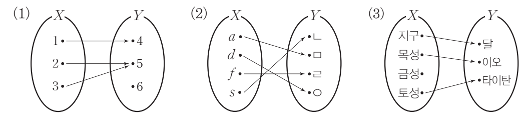
0을 제외한 임의의 실수 y에 대하여 $y=\frac{2}{x}$인 실수 x의 값이 존재하므로 이 함수의 치역은

$\{\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{y}\neq\mathbf{0}$**인 실수**$\}$

교과서 74 쪽

문제 2 다음 대응 중에서 함수인 것을 찾고, 그 함수의 정의역, 공역, 치역을 구하여라.

(3) 이오는 목성의 위성, 타이탄은 토성의 위성이고 금성은 위성이 없다.



문제 3 다음 함수의 정의역은 $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$이고 공역은 실수 전체의 집합일 때, 치역을 구하여라.

(1) $y=x^2$ (2) $y=-2x+3$

함수 $y=f(x)$의 정의역이나 공역이 주어지지 않은 경우 정의역은 함숫값 $f(x)$가 정의될 수 있는 실수 x의 값 전체의 집합으로 생각하고, 공역은 실수 전체의 집합으로 생각한다.

보기 (1) 함수 $y=2x+1$의 정의역과 공역은 실수 전체의 집합이다.
(2) 함수 $y=\frac{1}{x-1}$의 정의역은 $x\neq1$인 실수 전체의 집합이고, 공역은 실수 전체의 집합이다.

문제 4 다음 함수의 정의역과 치역을 구하여라.

(1) $y=-x+2$ (2) $y=|x|$

(3) $y=x^2-1$ (4) $y=\frac{2}{x}$

등식 $f(x)=g(x)$는 함숫값이 같다는 뜻이고, 등식 $f=g$는 두 함수가 서로 같다는 뜻이다.

두 함수 f, g가 서로 같은 함수가 아닐 때, $f\neq g$로 나타낸다.

정의역과 공역이 각각 같은 두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: X \longrightarrow Y$가 정의역 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$일 때, 두 함수 f와 g는 서로 같다고 하며, 이것을 기호로

$$f=g$$

와 같이 나타낸다.

보기 정의역과 공역이 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$인 두 함수 $f: X \longrightarrow X$, $g: X \longrightarrow X$에 대하여 $f(x)=|x|$, $g(x)=x^2$으로 정의하면

$$f(-1)=g(-1)=1,\quad f(0)=g(0)=0,\quad f(1)=g(1)=1$$

이므로 두 함수 f와 g는 서로 같다. 즉, $f=g$이다.

교과서 75 쪽

문제 5 정의역이 $X=\{a,\ b\}$인 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x+2$에 대하여 $f=g$일 때, 집합 X를 구하여라. (단, $a\neq b$)

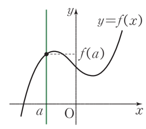
함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 전체의 집합

$$G=\{(x,\ f(x))\mid x\in X\}$$

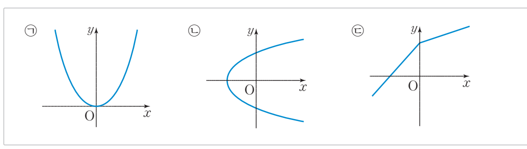
를 함수 f의 그래프라고 한다.

❶ 이때 정의역의 원소에 공역의 원소는 두 개 이상 대응하지 않으므로 함수의 그래프는 정의역의 각 원소 a에 대하여 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만난다.

● 순서쌍 $(x,\ f(x))$는 좌표평면 위의 점 $(x,\ f(x))$에 대응하므로 그래프 G를 점의 집합으로 생각하여 좌표평면 위에 나타낼 수 있다.



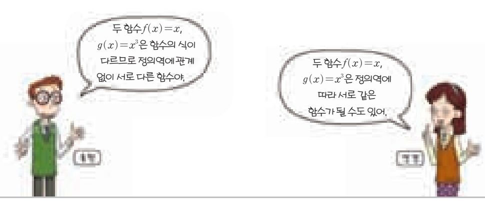
문제 6 다음 그림 중에서 함수의 그래프를 모두 찾아라.



사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

다음 중에서 누구의 말이 옳은지 토의하고, 그 근거를 제시하여 보자.



5

목표| 두 함수가 서로 같을 조건을 이용하여 함수의 정의역의 원소를 구할 수 있게 한다.

풀이| 정의역 X의 두 원소에 대하여 두 함수 f, g의 함숫값이 같아야 하므로

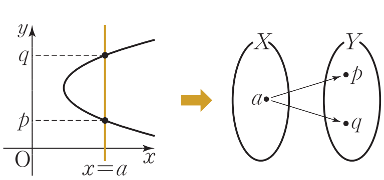
$f(x)=g(x)$에서 $x^2=x+2$, $(x+1)(x-2)=0$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=2$이다.

$a\neq b$이므로 $X=\{a,\ b\}=\{\mathbf{-1,\ 2}\}$이다.

본문 해설

❶ 직선 $x=a$와 두 점에서 만나는 경우는 정의역의 한 원소 a에 대응되는 값이 두 개이므로 함수가 아니다.



6

목표| 좌표평면 위의 도형을 함수의 그래프인 것과 아닌 것으로 구별할 수 있게 한다.

풀이| ㉠, ㉢은 x의 각 원소에 y의 원소가 하나씩만 대응하므로 함수의 그래프이다.

(2)는 x의 한 원소에 y의 원소가 두 개 대응하는 경우가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

따라서 함수의 그래프인 것을 모두 찾으면 ㉠, ㉢이다.

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 두 학생의 주장에 대하여 어느 주장이 올바른지 토론하는 과정을 통하여 두 함수가 서로 같다는 것의 의미를 명확히 이해시키기 위한 문제이다.

풀이| 용찬이는 두 함수 $f(x)=x$, $g(x)=x^3$의 식을 비교하여 식이 다르면 정의역에 관계없이 서로 다른 함수라고 판정하고 있다.

하지만 두 함수의 정의역이 방정식 $x=x^3$의 모든 해를 원소로 하는 집합 $\{-1,\ 0,\ 1\}$의 공집합이 아닌 부분집합일 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 같다. 즉, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 정의역에 따라 서로 같은 함수가 될 수 있다. 따라서 연경이의 주장이 올바른 주장이다.

지/도/자/료 함수에 대한 오개념 지도 방법

1. 함수의 그래프를 생각할 때 좌표평면에 나타낸 어떤 직선 또는 곡선이라고 생각하는 경우가 많다. 하지만 정의역의 원소 x와 그에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍의 집합 $\{(x,\ f(x))\mid x$는 정의역의 원소$\}$가 실제 그래프임을 주의시킨다. 이때 정의역이 유한집합인 함수의 그래프는 좌표평면에 유한개의 점으로 표시됨을 보여 주고, 그래프는 직선 또는 곡선과 다른 개념임을 짚어 주는 것이 좋다.
2. 고등학교에서 다루는 함수의 그래프는 대부분 직선 또는 곡선이다. 따라서 그래프가 직선 또는 곡선의 형태로 나타나는 함수 $f(x)$를 '직선 $f(x)$' 또는 '곡선 $f(x)$'라고 하기도 한다는 점을 언급해 주는 것이 바람직하다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 포크 댄스 동아리에서 남학생과 여학생이 한 명씩 짝을 정할 때의 대응관계를 이용하여 함수가 일대일 대응이 되기 위하여 어떤 조건이 필요한지를 알도록 하기 위한 것이다.

1. (1)의 경우는 서로 다른 남학생이 한 여학생을 짝으로 정했을 때 발생하므로 이러한 경우가 생기지 않으려면 '**서로 다른 남학생은 반드시 서로 다른 여학생을 짝으로 정한다.**'라는 조건이 필요하다.

2. 여학생이 남학생보다 많으면 무조건 (2)의 경우가 생기므로 **여학생의 수가 남학생의 수보다 작거나 같아야 한다.**
이러한 조건이 주어졌을 때, 여학생 중 짝이 없는 학생이 생기지 않으려면 치역과 공역이 일치하도록 짝을 정해야 한다.

교과서 76 쪽

일대일함수와 일대일 대응이란 무엇인가?

탐구 활동

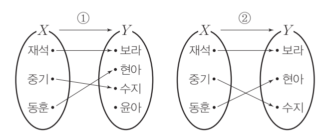
포크 댄스 동아리에서 남학생과 여학생이 한 명씩 짝을 정하려고 한다. 남학생의 집합을 정의역, 여학생의 집합을 공역으로 생각하고, 각 남학생에 여학생을 한 명씩 대응시키면 이 대응은 항상 함수가 되지만 다음의 이유로 남녀 학생이 한 명씩 짝지어지지 않을 수도 있다.

(1) 어떤 여학생은 두 명 이상의 남학생과 짝이 될 수 있다.
(2) 어떤 여학생은 짝이 없을 수도 있다.

다음 물음에 답하여 보자.

1. (1)의 경우가 생기지 않으려면 어떤 조건이 필요한지 생각하여 보자.
2. (2)의 경우가 생기지 않으려면 어떤 조건이 필요한지 생각하여 보자.

❶ 다음 그림과 같은 집합 X에서 집합 Y로의 함수 ①과 함수 ②는 정의역 X의 서로 다른 원소에 공역 Y의 서로 다른 원소가 대응한다.



이와 같이 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 \neq x_2\text{이면 } f(x_1) \neq f(x_2)$$

가 성립할 때, 이 함수 f를 **일대일함수**라고 한다.

한편 함수 ②는 일대일함수이면서 공역과 치역이 같다.

이와 같이 일대일함수 중에서 공역 Y의 모든 원소가 대응하여 치역과 공역이 일치하는 함수를 **일대일 대응**이라고 한다.

즉, 일대일 대응인 함수 $f: X \longrightarrow Y$는 다음 두 조건을 모두 만족시킨다.

'$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$'의 대우인 '$f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$'가 성립하여도 함수 f는 일대일함수이다.

❷ **일대일 대응**
(1) 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
$$x_1 \neq x_2\text{이면 } f(x_1) \neq f(x_2)$$
(2) 치역과 공역이 같다.

본문 해설

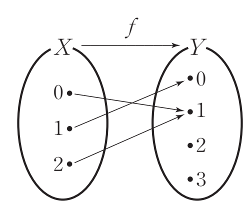
❶ 함수 ①, ②는 X의 서로 다른 원소에 Y의 서로 다른 원소가 대응하므로 '$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$'의 조건을 만족시킨다. 따라서 탐구 활동의 (1)의 경우가 생기지 않는다. 그러나 함수 ①의 경우는 여학생의 수가 남학생의 수보다 많으므로 탐구 활동의 (2)의 경우가 생겼음을 알 수 있다.

❷ 일대일 대응의 정의를 다르게 나타내면
1. 공역의 모든 원소가 대응한다. (공역=치역)
2. $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$
('$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$'의 대우)
한편 함수의 정의는 두 조건
1. 정의역의 모든 원소가 대응한다.
2. $x_1=x_2$이면 $f(x_1)=f(x_2)$
를 만족시키는 대응이므로 일대일 대응의 정의에서의 두 조건은 함수의 정의에서의 두 조건에서 정의역과 공역을 서로 바꾸어 생각하면 된다.

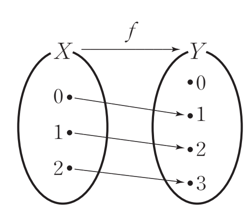
7

목표 | 일대일함수와 일대일 대응의 뜻을 알고, 이를 구별할 수 있게 한다.

풀이 | ㉠ 오른쪽 그림과 같이 X의 원소 0, 2에 대하여 $f(0)=f(2)$이므로 함수 f는 일대일함수가 아니다.



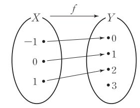
㉡ 오른쪽 그림과 같이 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응하므로 함수 f는 일대일함수이다. 그러나 공역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이고 치역은 $\{1,\ 2,\ 3\}$으로 서로 같지 않으므로 일대일 대응은 아니다.



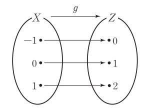
교과서 77 쪽

보기 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $Z=\{0,\ 1,\ 2\}$에 대하여

(1) 함수 $f:\ X \longrightarrow Y$, $f(x)=x+1$은 오른쪽 그림과 같이 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이므로 일대일함수이다.



(2) 함수 $g:\ X \longrightarrow Z$, $g(x)=x+1$은 오른쪽 그림과 같이 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $g(x_1) \neq g(x_2)$이고, 치역과 공역이 같으므로 일대일 대응이다.



문제 7 집합 $X=\{0,\ 1,\ 2\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $Z=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 다음과 같이 정의된 함수 f 중에서 일대일함수인 것과 일대일 대응인 것을 각각 찾아라.

㉠ $f:\ X \longrightarrow Y,\ f(x)=|x-1|$ ㉡ $f:\ X \longrightarrow Y,\ f(x)=x+1$
㉢ $f:\ X \longrightarrow Z,\ f(x)=x+1$ ㉣ $f:\ X \longrightarrow Z,\ f(x)=x^2-x+1$

예제 02 함수 $f(x)=2x-1$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

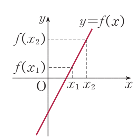
(1) 정의역과 공역이 실수 전체의 집합일 때, 함수 f는 일대일 대응임을 보여라.

(2) 정의역이 $X=\{x\,|\,0 \le x \le 2\}$, 공역이 $Y=\{y\,|\,-1 \le y \le 6\}$일 때, 함수 f는 일대일함수이지만 일대일 대응은 아님을 보여라.

❶ **증명** (1) 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면

$$f(x_1)-f(x_2)=2x_1-1-(2x_2-1)$$
$$=2(x_1-x_2) \neq 0$$

즉, $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.
한편 치역과 공역은 실수 전체의 집합으로 일치한다.
따라서 함수 $f(x)=2x-1$은 일대일 대응이다.



(2) (1)에서 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이므로 정의역이 $X=\{x\,|\,0 \le x \le 2\}$일 때에도 함수 $f(x)=2x-1$은 일대일함수이다.
한편 $0 \le x \le 2$일 때, $-1 \le 2x-1 \le 3$이므로 치역은 $\{y\,|\,-1 \le y \le 3\}$이다.
따라서 치역과 공역이 일치하지 않으므로 함수 $f(x)=2x-1$은 일대일함수이지만 일대일 대응은 아니다.

지/도/자/료

1. 일대일 대응은 함수의 특별한 경우로서 추후에 지도할 역함수의 정의에 기본이 되는 함수이므로 명확하게 이해시킨다.

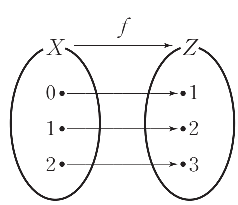
2. 함수 $f:\ X \longrightarrow Y$가 일대일 함수임을 증명하려면 $x_1 \neq x_2$일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$임을 보이거나 그의 대우 명제인 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$임을 보이면 됨을 강조한다.

3. 일대일 대응의 대표적인 경우인 일차함수는 그 그래프가 직선으로 나타내어진다. 특히 원점을 지나는 직선을 그래프로 가지는 일차함수 $f(x)=ax$를 선형함수(線形函數, linear function)라고 하는데, 일반적으로 다음과 같은 성질을 가진다.

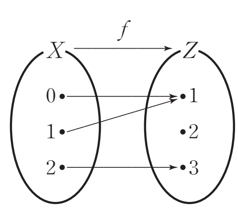
$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$$
$$f(ax)=af(x)\ (a\text{는 실수})$$

한편 선형함수와 대비시켜서 일차함수를 영어로 'affine function'이라고 하는데, 직역을 하면 "(선형함수와) 밀접한 관계가 있는 함수"라는 뜻이다. 즉, 일차함수의 그래프는 선형함수의 그래프를 y축의 방향으로 평행이동한 것이다.

㉢ 오른쪽 그림과 같이 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응하고, 치역과 공역이 일치하므로 함수 f는 일대일함수이면서 일대일 대응이다.



㉣ 오른쪽 그림과 같이 X의 원소 0, 1에 대하여 $f(0)=f(1)$이므로 함수 f는 일대일함수가 아니다.



따라서 일대일함수는 ㉡, ㉢이고, 일대일 대응은 ㉢이다.

본문 해설

❶ $a \neq b \iff a-b \neq 0$이므로
'$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$'를 보이기 위하여
'$x_1-x_2 \neq 0$이면 $f(x_1)-f(x_2) \neq 0$'을 보인다.

읽/기/자/료 주민등록번호와 일대일 대응

우리나라는 지난 1975년부터 생년월일 6자리, 개인 정보 7자리로 구성된 현재의 주민등록번호를 사용하고 있다.
뒷부분 7자리 중 가장 앞의 숫자는 성별 코드를 나타내는데, 남자는 1 또는 3이고, 여자는 2 또는 4이다.
성별 코드 다음 네 개의 숫자는 지역 코드이다. 이것은 출생 신고를 한 지역을 뜻한다. 우리나라에는 3700여개의 읍, 면, 동이 있는데 이들 각각에 4자리로 된 지역 코드가 부여되어 있다.
그 다음 한 자리는 출생 신고 당일 그 출생 신고가 해당 읍, 면, 동의 주민센터에 몇 번째로 접수된 것인가를 나타낸다. 한 동네에서 하루에 몇 사람씩 출생 신고를 하는 경우는 많지 않으므로 이 숫자는 3을 넘지 않는 것이 보통이다.
마지막 숫자는 검증 번호로서 생년월일을 포함한 앞의 12개의 숫자 모두를 특정한 공식에 넣어서 만든다. 앞의 12자리의 숫자가 차례로 정해지면 마지막에 올 수 있는 번호는 딱 하나로 결정된다. 따라서 주민등록번호는 개인에게 하나씩만 부여되므로 개인과 주민등록번호 사이의 대응은 일대일 대응이다.

8

목표| 주어진 함수가 일대일 대응인지 아닌지를 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면

$$f(x_1)-f(x_2)=3x_1+1-(3x_2+1)$$
$$=3(x_1-x_2)\neq 0$$

따라서 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.

또 치역과 공역은 실수 전체의 집합으로 서로 같으므로 함수 $f(x)=3x+1$은 **일대일 대응이다.**

(2) $f(-1)=2=f(1)$이므로 함수 $f(x)=x^2+1$은 일대일함수가 아니다.

따라서 **일대일 대응이 아니다.**

9

목표| 제한된 범위를 정의역과 공역으로 하는 일차함수가 일대일 대응이 될 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이| $-2\leq x\leq 2$일 때 $-3\leq 2x+1\leq 5$이므로 치역은 $\{y\,|\,-3\leq y\leq 5\}$이다.

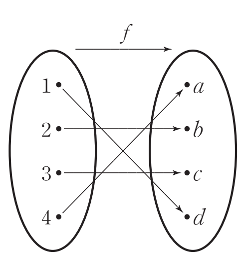
함수 f가 일대일 대응이 되려면 치역과 공역이 일치해야 하므로 공역은 $\{y\,|\,-3\leq y\leq 5\}$이다.

따라서 $\boldsymbol{a=-3,\ b=5}$이다.

사고력 기르기 추론

출제 의도| 사다리 타기 게임을 통하여 일대일 대응의 개념을 확실히 이해하고 확장하기 위한 것이다.

풀이| (1) 사다리 타기 게임의 규칙에 따라 이동하면 $1\to d$, $2\to b$, $3\to c$, $4\to a$이므로 이 대응을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.



(2) 사다리 타기의 시작점과 도착점의 개수는 서로 같고, 주어진 그림에서 알 수 있듯이 시작점이 다르면 도착점이 다르다. 따라서 사다리 타기의 시작점과 도착점의 대응은 사다리의 모양에 관계없이 항상 일대일 대응이다.

교과서 78 쪽

문제 8 정의역과 공역이 모두 실수 전체의 집합일 때, 다음 함수가 일대일 대응인지 아닌지 판단하고 그 이유를 설명하여라.

(1) $f(x)=3x+1$ (2) $f(x)=x^2+1$

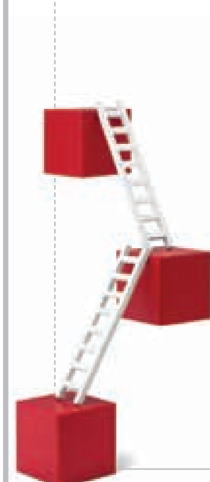
발전 **문제 9** 두 집합 $X=\{x\,|\,-2\leq x\leq 2\}$, $Y=\{y\,|\,a\leq y\leq b\}$에 대하여

$$f: X \longrightarrow Y,\ f(x)=2x+1$$

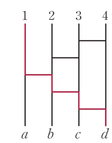
로 정의되는 함수 f가 일대일 대응이 되도록 두 실수 a, b의 값을 구하여라.

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

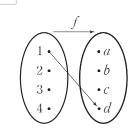


오른쪽 그림에서 다음과 같은 방법으로 사다리 타기 게임을 할 때, 물음에 답하여 보자.

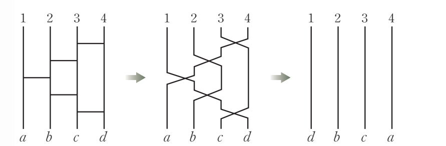


> 시작점 1, 2, 3, 4 중 하나를 택하여 세로줄을 따라 아래로 내려가면서 가로줄이 나오면 가로줄을 따라 옆으로 이동하고 세로줄이 나오면 아래로 이동하여 a, b, c, d 중 한 곳에 도착한다.

(1) 오른쪽 그림의 대응 f는 사다리 타기의 시작점에 도착점을 대응시킨 것이다. 이 그림을 완성하여 보자.



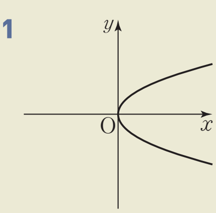
(2) 다음 그림을 이용하여 사다리 타기의 시작점과 도착점의 대응은 사다리의 모양에 관계없이 항상 일대일 대응인 것을 설명하여 보자.



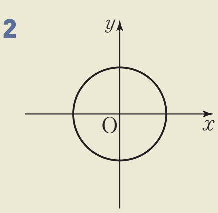
기/초/력 향상 문제

다음 중에서 일대일 대응인 함수의 그래프는?

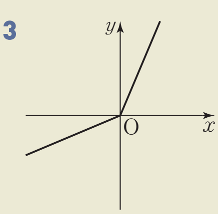
1



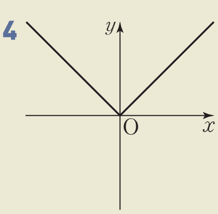
2



3



4



답 3

교과서 79 쪽

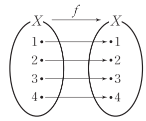
항등함수와 상수함수란 무엇인가?

탐구 활동

우리 학교 학생 전체의 집합에서 우리 학교 선생님 전체의 집합으로의 대응에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 모든 학생에 교장 선생님을 대응시킬 때, 이 대응은 함수인가?
2. 1의 대응이 함수라면 이 함수의 치역을 구하여 보자.

❶ 오른쪽 그림의 함수 f는 정의역과 공역이 같고, 정의역 X의 임의의 원소 x에 그 자신인 공역 X의 원소 x가 대응한다.



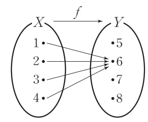
이와 같이 함수 $f: X \longrightarrow X$에서 정의역 X의 임의의 원소 x에 대하여

$$f(x)=x$$

인 함수를 집합 X에서의 **항등함수**라고 한다.

항등함수는 일대일 대응이다.

❷ 한편 오른쪽 그림의 함수 f는 정의역 X의 모든 원소 x에 공역 Y의 단 하나의 원소 6이 대응한다.



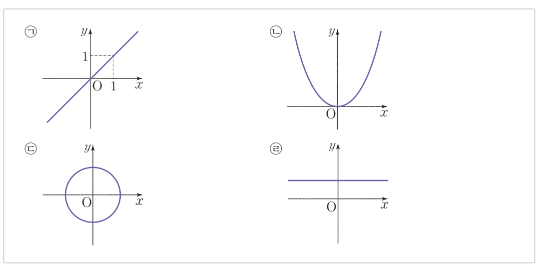
이와 같이 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 모든 원소 x에 대하여

$$f(x)=c \ (c\text{는 상수})$$

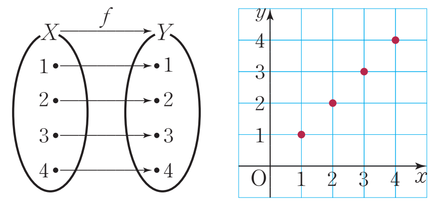
인 함수 f를 **상수함수**라고 한다.

상수함수의 치역의 원소는 1개이다.

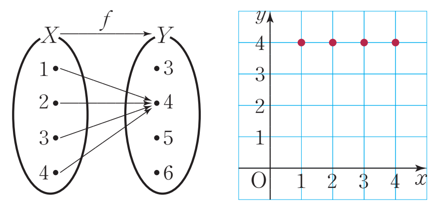
문제 10 다음 중에서 일대일 대응, 항등함수, 상수함수의 그래프를 각각 찾아라.



항등함수 $f(x)=x$의 그래프는 직선 $y=x$ 또는 그 직선의 부분집합이 된다.



❷ 상수함수는 정의역의 모든 x에 대하여 함숫값이 $f(x)=c$(c는 상수)로 일정한 경우의 함수를 의미한다. 따라서 상수함수는 일대일함수가 아니다. 상수함수 $f(x)=c$의 그래프는 x축에 평행한 직선 또는 그 직선의 부분집합이 된다.



탐구 활동의 이해

활동 목표 • 우리 학교 학생과 선생님 사이의 대응을 이용하여 상수함수를 만들어 보고, 이때 이 함수의 치역은 한 원소로 이루어진 집합임을 알도록 하기 위한 것이다.

1. 모든 학생에 교장 선생님을 대응시키면 학생 전체의 집합의 각 원소는 모두 선생님 전체의 집합의 원소인 교장 선생님에 대응되므로 **함수**이다.
2. 모든 학생에 교장 선생님을 대응시켰으므로 치역은 **{교장 선생님}**이다.

본문 해설

❶ 항등함수는 정의역과 공역이 서로 같을 때, 정의역의 임의의 원소 x에 공역의 원소 x가 대응하는 것이므로 공역과 치역이 같다. 또 항등함수 $f(x)=x$는 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1)=x_1 \neq x_2=f(x_2)$이므로 일대일 대응이다.

10

목표 | 일대일 대응, 항등함수, 상수함수의 뜻을 알고, 좌표평면 위의 그래프에서 이를 구별할 수 있게 한다.

풀이 | ㉠ 그래프를 만족시키는 함수의 관계식이 $f(x)=x$이므로 항등함수이다. 항등함수는 일대일 대응이다.

㉡ 하나의 y의 값이 서로 다른 두 개의 x의 값에 대응되는 경우가 있으므로 일대일 대응이 아니다.

㉢ 하나의 x의 값에 서로 다른 두 개의 y의 값이 대응하는 경우가 있으므로 함수가 아니다.

㉣ 함숫값이 항상 일정하므로 함수의 관계식을 $f(x)=c$ (c는 상수)의 꼴로 나타낼 수 있다. 따라서 상수함수이고 상수함수는 일대일 대응이 아니다.

따라서 **일대일 대응은 ㉠, 항등함수는 ㉠, 상수함수는 ㉣**이다.

02 합성함수와 역함수

소단원 지도 목표

① 합성함수의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.
② 역함수의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.
③ 역함수가 존재하는 함수의 역함수를 구할 수 있게 한다.
④ 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프 사이의 관계를 이해하고, 역함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 합성함수를 정의할 때 벤 다이어그램을 사용하여 시각적으로 도입하도록 한다.

2. 두 함수 f와 g를 합성한 함수 $g\circ f$는 f의 치역이 g의 정의역과 같거나 g의 정의역의 부분집합일 때에만 정의됨을 알 수 있게 한다.

3. 두 함수 f와 g를 합성할 때, 합성된 함수 $g\circ f$에서 f와 g의 순서가 바뀌지 않도록 유의하게 한다.

4. 함수가 일대일 대응일 때에만 역함수가 존재함을 주의하게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 합성함수(合成函數, composite function)
• 역함수(逆函數, inverse function)
• $g\circ f$, $(g\circ f)(x)$, $y=g(f(x))$, f^{-1}, $y=f^{-1}(x)$

생각 열기 참/고/자/료

여러 가지 악기를 분류할 때 보통 현악기, 관악기, 타악기의 3가지로 나눈다. 그러나 이것은 피아노와 같이 이 분류를 적용시킬 수 없는 경우가 있다. 현재 가장 타당하다고 인정되고 있는 과학적인 분류법은 모든 악기를 그 발음원리에 따라 체명악기, 막명악기, 기명악기, 현명악기, 전명악기 등 5종류로 분류하는 방법이다. 이 분류법은 1914년 독일의 음악학자 에리히 폰 호른보스텔(E. M. von Hornbostel)과 쿠르트 작스(C. Sachs)가 발표한 것에 전명악기를 더한 것이다.

교과서 80 쪽

02 합성함수와 역함수

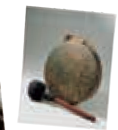
● 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.
● 역함수의 뜻을 알고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.

합성함수란 무엇인가?

생각 열기

악기의 분류

일반적으로 악기는 연주하는 방법에 따라 줄을 통해 소리를 내는 현악기, 입으로 불어서 소리를 내는 관악기, 두드려서 소리를 내는 타악기 등으로 분류한다. 현악기에는 가야금, 거문고, 바이올린 등이 있고, 관악기에는 대금, 플루트, 트럼펫 등이 있으며, 타악기에는 장구, 징, 드럼 등이 있다.

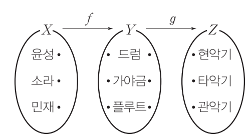


탐구 활동

다음은 윤성이네 반에서 축제 때 악기 연주를 할 학생의 이름과 악기, 그리고 그 악기의 분류를 표로 나타낸 것이다. 표를 보고 물음에 답하여 보자.

이름	악기	악기의 분류
윤성	가야금	현악기
소라	플루트	관악기
민재	드럼	타악기

1. 다음 집합 X, Y, Z에 대하여 각 학생의 이름에 연주하는 악기를 대응시키는 것을 함수 $f: X \longrightarrow Y$, 각 악기에 악기의 분류를 대응시키는 것을 함수 $g: Y \longrightarrow Z$라고 할 때, 두 함수의 대응 관계를 각각 그림으로 나타내어 보자.



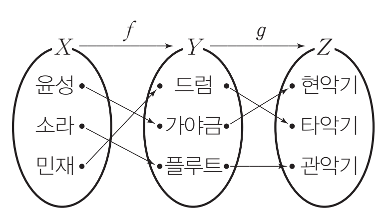
2. 함수 f에 의하여 '민재'에 대응하는 Y의 원소를 찾고, 함수 g에 의하여 그 원소에는 Z의 어떤 원소가 대응하는지 알아보자.

3. 2와 같은 방법으로 X의 각 원소에 Z의 원소를 대응시키면 이 대응은 함수가 되는지 알아보자.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 악기 연주를 할 학생의 이름과 악기, 악기의 분류를 이용하여 두 함수를 연속적으로 대응시키면 그 결과가 또다시 함수가 됨을 이해하기 위한 것이다.

1.



2. 민재 → 드럼 → 타악기이므로 함수 f에 의하여 '민재'에 대응하는 **집합 Y의 원소는 드럼**이고, 함수 g에 의하여 '드럼'에 대응하는 **Z의 원소는 현악기**이다.

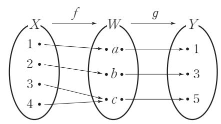
3. 윤성 → 현악기, 소라 → 관악기, 민재 → 타악기와 같이 집합 X의 각 원소에 집합 Z의 원소가 하나씩만 대응하므로 이 대응은 집합 X에서 집합 Z로의 **함수가 된다.**

교과서 81 쪽

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $W=\{a,\ b,\ c\}$, $Y=\{1,\ 3,\ 5\}$에 대하여 두 함수

$$f: X \longrightarrow W,\ g: W \longrightarrow Y$$

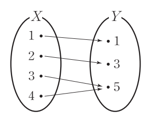
가 다음 그림과 같이 주어질 때, 두 함수 f와 g에 의하여 정해지는 집합 X에서 집합 Y로의 대응을 생각하여 보자.



집합 X의 임의의 원소 x에 집합 W의 원소 $f(x)$를 대응시키고, 다시 이 $f(x)$에 집합 Y의 원소 $g(f(x))$를 연속적으로 대응시키면 다음과 같다.

$$g(f(1))=g(a)=1,\ g(f(2))=g(b)=3,$$
$$g(f(3))=g(c)=5,\ g(f(4))=g(c)=5$$

이때 집합 X에서 집합 Y로의 대응은 다음 그림과 같다.



X의 각 원소 x에 Y의 원소 $y=g(f(x))$가 하나씩만 대응하므로 이 대응은 함수가 된다.

따라서 이 대응은 집합 X를 정의역, 집합 Y를 공역으로 하는 함수가 된다.

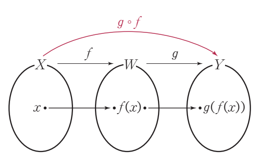
❶ 일반적으로 두 함수 $f: X \longrightarrow W$, $g: W \longrightarrow Y$에 대하여 집합 X의 임의의 원소 x에 집합 Y의 원소 $g(f(x))$를 대응시키면 X를 정의역, Y를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻는다.

❷ 이 함수를 함수 f와 g의 **합성함수**라고 하며, 이것을 기호로

$$g \circ f$$

와 같이 나타낸다.

함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합일 때에만 합성함수 $g \circ f$가 정의된다.



❷ 두 함수 f와 g의 합성함수를 $g \circ f$라고 쓰는 것은 표기법에 의한 약속이다. 함숫값을 나타낼 때, 함수 f를 변수 x의 좌측에 표기하여 $f(x)$라고 쓰는 것과 같이 합성함수도 $g(f(x))$라고 쓰기 위해 $g \circ f$로 약속한 것이다.

지/도/자/료

1. 합성함수 $g \circ f$와 x에 대한 함숫값 $(g \circ f)(x)=g(f(x))$를 명확히 구별할 수 있도록 한다.

2. $(g \circ f)(x)$를 $g(x)f(x)$와, $(f \circ f)(x)$ $\{f(x)\}^2$ 또는 $2f(x)$와 혼동하지 않게 유의하도록 지도한다. 즉,

$(g \circ f)(x) \neq g(x)f(x)$
$(f \circ f)(x) \neq \{f(x)\}^2$
$(f \circ f)(x) \neq 2f(x)$
이다.

본문 해설

❶ 두 함수 f, g에 대하여 f의 공역과 g의 정의역이 같은 경우에 한하여 합성함수를 정의하였다.
그러나 집합 X의 원소 x에 집합 Y의 원소 $(g \circ f)(x)=g(f(x))$를 대응시키는 규칙을 그대로 사용하여도 $f(x)$가 g의 정의역에 속하기만 하면 합성함수 $g \circ f$를 정의할 수 있음을 알 수 있다.
예를 들면 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$에서 f의 치역은 $\{x \mid x\neq0$인 실수$\}$이고 g의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 위의 대응 규칙을 적용하여도 합성함수 $g \circ f$를 정의할 수 있다.
일반적으로 두 함수 $f: X \longrightarrow W$, $g: W' \longrightarrow Y$에 대하여 f의 치역을 $f(X)$라고 할 때, $f(X) \subset W'$이면 두 함수 f와 g의 합성함수 $g \circ f$는 정의된다.

읽/기/자/료 학교 수학에서의 함수 개념 도입 배경

과학은 정돈된 상식이라는 말이 있다. 우리 주변의 자연 현상이나 사회 현상을 정돈하여 법칙을 발견하는 것이 과학인데, 그 바탕이 되는 주요한 수학적 도구가 함수 개념이다. 함수 개념이 학교 수학에 도입된 것은 20세기 초 독일의 클라인(Klein, F. C. ; 1849~1925)이 수학교육 개혁 운동을 시작한 이후이다. 클라인이 '함수적 사고' 교육의 중요성을 강조하고, 독일 학교 수학의 헌장이라고 일컬어지는 '메란(Meran) 교육과정'이 함수를 중시하는 경향에 따라 함수는 학교 수학의 커다란 줄기를 이루어왔다.
클라인이 함수적 사고를 중요시 한 것은 함수적 사고가 대수와 기하를 관련지어 주고, 응용 수학을 포함하여 수학적 사고 전체의 바탕에 놓여 있는 기본적이고 핵심적인 관점이라는 판단에서 비롯된 것이다.

1

목표| 두 함수의 합성함수의 함숫값을 구하고, 함수의 합성에 대한 교환법칙이 성립하지 않음을 확인할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(g\circ f)(2)=g(f(2))$
$=g(2-1)=g(1)$
$=1^2+1=\mathbf{2}$

(2) $(f\circ g)(2)=f(g(2))$
$=f(2^2+1)=f(5)$
$=5-1=\mathbf{4}$

(3) $(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$=g(x-1)$
$=(x-1)^2+1$
$=\boldsymbol{x^2-2x+2}$

(4) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=f(x^2+1)$
$=(x^2+1)-1$
$=\boldsymbol{x^2}$

교과서 82 쪽

한편 합성함수 $g\circ f$에 의한 x의 함숫값을

$$(g\circ f)(x)$$

와 같이 나타낸다. 즉, $(g\circ f)(x)=g(f(x))$이므로 두 함수 f와 g의 합성함수를

$$y=g(f(x))$$

로도 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **합성함수**
> 두 함수 $f: X \longrightarrow W$, $g: W \longrightarrow Y$의 합성함수 $g\circ f$는
> $$g\circ f: X \longrightarrow Y,\ (g\circ f)(x)=g(f(x))\ (x\in X)$$

$(g\circ f)(x)\neq g(x)f(x)$인 것에 주의한다.

예제 01 두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=2x$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $(g\circ f)(1)$과 $(f\circ g)(1)$의 값을 구하여라.
(2) 합성함수 $g\circ f$와 $f\circ g$를 구하여라.

풀이 (1) $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1+1)=g(2)=2\times2=4$
$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2\times1)=f(2)=2+1=3$
(2) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=2(x+1)=2x+2$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x)=2x+1$

답 (1) $(g\circ f)(1)=4$, $(f\circ g)(1)=3$
(2) $(g\circ f)(x)=2x+2$, $(f\circ g)(x)=2x+1$

문제 1 두 함수 $f(x)=x-1$, $g(x)=x^2+1$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $(g\circ f)(2)$　(2) $(f\circ g)(2)$
(3) $(g\circ f)(x)$　(4) $(f\circ g)(x)$

예제 1과 문제 1의 결과에서 $g\circ f\neq f\circ g$임을 알 수 있다.
일반적으로 함수의 합성에 대하여 교환법칙이 성립하지 않는다.

지/도/자/료

1. 함수 f가 이차함수이고 함수 g가 일차함수일 때, $g\circ f$는 2×1, 즉 2차 함수이고 $f\circ f$는 2×2, 즉 4차 함수이다.
$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$
$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$
일 때
$(g\circ f)(x)$
$=b_n(a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0)^n+\cdots+b_0$
이므로 일반적으로 함수 f가 m차함수이고 함수 g가 n차 함수이면 합성함수 $g\circ f$는 $m\times n$차함수이다.

2. 합성함수를 구할 때 다음과 같은 두 가지 방법을 모두 이해하도록 지도한다.
$f(x)=ax+b$, $g(x)=cx+d$일 때
(i) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)$
$=c(ax+b)+d$
(ii) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=c\cdot f(x)+d$
$=c(ax+b)+d$

3. 두 함수 f, g에 대하여 $f\circ g=g\circ f$의 성립여부를 구체적인 예를 통해 확인할 때, 함수 $f\circ g$와 $g\circ f$를 나타내는 식이 서로 다르더라도 정의역에 따라 같은 함수가 될 수도 있으므로 유의하게 한다.

기/초/력 향상 문제

두 함수 $f(x)=2x-3$, $g(x)=x^2+1$에 대하여 다음을 구하여라.

1 $f\circ f$

2 $g\circ f$

3 $f\circ g$

4 $g\circ g$

답 **1** $(f\circ f)(x)=4x-9$　**2** $(g\circ f)(x)=4x^2-12x+10$
3 $(f\circ g)(x)=2x^2-1$　**4** $(g\circ g)(x)=x^4+2x^2+2$

창의 up

송이는 매달 x원의 용돈을 받는다. 용돈 x원에 용돈을 $10\,\%$ 인상한 값이 대응하는 함수를 f, 1000원 인하한 값이 대응하는 함수를 g라고 할 때, 두 합성함수 $f\circ g$와 $g\circ f$ 중 송이에게 유리한 함수를 말하고, 그 이유를 설명하여라. (단, $x>1000$)

예제 02 세 함수 $f(x)=3x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=x+2$에 대하여 다음 합성함수를 구하여라.

(1) $(h\circ(g\circ f))(x)$ (2) $((h\circ g)\circ f)(x)$

풀이 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x)=(3x)^2=9x^2$이므로

$$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(9x^2)=9x^2+2$$

(2) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(x^2)=x^2+2$이므로

$$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=(h\circ g)(3x)=(3x)^2+2=9x^2+2$$

답 (1) $9x^2+2$ (2) $9x^2+2$

문제 2 세 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=2x$, $h(x)=x^2$에 대하여 다음 합성함수를 구하여라.

(1) $(h\circ(g\circ f))(x)$ (2) $((h\circ g)\circ f)(x)$

예제 2와 문제 2의 결과에서 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$임을 알 수 있다.
일반적으로 세 함수 f, g, h에 대하여 $h\circ(g\circ f)$와 $(h\circ g)\circ f$가 정의될 때,

$$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(g(f(x)))$$
$$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=h(g(f(x)))$$

이므로 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$이다.
따라서 함수의 합성에 대하여 결합법칙이 성립한다.

2

목표| 세 함수의 합성함수의 함숫값을 구하고, 함수의 합성에 대한 결합법칙이 성립함을 확인할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$$=2(x+1)=2x+2$$

$$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=(2x+2)^2=\mathbf{4x^2+8x+4}$$

(2) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=(2x)^2=4x^2$

$$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=4(x+1)^2=\mathbf{4x^2+8x+4}$$

창의 UP

출제 의도| 주어진 조건에 알맞은 두 함수의 식을 찾고, 두 함수의 합성을 실생활에 적용해 봄으로써 함수의 합성에 대하여 교환법칙이 성립하지 않음을 이해하게 하기 위한 것이다.

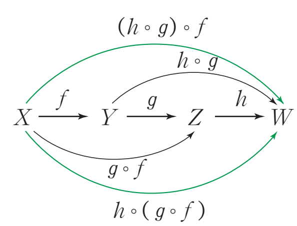
풀이| 용돈 x원을 $10\,\%$ 인상하면 $1.1x$원이므로
$f(x)=1.1x$
용돈 x원을 1000원 인하하면 $(x-1000)$원이므로
$g(x)=x-1000$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-1000)=1.1(x-1000)=1.1x-1100$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(1.1x)=1.1x-1000$$
$$(g\circ f)(x)-(f\circ g)(x)=100>0$$

이므로 **$g\circ f$가 송이에게 더 유리하다.**

지/도/자/료

1. 세 함수
$f:X\longrightarrow Y$, $g:Y\longrightarrow Z$, $h:Z\longrightarrow W$
에 대하여 합성함수 $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$가 성립함을 오른쪽과 같은 그림을 이용하여 직관적으로 이해하게 한다.



2. 이전 교육과정에서는 '닫혀있다', '항등원', '역원' 등 연산과 관련된 개념을 이용하여 수 체계를 형식적이고 추상적으로 구조화하였다. 그러나 2009 개정 교육과정에서는 이러한 대수적 구조가 삭제되었으므로 합성함수에 대한 교환법칙과 결합법칙을 다룰 때, 항등함수 I를 함수의 합성에 대한 항등원으로, 역함수 f^{-1}를 함수의 합성에 대한 함수 f의 역원으로 해석하여 대수적으로 구조화하지 않도록 주의한다.

본문 해설

❶ 함수의 합성에 대하여 결합법칙이 성립하므로 세 함수의 합성 $h\circ(g\circ f)$, $(h\circ g)\circ f$는 괄호 없이 $h\circ g\circ f$로 나타낼 수 있다. 즉,
$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f=h\circ g\circ f$
이다.

기/초/력 향상 문제

1 두 함수 $f(x)=2x-3$, $g(x)=4x+2$에 대하여 합성함수 $(g\circ f)(x)$와 $(f\circ g)(x)$를 구하여 비교하여라.

2 세 함수 $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^2-1$, $h(x)=x$에 대하여 합성함수 $(h\circ(g\circ f))(x)$와 $((h\circ g)\circ f)(x)$를 구하여 비교하여라.

답 **1** $(g\circ f)(x)=8x-10$, $(f\circ g)(x)=8x+1$
따라서 주어진 두 함수 f, g에 대하여 $g\circ f\neq f\circ g$이다.
2 $(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)=4x^2+4x$
따라서 주어진 세 함수 f, g, h에 대하여
$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$이다.

교과서 84 쪽

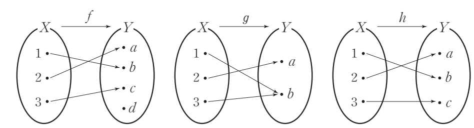
이상에서 배운 합성함수의 성질에 대하여 정리하면 다음과 같다.

❶ **합성함수의 성질**
(1) 함수의 합성에 대하여 교환법칙이 성립하지 않는다.
$g\circ f\neq f\circ g$
(2) 함수의 합성에 대하여 결합법칙이 성립한다.
$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

역함수란 무엇인가?

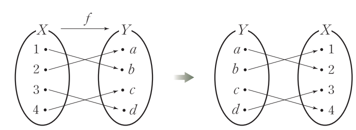
탐구 활동

다음 그림의 함수 f에서 반대 방향으로의 대응을 생각하면 Y의 원소 a, b, c에 X의 원소 2, 1, 3이 각각 대응하고, d에 대응하는 X의 원소는 없다. 이와 같이 세 함수 f, g, h에 대하여 반대 방향으로의 대응을 생각할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 세 함수 f, g, h의 반대 방향으로의 대응 중에서 함수인 것을 찾고, 그 이유를 말하여 보자.
2. 세 함수 f, g, h의 반대 방향으로의 대응 중에서 함수가 아닌 것을 찾고, 그 이유를 말하여 보자.

다음 그림과 같은 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f에 대하여 그 반대 방향으로의 대응을 생각하여 보자.

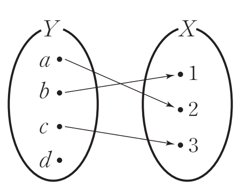


함수 $f: X \longrightarrow Y$는 일대일 대응이므로 함수 f의 반대 방향으로의 대응에서 집합 Y의 각 원소에 집합 X의 원소가 오직 하나씩만 대응하고, 대응하지 않는 Y의 원소는 없다. 따라서 함수 f의 반대 방향으로의 대응은 집합 Y를 정의역, 집합 X를 공역으로 하는 함수가 된다.

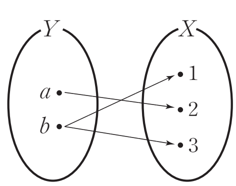
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 여러 가지 함수에 대하여 반대 방향으로의 대응을 생각하고, 그중 함수가 될 수 있는 것을 알아보는 활동을 통하여 역함수가 정의될 수 있는 함수의 조건을 알아보도록 하기 위한 것이다.

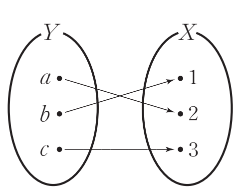
1. 세 함수 f, g, h의 반대 방향으로의 대응(역의 대응)은 각각 다음 그림과 같다.



f의 역의 대응



g의 역의 대응



h의 역의 대응

반대 방향으로의 대응이 함수인 것은 h뿐이다.
함수 h의 반대 방향으로의 대응이 함수인 이유는 정의역 Y의 각 원소에 공역 X의 원소가 하나씩만 대응하기 때문이다.

2. 반대 방향으로의 대응이 함수가 아닌 것은 f와 g이다. f의 반대 방향으로의 대응은 정의역의 원소 d에 대응하는 원소가 없으므로 함수가 아니고, g의 반대 방향으로의 대응은 정의역의 원소 b에 대응하는 공역의 원소가 두 개이므로 함수가 아니다.

❶ 일반적으로 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $y=f(x)$가 일대일 대응일 때, 집합 Y의 임의의 원소 y에 $f(x)=y$인 집합 X의 원소 x를 대응시키면 집합 Y를 정의역, 집합 X를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻는다.

❷ 이 함수를 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 **역함수**라고 하며, 이것을 기호로

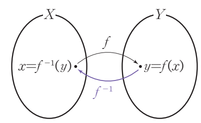
$$f^{-1}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$f^{-1}: Y \longrightarrow X,\ x=f^{-1}(y)$$

이다.

- 함수 f가 일대일 대응일 때에만 역함수 f^{-1}가 정의된다.
- 함수 f와 역함수 f^{-1}의 정의역과 공역은 서로 반대이다.



이때 역함수의 정의에 의해서 집합 X의 임의의 원소 x에 대하여

$$y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

이므로

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x\ \ (x\in X)$$
$$(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f(x)=y\ \ (y\in Y)$$

임을 알 수 있다. 즉, $f^{-1}\circ f$는 집합 X에서의 항등함수이고, $f\circ f^{-1}$는 집합 Y에서의 항등함수이다.

또 역함수의 정의에서 $x\in X$에 대하여

$$(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$$

임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

역함수의 성질

함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일 대응이면

(1) 역함수 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$가 존재한다.

(2) $y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$

❸ (3) $(f^{-1}\circ f)(x)=x\ (x\in X)$, $(f\circ f^{-1})(y)=y\ (y\in Y)$

(4) $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)\ (x\in X)$

본문 해설

❶ 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 역의 대응과 처음 함수는 정의역, 공역이 반대이므로 역의 대응이 함수가 되기 위해서는 집합 Y의 모든 원소에 집합 X의 원소가 하나씩 대응하여야 하므로 f가 일대일 대응이어야 한다.

❷ f^{-1}는 Ⅳ. 지수와 로그에서 설명할 음수인 지수의 표현과 다른 것이다. 즉, $f^{-1}\neq\dfrac{1}{f}$이다.

한편 f^{-1}는 'f의 역함수' 또는 'f inverse'라고 읽는다.

❸ 집합 X에서 집합 X로의 항등함수를 I_X, 집합 Y에서 집합 Y로의 항등함수를 I_Y라고 하면 역함수의 성질 (3)에서 $(f^{-1}\circ f)(x)=x$, $(f\circ f^{-1})(y)=y$는 각각 $f^{-1}\circ f=I_X$, $f\circ f^{-1}=I_Y$와 같이 나타낼 수 있는데, 이는 역함수의 정의와 같다.

지/도/자/료

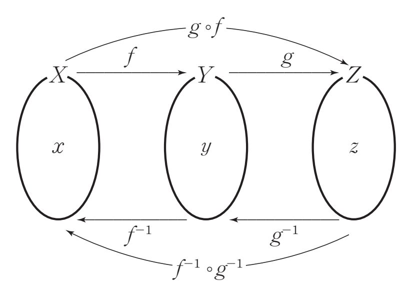
1. 주어진 함수가 일대일 대응인 것과 주어진 함수가 역함수를 가진다는 것은 필요충분조건이다.
함수 $f: X \longrightarrow Y$의 역함수 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$가 존재하면 함수 f가 일대일 대응임을 증명하면 다음과 같다.
먼저 $x_1, x_2\in X$에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$이면
$x_1=f^{-1}(f(x_1))=f^{-1}(f(x_2))=x_2$
이므로 일대일함수가 된다. 또한 모든 $y\in Y$에 대하여
$y=f(f^{-1}(y))\,(f^{-1}(y)\in X)$
이므로 모든 $y\in Y$는 함수 f의 치역의 원소이다.
이와 같이 증명 자체는 간단하지만 실제 학생들이 이해하기 어려울 수 있기 때문에 학생의 수준을 고려하여 지도하는 것이 바람직하다.

2. 역함수의 성질에서 $(g\circ f)^{-1}\neq g^{-1}\circ f^{-1}$임을 주지시킬 필요가 있다. 이는 다음과 같이 설명할 수 있다.

• 갈 때: 서울 $\xrightarrow{\ f\ }$ 대전 $\xrightarrow{\ g\ }$ 부산

• 올 때: 부산 $\xrightarrow{\ g^{-1}\ }$ 대전 $\xrightarrow{\ f^{-1}\ }$ 서울

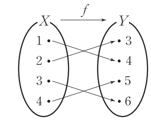
즉, 갈 때의 역은 올 때이므로 순서가 바뀌어
$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$
이다. 이를 대응 관계의 그림으로 살펴보면 다음과 같음을 알 수 있도록 지도한다.



3. $f\circ f^{-1}$와 $f^{-1}\circ f$는 모두 항등함수이지만 정의역이 서로 다른 항등함수임을 주의하도록 지도한다.

교과서 86 쪽

문제 3 오른쪽 그림의 함수 $f: X \longrightarrow Y$에 대하여 다음을 구하여라.



(1) $f^{-1}(6)$ (2) $(f \circ f^{-1})(4)$
(3) $(f^{-1} \circ f)(4)$ (4) $(f^{-1})^{-1}(3)$

❶ 함수를 나타낼 때, 보통 정의역에 속하는 원소를 x, 공역에 속하는 원소를 y로 나타내므로 역함수 $x=f^{-1}(y)$에서 x와 y를 서로 바꾸어

$$\boldsymbol{y=f^{-1}(x)}$$

로 나타내고, 이를 $y=f(x)$의 역함수라고 한다.

이제 일대일 대응에 대하여 그 역함수를 구하는 방법을 예제를 통하여 알아보자.

예제 03 함수 $y=2x-1$의 역함수를 구하여라.

● 역함수 구하기

$y=f(x)$
↓ x에 대하여 정리한다.
$x=f^{-1}(y)$
↓ x와 y를 바꾼다.
$y=f^{-1}(x)$

풀이 함수 $y=2x-1$은 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=2x-1$을 x에 대하여 정리하면

$$x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$$

여기서 변수 x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

문제 4 다음 함수 중에서 역함수가 존재하는 것을 찾고, 그 역함수를 구하여라.

(1) $y=-x+1$ (2) $y=x^2$ (3) $y=\frac{1}{3}x+1$

발전 **문제 5** 일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 다음 물음에 답하여라. (단, a, b는 상수이다.)

(1) $f=f^{-1}$일 조건을 구하여라.
(2) $f=f^{-1}$이면 $f \circ f=I$임을 보여라. (단, I는 항등함수이다.)

3

목표| 역함수의 성질을 이용하여 여러 가지 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$이므로 $f(3)=6$에서 $f^{-1}(6)=\mathbf{3}$

(2) $f \circ f^{-1}=I_Y$ (정의역이 Y인 항등함수)이므로 $(f \circ f^{-1})(4)=\mathbf{4}$

(3) $f^{-1} \circ f=I_X$ (정의역이 X인 항등함수)이므로 $(f^{-1} \circ f)(4)=\mathbf{4}$

(4) $(f^{-1})^{-1}=f$이므로 $(f^{-1})^{-1}(3)=f(3)=\mathbf{6}$

본문 해설

❶ 역함수를 구할 때, $x=f^{-1}(y)$에서 역함수 $f^{-1}(y)$가 이미 구해졌지만 일반적으로 독립변수는 x, 종속변수는 y로 쓰는 관례에 따라 x, y를 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다. 여기서 대응의 관점에서 보면 $y=f^{-1}(x)$와 $x=f^{-1}(y)$는 모두 f의 역함수를 의미하는 같은 대응이다. 그러나 x와 y의 관계식의 의미에서 보면 $x=f^{-1}(y)$는 $y=f(x)$와 동일한 관계식이지만 $y=f^{-1}(x)$는 $y=f(x)$에서 x, y가 바뀐 관계식이므로 $y=f^{-1}(x)$와 $y=f(x)$는 서로 $y=x$에 대하여 대칭인 함수이다.

4

목표| 역함수가 존재하는 조건을 이해하고, 역함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 함수 $y=-x+1$은 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=-x+1$에서 x를 y에 대하여 정리하면
$x=-y+1$
여기서 변수 x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$\boldsymbol{y=-x+1}$

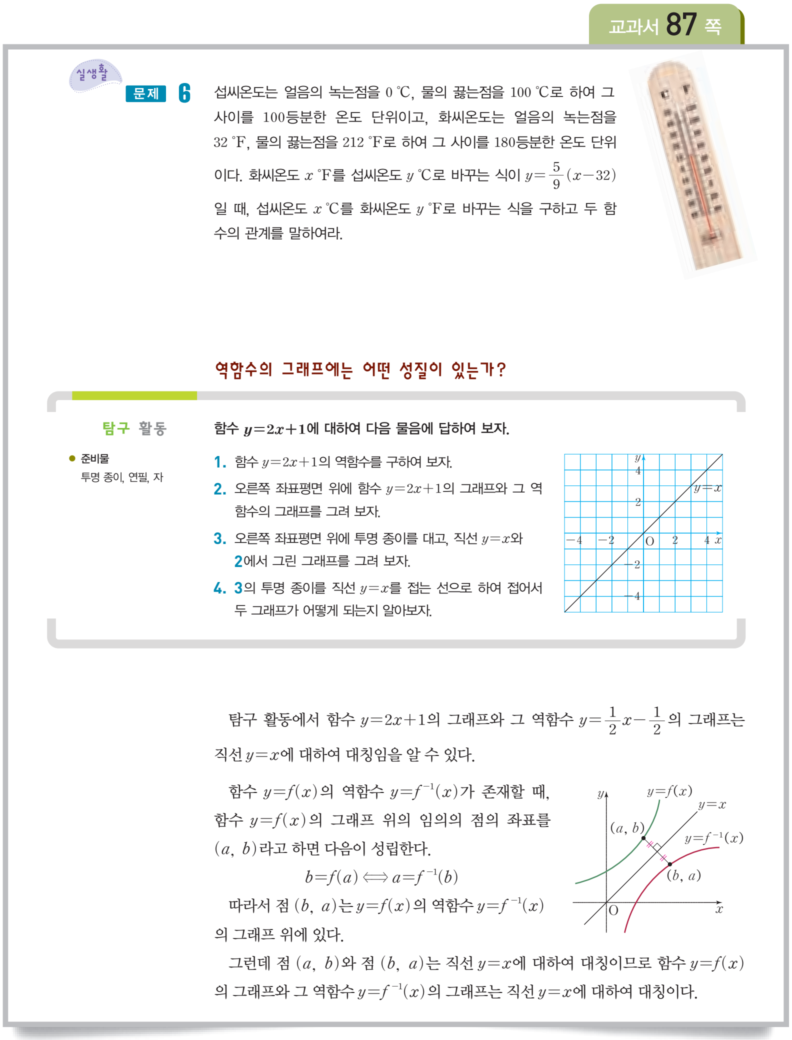
(2) $1^2=1=(-1)^2$이므로 함수 $y=x^2$은 일대일 대응이 아니다. 따라서 함수 $y=x^2$은 **역함수가 존재하지 않는다.**

(3) 함수 $y=\frac{1}{3}x+1$은 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=\frac{1}{3}x+1$에서 x를 y에 대하여 정리하면
$x=3y-3$
여기서 변수 x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$\boldsymbol{y=3x-3}$

5

목표| 일차함수와 그 함수의 역함수가 서로 같을 조건을 구하고, 이를 이용하여 새로운 성질을 추론할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=ax+b\,(a \neq 0)$로 놓고 x를 y에 대하여 정리하면 $x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$
여기서 변수 x와 y를 서로 바꾸면 함수 $y=ax+b$의 역함수는 $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$이다.


실생활 문제 6 섭씨온도는 얼음의 녹는점을 0 ℃, 물의 끓는점을 100 ℃로 하여 그 사이를 100등분한 온도 단위이고, 화씨온도는 얼음의 녹는점을 32 ℉, 물의 끓는점을 212 ℉로 하여 그 사이를 180등분한 온도 단위이다. 화씨온도 x ℉를 섭씨온도 y ℃로 바꾸는 식이 $y=\frac{5}{9}(x-32)$일 때, 섭씨온도 x ℃를 화씨온도 y ℉로 바꾸는 식을 구하고 두 함수의 관계를 말하여라.

역함수의 그래프에는 어떤 성질이 있는가?

탐구 활동 함수 $y=2x+1$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

• 준비물
투명 종이, 연필, 자

1. 함수 $y=2x+1$의 역함수를 구하여 보자.
2. 오른쪽 좌표평면 위에 함수 $y=2x+1$의 그래프와 그 역함수의 그래프를 그려 보자.
3. 오른쪽 좌표평면 위에 투명 종이를 대고, 직선 $y=x$와 2에서 그린 그래프를 그려 보자.
4. 3의 투명 종이를 직선 $y=x$를 접는 선으로 하여 접어서 두 그래프가 어떻게 되는지 알아보자.

탐구 활동에서 함수 $y=2x+1$의 그래프와 그 역함수 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 다음이 성립한다.

$$b=f(a) \Longleftrightarrow a=f^{-1}(b)$$

따라서 점 $(b,\ a)$는 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위에 있다.

그런데 점 $(a,\ b)$와 점 $(b,\ a)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

두 함수 $y=ax+b$, $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$의 정의역과 공역은 실수 전체의 집합으로 같으므로 두 함수가 서로 같은 함수이기 위해서는 모든 실수 x에 대하여

$ax+b=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$가 성립해야 한다.

따라서 $a=\frac{1}{a}$, $b=-\frac{b}{a}$

그러므로 $f=f^{-1}$일 조건은 $\boldsymbol{a=1,\ b=0}$ **또는** $\boldsymbol{a=-1}$이다.

(2) (i) $a=1$, $b=0$일 때 $f(x)=x$이므로 모든 실수 x에 대하여

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x)=x$

(ii) $a=-1$일 때 $f(x)=-x+b$이므로 모든 실수 x에 대하여

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))=f(-x+b)\\&=-(-x+b)+b\\&=x-b+b=x\end{aligned}$$

따라서 $f\circ f=I$이다.

6

목표| 화씨온도를 섭씨온도로 바꾸는 식을 섭씨온도를 화씨온도로 바꾸는 식으로 고치고, 이를 이용하여 역함수의 유용성을 느낄 수 있게 한다.

풀이| $y=\frac{5}{9}(x-32)$에서 x를 y에 대하여 정리하면 $x=\frac{9}{5}y+32$

변수 x와 y를 서로 바꾸어 섭씨온도 x ℃를 화씨온도 y ℉로 바꾸는 식을 구하면

$\boldsymbol{y=\frac{9}{5}x+32}$이다.

이때 **두 함수는 역함수 관계**에 있다.

탐구 활동의 이해

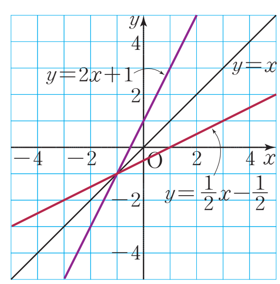
활동 목표 • 투명 종이를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 알아보도록 하기 위한 것이다.

1. $y=2x+1$에서 x를 y에 대하여 정리하면

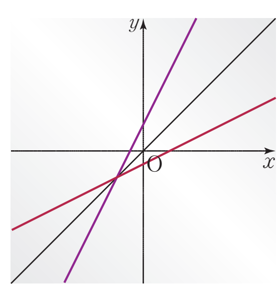
$x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$

여기서 변수 x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$

2.



3.

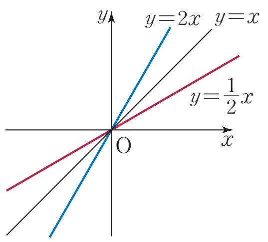


4. 직선 $y=x$를 접는 선으로 하여 접으면 **두 함수의 그래프가 서로 포개어진다.**

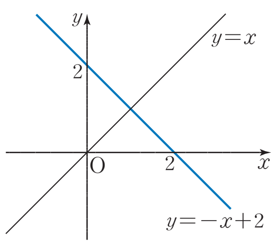
7

목표 | 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 관계를 이용하여 좌표평면 위에 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이 | (1) 함수 $y=2x$의 역함수는 $y=\frac{1}{2}x$이고, 이 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



(2) 함수 $y=-x+2$의 역함수는 $y=-x+2$이고, 이 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



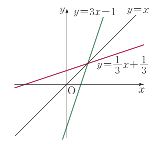
교과서 88 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

역함수의 그래프의 성질

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

보기 함수 $y=3x-1$의 역함수는 $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$이고, 이 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



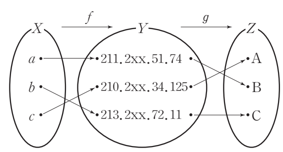
문제 7 다음 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프를 같은 좌표평면 위에 그려라.

(1) $y=2x$ (2) $y=-x+2$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

각각의 컴퓨터는 고유한 IP 주소를 가지며, 각 IP 주소를 통해 컴퓨터가 있는 지역을 알 수 있다. 세 대의 컴퓨터 a, b, c를 원소로 하는 집합 X, 세 개의 IP 주소를 원소로 하는 집합 Y, 세 지역 A, B, C를 원소로 하는 집합 Z에 대하여 두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$가 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.



(1) $(g \circ f)(a)$를 구하여라.

(2) $(f^{-1} \circ g^{-1})(\mathrm{C})$를 구하여라.

단원 과제

목표 | 합성함수의 정의를 이용하여 컴퓨터, IP 주소, 지역 사이의 연결된 관계를 알아보고, 이를 이용하여 주어진 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $(g \circ f)(a)=g(f(a))$

$=g(211.2\times\times.51.74)=\mathrm{B}$

(2) $(f^{-1} \circ g^{-1})(\mathrm{C})=f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{C}))$

$=f^{-1}(213.2\times\times.72.11)=b$

지/도/자/료

역함수의 그래프를 직접 그리기 어려울 때에는 원래의 함수의 그래프를 먼저 그린 다음, 그 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 그리면 역함수의 그래프가 됨을 알게 한다.

읽/기/자/료 함수를 이용한 여러 가지 현상 탐구

자연현상이나 사회현상을 설명하고자 할 때, 이를 함수 관계로 이해하는 경우가 많다. 일차함수, 이차함수, 유리함수, 무리함수 등은 자연현상이나 사회현상을 설명할 때 자주 등장하는 함수이므로 주어진 현상을 함수로 표현하려고 할 때에는 먼저 이를 일차함수, 이차함수, 유리함수, 무리함수로 표현할 수 있는지, 그렇지 않다면 어떤 함수가 필요한지 살펴본다.

주어진 현상을 함수로 표현하는 방법에는 여러 가지가 있는데, 첫 번째 방법은 연역적인 방법이다. 이는 주어진 현상을 논리적으로 해석하여 이를 함수로 표현하는 것이다. 두 번째는 경험적인 방법인데 많은 양의 데이터를 수집하여 관련되는 값들 사이의 함수 관계를 찾는 것이다.

설명하고 싶은 현상을 함수로 표현하게 되면 이 함수의 성질을 수학적으로 탐구하여야 한다. 그 결과를 원래 현상에 적용하면 그 현상에 대하여 정확하게 설명할 수 있고 또한 이를 바탕으로 어떤 예측을 할 수도 있다.

교과서 89 쪽

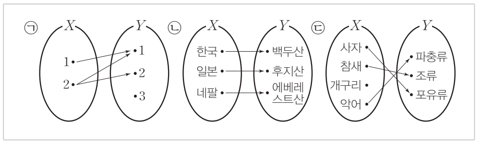
중단원 기초

[해답 p.220]

수준별 학습

1 다음 대응 중에서 함수인 것을 찾아라.

01 대응과 함수
함수의 뜻



2 정의역이 $X=\{0,\ 1\}$일 때, 다음 중에서 함수 $y=x^2$과 서로 같은 함수를 모두 찾아라.

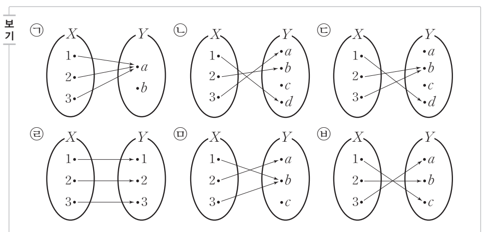
01 대응과 함수
서로 같은 함수

㉠ $y=x$	㉡ $y=\lvert x\rvert$	㉢ $y=-x+1$

3 보기의 대응을 보고, 다음에 해당하는 함수를 모두 찾아라.

01 대응과 함수
여러 가지 함수

보기



(1) 일대일함수　　(2) 일대일 대응
(3) 항등함수　　(4) 상수함수

4 두 함수 $f(x)=-2x$, $g(x)=x^2$에 대하여 다음을 구하여라.

02 합성함수와 역함수
합성함수

(1) $(g\circ f)(1)$　　(2) $(f\circ g)(1)$
(3) $(g\circ f)(x)$　　(4) $(f\circ g)(x)$

5 다음 함수의 역함수를 구하여라.

02 합성함수와 역함수
역함수

(1) $f(x)=x-1$　　(2) $g(x)=-2x+1$

중/단/원 기초

1

목표 | 함수의 뜻을 알고, 대응 중에서 함수인 것을 찾을 수 있게 한다.

풀이 | 대응 ㉠은 집합 X의 원소 2에 대응하는 집합 Y의 원소가 1, 2의 2개이므로 함수가 아니다.
대응 ㉡은 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 하나씩만 대응하므로 집합 X에서 집합 Y로의 함수이다.
대응 ㉢은 집합 X의 원소 개구리에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
따라서 함수인 것은 ㉡이다.

2

목표 | 서로 같은 두 함수를 찾을 수 있게 한다.

풀이 | $f(x)=x^2$, $g(x)=x$, $h(x)=|x|$, $k(x)=-x+1$이라고 하면 세 함수의 정의역과 공역은 서로 같고, $f(0)=g(0)=h(0)=0$, $f(1)=g(1)=h(1)=1$이므로 두 함수 g, h는 함수 f와 서로 같은 함수이다.
그러나 $k(0)=1$, $f(0)=0$에서 $f(0)\neq k(0)$이므로 두 함수 f와 k는 서로 같은 함수가 아니다.
따라서 함수 $y=x^2$과 서로 같은 함수는 ㉠, ㉡이다.

3

목표 | 여러 가지 함수를 구별할 수 있게 한다.

풀이 | (1) 대응 ㉡, ㉣, ㉥은 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응하므로 일대일함수이다.
(2) 대응 ㉣, ㉥은 일대일함수이고 공역과 치역이 같으므로 일대일 대응이다.
(3) 대응 ㉣은 정의역의 각 원소 x에 대하여 $x \longrightarrow x$이므로 항등함수이다.
(4) 대응 ㉠은 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $x \longrightarrow a$이므로 상수함수이다.

4

목표 | 합성함수의 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(-2\times1)$
$=g(-2)=(-2)^2=\mathbf{4}$
(2) $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(1^2)=f(1)=-2\times1=\mathbf{-2}$
(3) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-2x)=(-2x)^2=\mathbf{4x^2}$
(4) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=\mathbf{-2x^2}$

5

목표 | 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $y=x-1$에서 x를 y에 대하여 정리하면
$x=y+1$
여기서 변수 x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=x+1$, 즉 $\boldsymbol{f^{-1}(x)=x+1}$이다.
(2) $y=-2x+1$에서 x를 y에 대하여 정리하면
$x=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$
여기서 변수 x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, 즉 $\boldsymbol{g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$이다.

중/단/원 기본

1

목표| 대응 중에서 함수와 일대일 대응을 찾을 수 있게 한다.

풀이| (1) 대응 ㉠, ㉡, ㉣은 정의역의 각 원소에 공역의 원소가 하나씩만 대응하므로 함수이다. 이때 ㉠, ㉡의 치역은 모두 $\{0,\ 1\}$이고, ㉣의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2\}$이다.
한편 대응 ㉢은 집합 X의 원소 1에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

(2) 대응 ㉣은 서로 다른 정의역의 원소에 서로 다른 공역의 원소가 대응하고, 치역과 공역이 같으므로 일대일 대응이다.

2

목표| 두 함수가 서로 같을 조건을 이용하여 미지의 함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(1)=g(1)$에서 $1=a+b$ …… ①
$f(2)=g(2)$에서 $4=2a+b$ …… ②
①, ②를 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=3,\ b=-2}$

교과서 90 쪽

중단원 기본

[해답 p.220]

수준별 학습

1 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X의 원소 x에 Y의 원소를 보기와 같이 대응시킬 때, 다음 물음에 답하여라.

보기
㉠ $x \longrightarrow |x|$　　㉡ $x \longrightarrow x^2$
㉢ $x \longrightarrow x+2$　　㉣ $x \longrightarrow x+1$

(1) 함수인 것을 모두 찾고, 각 함수의 치역을 구하여라.
(2) 일대일 대응인 함수를 찾아라.

01 대응과 함수
함수와 일대일 대응

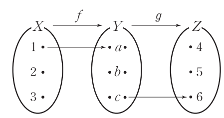
2 정의역이 $X=\{1,\ 2\}$인 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=ax+b$에 대하여 $f=g$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

01 대응과 함수
서로 같은 함수

3 세 함수 $f(x)=x-2$, $g(x)=-x^2$, $h(x)=-2x$에 대하여
$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$가 성립함을 보여라.

02 합성함수와 역함수
합성함수

4 세 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{a, b, c\}$, $Z=\{4, 5, 6\}$에 대하여 두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$가 일대일 대응이고, $f(1)=a$, $g(c)=6$, $(g\circ f)(2)=4$를 만족시킬 때, 다음 값을 구하여라.



(1) $f(3)$　　(2) $(g\circ f)(1)$
(3) $g^{-1}(4)$　　(4) $(f^{-1}\circ g^{-1})(5)$

02 합성함수와 역함수

5 함수 $f(x)=5x-4$의 역함수를 $y=g(x)$라고 할 때, 방정식 $f(x)=g(x)$의 근을 구하여라.

02 합성함수와 역함수
역함수

3

목표| 함수의 합성에 대한 결합법칙이 성립함을 확인할 수 있게 한다.

풀이| $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-2)$
$\qquad =-(x-2)^2=-x^2+4x-4$
$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(-x^2+4x-4)$
$\qquad =-2(-x^2+4x-4)=2x^2-8x+8$
$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(-x^2)=-2(-x^2)=2x^2$
$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=(h\circ g)(x-2)$
$\qquad =2(x-2)^2=2x^2-8x+8$
따라서 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$가 성립한다.

4

목표| 합성함수, 역함수, 일대일 대응의 정의를 이용하여 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| f, g는 일대일 대응이므로 $g(f(2))=4$에서 $f(2)=b$이다.

(1) f는 일대일 대응이고, $f(1)=a$, $f(2)=b$이므로
$f(3)=\boldsymbol{c}$

(2) g는 일대일 대응이고, $g(f(2))=g(b)=4$이므로
$(g\circ f)(1)=g(a)=\mathbf{5}$

(3) $g(b)=4$이므로 $g^{-1}(4)=\boldsymbol{b}$

(4) $g(a)=5$에서 $g^{-1}(5)=a$, $f(1)=a$에서 $f^{-1}(a)=1$이므로 $(f^{-1}\circ g^{-1})(5)=f^{-1}(g^{-1}(5))=f^{-1}(a)=\mathbf{1}$

5

목표| 역함수를 구하고, 이를 이용하여 주어진 방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| $y=5x-4$라 놓고 x를 y에 대하여 정리하면
$x=\frac{1}{5}y+\frac{4}{5}$
두 변수 x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수 $y=g(x)$는
$y=\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$
방정식 $f(x)=g(x)$을 풀면
$5x-4=\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$에서 $\boldsymbol{x=1}$

교과서 91 쪽

중단원 실력

[해답 p.220]

수준별 학습

1 2 이상의 자연수로 이루어진 집합 X를 정의역으로 하는 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, $f(36)$의 값을 구하여라.

> (i) p가 소수이면 $f(p)=p$이다.
> (ii) 정의역 X에 속하는 임의의 a, b에 대하여
> $$f(ab)=f(a)+f(b)$$

01 대응과 함수 — 함수

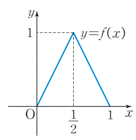
2 실수 전체의 집합 R에 대하여 함수 $f: R \longrightarrow R$를

$$f(x)=|x|+ax+1$$

로 정의할 때, 함수 f가 일대일 대응이 되도록 실수 a값의 범위를 구하여라.

01 대응과 함수 — 일대일 대응

3 $0\le x\le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x))=\frac{1}{2}$의 실근의 개수를 구하여라.



02 합성함수와 역함수 — 합성함수

4 실수 전체의 집합 R에 대하여 함수 $f: R \longrightarrow R$를

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\text{가 유리수일 때})\\ 0 & (x\text{가 무리수일 때})\end{cases}$$

로 정의할 때, 합성함수 $f\circ f$의 치역을 구하여라.

02 합성함수와 역함수 — 합성함수

5 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$에 대하여 $f^{-1}(0)=5$이다. $h(x)=f(2x-1)$을 만족시키는 함수 $y=h(x)$의 역함수 $y=h^{-1}(x)$에 대하여 $h^{-1}(0)$의 값을 구하여라.

02 합성함수와 역함수 — 역함수

중/단/원 실력

1

목표| 주어진 조건을 만족시키는 함수의 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $36=2^2\times 3^2$이므로

$$\begin{aligned}f(36)&=f(2^2\times 3^2)=f(2^2)+f(3^2)=f(2\times 2)+f(3\times 3)\\&=f(2)+f(2)+f(3)+f(3)\\&=2+2+3+3=\mathbf{10}\end{aligned}$$

2

목표| 주어진 함수가 일대일 대응이 되게 하는 미지수의 범위를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=|x|+ax+1$에서

(i) $x\ge 0$일 때 $\quad f(x)=x+ax+1=(a+1)x+1$

(ii) $x<0$일 때 $\quad f(x)=-x+ax+1=(a-1)x+1$

(i), (ii)에서 함수 f가 일대일 대응이 되려면 $x\ge 0$일 때의 직선의 기울기의 부호와 $x<0$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉, $(a+1)(a-1)>0$이므로 구하는 a값의 범위는 $\boldsymbol{a<-1}$ **또는** $\boldsymbol{a>1}$이다.

3

목표| 합성함수의 성질을 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=\begin{cases}2x & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right)\\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right)\end{cases}$이므로

방정식 $f(x)=\frac{1}{2}$은 두 실근 $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$을 가진다.

따라서 $f(f(x))=\frac{1}{2}$의 실근은 $f(x)=\frac{1}{4}$ 또는 $f(x)=\frac{3}{4}$의 실근과 같다.

$f(x)=\frac{1}{4}$의 실근은 $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{8}$이고, $f(x)=\frac{3}{4}$의 실근은 $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$이므로 $f(f(x))=\frac{1}{2}$의 실근은 $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$의 **4**개이다.

4

목표| 합성함수의 치역을 구할 수 있게 한다.

풀이| 1은 유리수이므로 x가 유리수일 때

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(1)=1$

0은 유리수이므로 x가 무리수일 때

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(0)=1$

따라서 구하는 함수의 치역은 $\{\mathbf{1}\}$이다.

5

목표| 역함수의 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f^{-1}(0)=5$에서 $\quad f(5)=0$

$2x-1=t$로 놓으면 $x=\frac{t+1}{2}$이므로

$h(x)=f(2x-1)$에서 $\quad h\left(\frac{t+1}{2}\right)=f(t)$

이때 $t=5$를 대입하면 $h\left(\frac{5+1}{2}\right)=h(3)=f(5)=0$이므로 $\quad h^{-1}(0)=\mathbf{3}$

2 유리함수와 무리함수

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.

② 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 유리함수	유리식
	유리함수
	유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프
	유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프
	유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프
02 무리함수	무리식
	무리함수
	무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프
	무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 92 쪽

2 유리함수와 무리함수

모래시계 속의 함수

모래시계는 가운데가 잘록한 유리그릇에 마른 모래를 넣고 중력으로 서서히 모래가 떨어지면 그 부피로 시간을 재는 장치로 14세기부터 쓰이기 시작하여 15세기에 이르러 널리 이용되었다.

19세기까지는 배의 속력을 측정하기 위하여 28초짜리 모래시계가 많이 사용되었는데, 14.4 m마다 매듭(노트, knot)이 있는 줄 끝에 나무토막을 매달아 배의 측면에서 바다에 던져 첫 번째 매듭이 손에서 벗어날 때부터 모래시계로 시간을 재기 시작하고 28초 동안 손을 지나간 매듭의 수를 세어 배의 속력을 측정하였다고 한다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 101쪽

모래시계의 위에 남은 모래의 양과 아래로 떨어진 모래의 양의 비율을 시간에 대한 함수로 나타낼 수 있을까?

들어가면서 모래시계를 이용하여 시간을 측정할 수 있는 것은 모래시계에 내재된 함수적 속성 때문이다. 이와 같이 우리 주변에는 속도, 거리, 시간 사이의 관계와 같이 함수의 의미를 가지고 있는 많은 것들이 존재한다. 이때 이들 사이의 규칙을 알아내고 이것을 함수로 표현해 내면 그로부터 여러 가지 상황을 예측하고, 그 결과에 대해 미리 준비할 수 있는 경우가 많이 있다. 이 단원에서는 유리식, 무리식으로 나타나는 현상을 함수로 표현하고, 이러한 함수의 특징을 이해하여 수학이 우리 주변에 많은 것과 관계되어 있으며 우리 주변을 풍요롭게 한다는 것을 느낄 수 있도록 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 설명할 수 있다.	상	유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 말할 수 있다.
	하	유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 그릴 수 있다.
2. 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 설명할 수 있다.	상	무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	무리함수 $y=\sqrt{x-p}+q$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 말할 수 있다.
	하	무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 그릴 수 있다.

교과서 93 쪽

01 유리함수

● 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

유리식이란 무엇인가?

생각 열기 유람선

유람선은 사적이나 명승지가 많은 강, 호수 등을 관람하는 배이다. 옛날에는 선체도 약했고 설비도 빈약하여 사고가 자주 일어났지만, 최근에는 좌석도 많고 안전한 호화 유람선이 많으며 호버크라프트와 같은 고속 유람선도 나오고 있다. 우리나라의 한강에도 1986년 10월부터 잠실, 뚝섬, 여의도 간을 오가는 관광 유람선이 운항되고 있다.

탐구 활동 **한강 유람선이 잠실 선착장과 여의도 선착장의 두 지점을 일정한 속력 v km/h로 왕복한다고 하자. 두 지점 사이의 거리는 15 km이고, 강물은 잠실 선착장에서 여의도 선착장 방향으로 a km/h의 속력으로 흐른다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 유람선이 여의도 선착장에서 잠실 선착장으로 올라갈 때 걸리는 시간을 v와 a를 사용한 식으로 나타내어 보자.
2. 유람선이 잠실 선착장에서 여의도 선착장으로 내려갈 때 걸리는 시간을 v와 a를 사용한 식으로 나타내어 보자.
3. 유람선이 잠실 선착장과 여의도 선착장 사이를 왕복하는 데 걸리는 시간을 v와 a를 사용한 식으로 나타내어 보자.

두 정수 a, b $(b\neq0)$에 대하여 $\dfrac{a}{b}$의 꼴로 나타나는 수를 유리수라고 하는 것과 마찬가지로 두 다항식 A, B $(B\neq0)$에 대하여 $\dfrac{A}{B}$의 꼴로 나타나는 식을 **유리식**이라고 한다. 특히 분모 B가 0이 아닌 상수이면 유리식 $\dfrac{A}{B}$는 다항식이 된다.

예를 들어 $3x+5$, $\dfrac{x+3}{2}$, $\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{xy}{x+y}$는 모두 유리식이고, 이 중에서 $3x+5$, $\dfrac{x+3}{2}$은 다항식이다.

01 유리함수

소단원 지도 목표

① 유리식의 뜻을 알고, 간단한 유리식의 계산을 할 수 있게 한다.

② 유리함수, 다항함수의 뜻을 알게 한다.

③ 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하게 한다.

④ 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하게 한다.

⑤ 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 다항함수는 유리함수의 특수한 경우임에 유의하게 한다.

2. 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 꼴은 간단한 것만 다루며, 유리함수의 정의역과 치역에 유의하도록 한다.

새로 나온 용어와 기호

- 유리식(有理式, rational expression)
- 유리함수(有理函數, rational function)
- 다항함수(多項函數, polynomial function)
- 점근선(漸近線, asymptotic line)

생각 열기 참/고/자/료

한강에서 운항되는 유람선은 1986년 아시안게임과 1988년 서울 올림픽 개최에 따른 국가적인 사업의 일환으로 1986년 10월 여의도와 잠실 두 곳에서 유람선 6척으로 첫 운항을 시작하였다. 이후 1992년 한강대홍수로 19명의 인명참사와 2척의 유람선 침몰로 어려움을 겪기도 하였다. 이후 2002년 월드컵 행사와 각종 국제행사에 참여하면서 연간 60만 명 이상의 국내외 관광객들에게 한강의 문화를 알리는 데 크게 기여하였다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 배가 두 선착장 사이를 이동하는 데 걸리는 시간을 배와 강물의 속력에 대한 유리식으로 나타내어 봄으로써 유리의 뜻을 이해하도록 하기 위한 것이다.

1. 유람선이 강물을 거슬러 올라가므로 배의 속력은 $(v-a)$km/h이다.
(시간)$=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$이므로 구하는 시간은 $\dfrac{15}{v-a}$이다.

2. 유람선이 강물을 따라 내려가므로 배의 속력은 $(v+a)$km/h이므로 구하는 시간은 $\dfrac{15}{v+a}$이다.

3. 왕복하는 데 걸리는 시간은 $\dfrac{15}{v-a}+\dfrac{15}{v-a}$이다.

참고| 강을 거슬러 올라갈 때의 배의 속력은 흐르는 물에 저항을 받아 물의 속력만큼의 속력이 감소하고, 강을 따라 내려갈 때의 배의 속력은 흐르는 물에 탄력을 받아 물의 속력만큼의 속력이 증가한다.

본문 해설

❶ $\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C}$, $\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}(B\neq0,\ C\neq0)$는 유리식의 분자, 분모에 0이 아닌 같은 식을 곱하여도 같은 유리식이 된다는 것과 분자, 분모에 공통인 인수가 있을 때, 이 인수로 나누어 식을 간단히 할 수 있다는 것을 뜻한다.

유리식은 유리수와 마찬가지로 분자, 분모에 0이 아닌 다항식을 곱하거나 나누어도 그 값은 변하지 않는다.

❶ 유리식의 성질

세 다항식 A, B, C $(B\neq0,\ C\neq0)$에 대하여

(1) $\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C}$ (2) $\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}$

유리식을 통분할 때에는 유리식의 성질을 이용하여 분자, 분모에 0이 아닌 다항식을 곱하여 계산한다.

문제 1 다음 두 유리식을 통분하여라.

(1) $\frac{1}{x^2-2x}$, $\frac{3}{x^2+x}$ (2) $\frac{2}{x^2-2x-3}$, $\frac{1}{x^2-3x}$

한편 유리식의 분자와 분모에 공통인 인수가 있을 때에는 유리식의 성질을 이용하여 분자, 분모의 공통인 인수로 나누어 식을 간단히 할 수 있다.

문제 2 다음 유리식을 간단히 하여라.

(1) $\frac{9x^2y^3z^2}{3x^3yz}$ (2) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$

1

목표| 유리식의 성질을 이용하여 두 유리식을 통분할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2-2x=x(x-2)$, $x^2+x=x(x+1)$이므로

$$\frac{1}{x^2-2x}=\frac{1}{x(x-2)}=\mathbf{\frac{x+1}{x(x-2)(x+1)}}$$

$$\frac{3}{x^2+x}=\frac{3}{x(x+1)}=\mathbf{\frac{3(x-2)}{x(x-2)(x+1)}}$$

(2) $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$, $x^2-3x=x(x-3)$이므로

$$\frac{2}{x^2-2x-3}=\frac{2}{(x-3)(x+1)}=\mathbf{\frac{2x}{x(x-3)(x+1)}}$$

$$\frac{1}{x^2-3x}=\frac{1}{x(x-3)}=\mathbf{\frac{x+1}{x(x-3)(x+1)}}$$

2

목표| 유리식의 성질을 이용하여 유리식을 간단히 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{9x^2y^3z^2}{3x^3yz}=\frac{9\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot y\cdot y\cdot\cancel{z}\cdot z}{3\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{z}}=\mathbf{\frac{3y^2z}{x}}$

(2) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}=\frac{(x-1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\mathbf{\frac{x-1}{x-3}}$

3

목표| 유리식의 덧셈과 뺄셈을 계산할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{x+4}{x^2-x-2}+\frac{x+3}{x^2-1}$

$$=\frac{x+4}{(x+1)(x-2)}+\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{(x+4)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}+\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{2x^2+4x-10}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$=\mathbf{\frac{2(x^2+2x-5)}{(x+1)(x-1)(x-2)}}$$

(2) $\frac{-3}{2x+1}-1=\frac{-3}{2x+1}-\frac{2x+1}{2x+1}$

$$=\frac{-3-(2x+1)}{2x+1}=\mathbf{\frac{-2(x+2)}{2x+1}}$$

유리식의 덧셈과 뺄셈은 유리수의 덧셈, 뺄셈과 같은 방법으로 한다.

예제 01 다음 식을 계산하여라.

(1) $\frac{1}{x+3}+2$ (2) $\frac{x+5}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+x}$

다항식 $A,\ B,\ C(C\neq0)$에 대하여

(1) 덧셈: $\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$

(2) 뺄셈: $\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$

풀이 (1) $\frac{1}{x+3}+2=\frac{1+2(x+3)}{x+3}=\frac{2x+7}{x+3}$

(2) $\frac{x+5}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+x}=\frac{x+5}{(x+1)(x-1)}-\frac{2}{x(x+1)}$

$=\frac{x^2+3x+2}{x(x+1)(x-1)}=\frac{\cancel{(x+1)}(x+2)}{x\cancel{(x+1)}(x-1)}=\frac{x+2}{x(x-1)}$

답 (1) $\frac{2x+7}{x+3}$ (2) $\frac{x+2}{x(x-1)}$

문제 3 다음 식을 계산하여라.

(1) $\frac{x+4}{x^2-x-2}+\frac{x+3}{x^2-1}$ (2) $\frac{-3}{2x+1}-1$

유리식의 곱셈과 나눗셈은 유리수의 곱셈, 나눗셈과 같은 방법으로 한다.

예제 02 다음 식을 계산하여라.

(1) $\frac{x+4}{x^2-2x-3}\times\frac{x^2-3x}{x-2}$ (2) $\frac{x-2}{x^2-1}\div\frac{3x-6}{x^2-x}$

다항식 $A,\ B,\ C,\ D(B\neq0,\ D\neq0)$에 대하여

(1) 곱셈: $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$

(2) 나눗셈:

$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$

(단, $C\neq0$)

풀이 (1) $\frac{x+4}{x^2-2x-3}\times\frac{x^2-3x}{x-2}=\frac{x+4}{(x+1)\cancel{(x-3)}}\times\frac{x\cancel{(x-3)}}{x-2}=\frac{x(x+4)}{(x+1)(x-2)}$

(2) $\frac{x-2}{x^2-1}\div\frac{3x-6}{x^2-x}=\frac{x-2}{x^2-1}\times\frac{x^2-x}{3x-6}$

$=\frac{\cancel{x-2}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}\times\frac{x\cancel{(x-1)}}{3\cancel{(x-2)}}=\frac{x}{3(x+1)}$

답 (1) $\frac{x(x+4)}{(x+1)(x-2)}$ (2) $\frac{x}{3(x+1)}$

문제 4 다음 식을 계산하여라.

(1) $\frac{x^2-1}{(x+2)^2}\times\frac{3x+2}{x-1}$ (2) $\frac{x-3}{x^2+3x+2}\div\frac{x^2-4x+3}{x^2+5x+4}$

4

목표 | 유리식의 곱셈과 나눗셈을 계산할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\frac{x^2-1}{(x+2)^2}\times\frac{3x+2}{x-1}$

$=\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x+2)^2}\times\frac{3x+2}{\cancel{x-1}}$

$=\mathbf{\frac{(x+1)(3x+2)}{(x+2)^2}}$

(2) $\frac{x-3}{x^2+3x+2}\div\frac{x^2-4x+3}{x^2+5x+4}$

$=\frac{x-3}{x^2+3x+2}\times\frac{x^2+5x+4}{x^2-4x+3}$

$=\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x+1)}(x+2)}\times\frac{\cancel{(x+1)}(x+4)}{(x-1)\cancel{(x-3)}}$

$=\mathbf{\frac{x+4}{(x+2)(x-1)}}$

지/도/자/료

유리식은 유리수와 서로 비슷한 점을 이용하여 다음과 같이 지도할 수 있다.

1. 유리식을 간단히 나타내기

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$과 같이 유리수를 기약분수로 나타낼 때 분자와 분모를 공약수로 약분하듯이 유리식을 간단히 하려면 먼저 분자와 분모를 인수분해하여 분자와 분모의 공통인 인수를 찾아 그 인수로 분자와 분모를 나눈다.

2. 유리식의 덧셈과 뺄셈

$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{4+9}{12}=\frac{13}{12}$과 같이 유리수의 덧셈과 뺄셈을 계산할 때 통분하여 분모를 같게 한 후 계산하듯이 유리식의 덧셈과 뺄셈을 계산할 때에도 먼저 분자, 분모에 적당한 식을 곱하여 분모가 같게 통분한 후 계산한다.

3. 유리식의 곱셈과 나눗셈

$\frac{1}{3}\times\frac{7}{4}=\frac{7}{12}$, $\frac{1}{2}\div\frac{2}{5}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{4}$와 같이 유리수의 곱셈을 계산할 때 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 곱하여 기약분수로 나타내고, 유리수의 나눗셈을 계산할 때 나누는 수의 분자와 분모를 바꾸고 나눗셈을 곱셈으로 바꾸어 계산하듯이 유리식의 곱셈과 나눗셈도 같은 방법으로 계산한다.

읽/기/자/료 유리수와 유리식의 대수적 구조

정수의 집합을 Z, 유리수의 집합을 Q라고 하면

$$Q=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\,a,\ b\in Z,\ b\neq0\right\}$$

이다. 한편 실수의 집합을 R라고 할 때, 실수를 계수로 하는 x에 대한 다항식의 집합을 $R[x]$로 나타내고, 실수를 계수로 하는 x에 대한 유리식의 집합을 $R(x)$로 나타내면

$$R(x)=\left\{\frac{A}{B}\,\middle|\,A,\ B\in R[x],\ B\neq0\right\}$$

이다. 집합 Q는 덧셈과 곱셈에 대하여 체라고 하는 대수적 구조를 갖고 있으며, Q의 각 원소는 Z의 두 원소의 분수꼴로 표현된다. 이러한 뜻에서 Q를 Z의 분수체라고 한다.

집합 $R[x]$는 Z와 유사한 대수적 구조를 가지며, 집합 $R(x)$는 Q와 유사한 대수적 구조를 가진다. 또 $R(x)$의 각 원소는 $R[x]$의 두 원소의 분수꼴로 표시되는데, 이러한 뜻에서 $R(x)$를 $R[x]$의 분수체라고 한다.

생각 열기 참/고/자/료

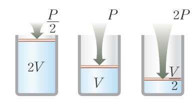
보일(Boyle, R. ; 1627～1691)은 물질을 구성하는 기본적 요소인 원소의 개념을 확립한 독창적인 화학자이자 물리학자로, 왕립 학회의 창립 회원으로 활동하며 17세기 영국 과학을 대변한 인물이다. 부피와 압력이 반비례 관계를 이룬다는 것을 정식화한 ‘보일 법칙’으로 유명한 그는 물질은 입자로 이루어져 있다는 입자 철학의 신봉자였다. 또 아리스토텔레스 식의 단순한 경험적 관찰에서 탈피하여 과학자의 의도대로 변수를 조절하는 실험이 과학 연구에서 매우 중요하다는 사실을 설파하였다. 한편 원소의 개념을 바로잡아 18세기 이후 분석 화학의 발전에 크게 기여하였다.

교과서 96 쪽

유리함수란 무엇인가?

생각 열기 **보일 법칙**

자연계에서 변화하는 양들 사이에는 여러 가지 법칙이 성립한다. 온도가 일정할 때, 압력이 커지면 기체의 부피는 줄어들고, 압력이 작아지면 기체의 부피는 늘어난다. 이와 같이 일정한 온도에서 기체의 부피 V는 압력 P에 반비례하는데, 이것을 보일 법칙이라고 한다.



탐구 활동 **다음 물음에 답하여 보자.**

1. 어떤 기체의 압력 x와 부피 y가 보일 법칙을 따를 때, 다음 표를 완성하여 보자.

압력(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
부피(y)			1		

2. 부피 y를 $y=$(x에 대한 식)의 꼴로 나타낼 때, 우변의 식은 유리식인가?

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때, 이 함수를 **유리함수**라고 한다. 특히 유리함수 중에서 $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때, 이 함수를 **다항함수**라고 한다.

유리함수에서 정의역이 주어지지 않은 경우에는 분모를 0으로 하는 원소를 제외한 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

보기 (1) 두 함수 $y=x-1$, $y=x^2-2x-1$은 유리함수이며, 특히 다항함수이다.

(2) 두 함수 $y=\frac{3}{x}$, $y=\frac{2x+1}{x-1}$은 유리함수이다.

이때 함수 $y=\frac{3}{x}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq0$인 실수$\}$이고,

함수 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq1$인 실수$\}$이다.

문제 5 다음 유리함수의 정의역을 구하여라.

(1) $y=\frac{x+1}{2}$ (2) $y=\frac{2}{x-1}$ (3) $y=\frac{x+1}{x+2}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 기체의 압력 x와 부피 y 사이에 반비례 관계가 성립함을 이용하여 유리함수 $y=\frac{k}{x}$를 도입하기 위한 것이다.

1. 압력 x와 부피 y가 서로 반비례하므로 $xy=k$(k는 상수)의 관계식이 성립한다.
주어진 표에서 $x=1$일 때 $y=1$이므로 $k=1$
따라서 x, y의 곱이 1이 되도록 표를 완성하면 다음과 같다.

압력(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
부피(y)	**4**	**2**	**1**	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$

2. $xy=1$이므로 y를 x에 대하여 정리하면 $y=\frac{1}{x}$이므로 우변의 식은 **유리식이다.**

5

목표 | 유리함수의 뜻을 알고, 유리함수의 정의역을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 정의역은 분모를 0으로 하는 원소를 제외한 실수 전체의 집합이므로

(1) 함수 $y=\frac{x+1}{2}$의 정의역은 **실수 전체의 집합**이다.

(2) 함수 $y=\frac{2}{x-1}$의 정의역은 $\{\boldsymbol{x\,|\,x\neq1}$**인 실수**$\}$이다.

(3) 함수 $y=\frac{x+1}{x+2}$의 정의역은 $\{\boldsymbol{x\,|\,x\neq-2}$**인 실수**$\}$이다.

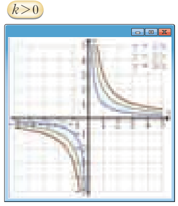
본문 해설

❶ 점근선이 있는 곡선은 그 점근선에 한없이 가까워지지만 만나지는 않는다. 점근선이 있는 그래프는 점근선을 나타내어 그래프가 점근선에 가까워짐을 표시해 주어야 한다.

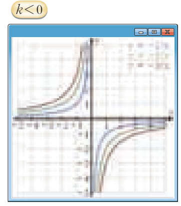
유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 어떻게 그리는가?

유리함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프를 k의 여러 가지 값에 대하여 그리면 다음과 같은 한 쌍의 매끄러운 곡선이 그려짐을 중학교에서 배웠다.

$k>0$



$k<0$



위의 그림에서 그래프 위의 점은 x의 절댓값이 커질수록 x축에 가까워지고 x의 절댓값이 작아질수록 y축에 가까워진다.

❶ 이와 같이 곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 **점근선**이라고 한다.

따라서 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 점근선은 x축과 y축이고, 점근선의 방정식은 $y=0$과 $x=0$이다.

또 $|k|$의 값이 커질수록 그래프가 원점에서 멀어진다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

유리함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프

(1) 정의역과 치역은 모두 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.
(2) $k>0$이면 그래프는 제1, 3사분면에 있고,
$k<0$이면 그래프는 제2, 4사분면에 있다.
❷ (3) 원점과 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 곡선이다.
(4) 점근선은 x축과 y축이다.
(5) $|k|$의 값이 커질수록 그래프가 원점에서 멀어진다.

● $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭
$\Longleftrightarrow$ $y=f(x)$와 $-y=f(-x)$의 그래프가 일치

● $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭
$\Longleftrightarrow$ $y=f(x)$와 $x=f(y)$의 그래프가 일치

❷ 어떤 도형을 대칭이동하였을 때 처음 도형과 일치하면 그 도형은 대칭인 도형이다. 즉, 도형 $f(x,\ y)=0$을 원점에 대하여 대칭이동하면 $f(-x,\ -y)=0$이다. 이때 $f(x,\ y)=0$과 $f(-x,\ -y)=0$이 일치하면 $f(x,\ y)=0$은 원점에 대하여 대칭인 도형이다.

예를 들어 곡선 $y=\frac{k}{x}$를 원점에 대하여 대칭이동하면 $-y=\frac{k}{-x}$이고, 이 식은 $y=\frac{k}{x}$와 같으므로 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

마찬가지로 곡선 $y=\frac{k}{x}$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $x=\frac{k}{y}$이고, 이 식은 $y=\frac{k}{x}$와 같으므로 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

한편 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 직선 $y=-x$에 대하여도 대칭이다. 이를 보이면 다음과 같다.

$y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 임의의 점 $(a,\ b)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동시킨 점을 $(x,\ y)$라고 하자. 이때 두 점 $(a,\ b)$와 $(x,\ y)$의 중점 $\left(\frac{a+x}{2},\ \frac{b+y}{2}\right)$는 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

$$\frac{b+y}{2}=-\frac{a+x}{2}$$

$$b+y=-a-x \qquad \cdots\cdots ①$$

두 점 $(a,\ b)$와 $(x,\ y)$를 이은 선분의 기울기는 1이므로

$$\frac{b-y}{a-x}=1$$

$$b-y=a-x \qquad \cdots\cdots ②$$

①+②에서 $2b=-2x,\ b=-x$

①−②에서 $2y=-2a,\ a=-y$

점 $(a,\ b)$는 $y=\frac{k}{x}$ 위의 점이므로

$b=\frac{k}{a}$에서 $a=-y,\ b=-x$를 대입하면

$$-x=\frac{k}{-y},\ y=\frac{k}{x}$$

따라서 곡선 $y=\frac{k}{x}$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면 $y=\frac{k}{x}$이므로 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다.

지/도/자/료

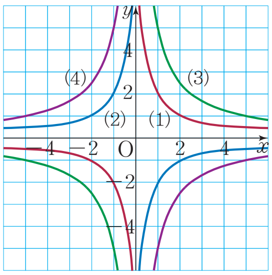
1. 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 쌍곡선으로, 쌍곡선은 원뿔곡선의 일종이며 그 기하학적 정의는 평면 위의 두 정점으로부터 거리의 차가 일정한 점의 자취이다. 그러나 여기서는 기하학적인 도형으로서의 쌍곡선의 정의는 다루지 않고, 유리함수의 그래프라는 관점에서만 그 개형을 다룬다.

2. 함수 $y=\frac{k}{x}$ 꼴의 유리함수는 유리함수의 그래프의 기본이 되는 것이므로 충분히 이해시켜 지도하는 것이 좋다.
k의 부호와 $|k|$의 크기에 따라 그래프가 변하는 상태를 공학적 도구를 활용하여 이해시킴으로써 그 그래프가 x축, y축을 점근선으로 가지는 것과, 그 그래프의 특징에 대해서 알도록 지도한다.

6

목표| 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

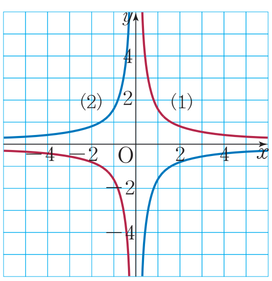
풀이|



7

목표| 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이|

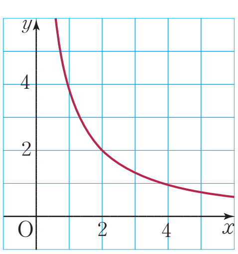


8

목표| 일상생활이나 과학의 법칙에 등장하는 유리함수에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) $I=\frac{V}{R}$에서 $V=4$이므로 $I=\frac{4}{R}$

(2)

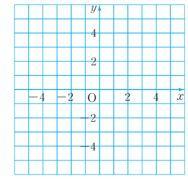


교과서 98 쪽

문제 6 다음 유리함수의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라.

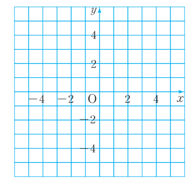
(1) $y=\frac{2}{x}$ (2) $y=-\frac{2}{x}$

(3) $y=\frac{5}{x}$ (4) $y=-\frac{5}{x}$



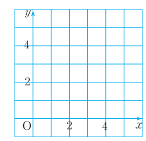
문제 7 다음 유리함수의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라.

(1) $y=\frac{3}{2x}$ (2) $y=-\frac{3}{2x}$



실생활

문제 8 전류의 세기 I암페어(A)와 전압의 세기 V볼트(V), 저항의 크기 R옴(Ω) 사이의 관계를 나타내는 옴의 법칙은 $I=\frac{V}{R}$의 관계식으로 나타낼 수 있다. 어떤 휴대 전화의 전지의 전압이 $4\,\mathrm{V}$로 일정할 때, 다음 물음에 답하여라. (단, $R>0$)



(1) 전류 I와 저항 R 사이의 관계식을 구하여라.

(2) 저항 R를 x축, 전류 I를 y축으로 하는 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라.

사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

평균 속력 $x\,\mathrm{km/h}$로 일정한 거리 $d\,\mathrm{km}$를 이동할 때 걸리는 시간을 y시간이라고 하면

$$y=\frac{d}{x}$$

로 나타낼 수 있다. 이와 같이 생활 주변에서 두 변수 x, y 사이에 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq0)$의 관계가 있는 것을 조사하여 식으로 나타내고 발표하여 보자.

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 생활 주변에서 $y=\frac{k}{x}$의 꼴로 나타나는 유리함수를 찾아봄으로써 유리함수의 유용성을 알아보기 위한 문제이다.

풀이| 부피가 일정한 직육면체 모양의 상자에서 한 밑면의 넓이를 x, 높이를 y라고 하면 $xy=k$(k는 상수), 즉 $y=\frac{k}{x}$의 관계식이 성립한다.

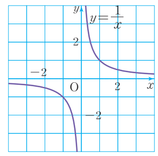
초점 거리가 $k\,\mathrm{mm}$이고, 지름의 길이가 $x\,\mathrm{mm}$인, 카메라 렌즈를 통하여 들어오는 빛의 밝기를 y라고 하면 $y=\frac{k}{x}$의 관계식이 성립한다.

교과서 99 쪽

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프를 어떻게 그리는가?

탐구 활동 유리함수 $y=\frac{1}{x}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

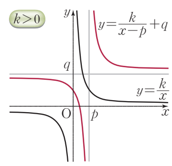
1. 오른쪽 좌표평면 위에 유리함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 그리고, 이 그래프를 나타내는 함수를 구하여 보자.
2. 1의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프를 그리고, 이 그래프를 나타내는 함수를 구하여 보자.



● $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $y-q=f(x-p)$이다.

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.

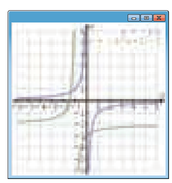


이상에서 다음을 알 수 있다.

❶ 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프

(1) 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
(2) 정의역은 p를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 q를 제외한 실수 전체의 집합이다.
(3) 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이고, 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.

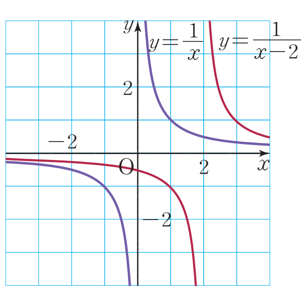
보기 유리함수 $y=-\frac{1}{x+1}-2$의 그래프는 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=-2$이다.



탐구 활동의 이해

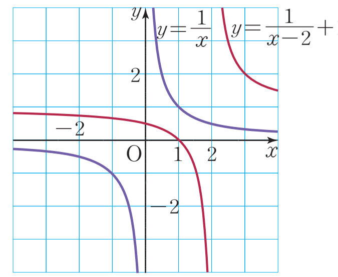
활동 목표 • 유리함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 평행이동하여 봄으로써 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴의 그래프를 그리는 방법을 알도록 하기 위한 것이다.

1. $y=\frac{1}{x}$에서 x 대신 $x-2$를 대입하면 $\boldsymbol{y=\frac{1}{x-2}}$



2. $y=\frac{1}{x-2}$에서 y 대신 $y-1$을 대입하면

$y-1=\frac{1}{x-2}$이므로 $\boldsymbol{y=\frac{1}{x-2}+1}$



본문 해설

❶ 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프를 직접 그리는 것은 복잡하므로 이미 모양을 알고 있는 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 평행이동하여 그릴 수 있다. 이때 $y=\frac{k}{x}$의 점근선 $x=0$, $y=0$도 평행이동되므로 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 점근선은 $x=p$, $y=q$가 된다.

한편 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에 대하여 대칭이므로 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 대칭점도 평행이동되어 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프는 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이 된다. 즉, $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프는 두 점근선의 교점에 대하여 대칭이다.

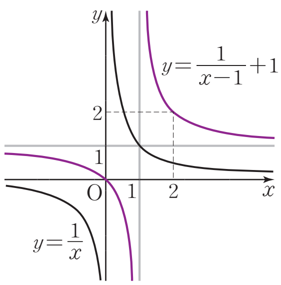
지/도/자/료

유리함수의 그래프를 그릴 때에는 좌표평면 위에 점근선을 먼저 나타낸 후, 그래프 위의 점은 원점에서 멀어짐에 따라 점근선에 한없이 가까워지게 그리면 오류 없이 그릴 수 있음을 이해시킨다.

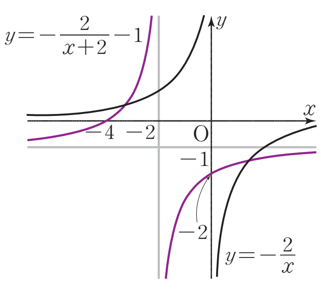
9

목표 | 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $y=\dfrac{1}{x-1}+1$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음과 같고, 점근선의 방정식은 $\boldsymbol{x=1}$, $\boldsymbol{y=1}$이다.



(2) $y=-\dfrac{2}{x+2}-1$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음과 같고, 점근선의 방정식은 $\boldsymbol{x=-2}$, $\boldsymbol{y=-1}$이다.



교과서 100 쪽

문제 9 다음 유리함수의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=\dfrac{1}{x-1}+1$ (2) $y=-\dfrac{2}{x+2}-1$

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 어떻게 그리는가?

탐구 활동 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프를 평행이동하여 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq0$, $ad-bc\neq0)$의 그래프를 그릴 수 있는지 알아보려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

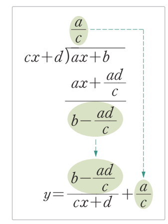
1. 유리함수 $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$을 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ (p, q는 상수)의 꼴로 나타내어 보자.

2. 유리함수 $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 어떻게 평행이동한 것인가?

1 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq0,\ ad-bc\neq0)$의 그래프는 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ $(k\neq0)$의 꼴로 변형한 다음 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 평행이동하여 그릴 수 있다.

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$를 변형하면

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}+\frac{a}{c}$$
$$=\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}=\frac{k}{x-p}+q$$
$$\left(k=\frac{bc-ad}{c^2},\ p=-\frac{d}{c},\ q=\frac{a}{c}\right)$$



가 된다. 따라서 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 꼴로 변형하여 봄으로써 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그리는 방법을 알아보도록 하기 위한 것이다.

1. $y=\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{x+1}+2}$

2. 1에서 $y=\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+2$이므로

$y=\dfrac{2x+3}{x+1}$의 그래프는 $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{x}}$의 그래프를 $\boldsymbol{x}$축의 방향으로 $\boldsymbol{-1}$만큼, $\boldsymbol{y}$축의 방향으로 **2**만큼 평행이동한 것이다.

본문 해설

1 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$에서

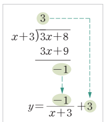
(i) $c=0$이면 $y=\dfrac{ax+b}{d}=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$이므로 상수함수 또는 일차함수이다.

(ii) $ad-bc=0$이면

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)-\frac{ad-bc}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}$$

이므로 상수함수이다.

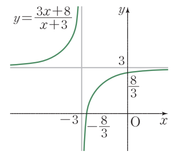
예제 03 유리함수 $y=\frac{3x+8}{x+3}$ 의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하여라.



풀이 $y=\frac{3x+8}{x+3}=\frac{3(x+3)-1}{x+3}=-\frac{1}{x+3}+3$이므로

유리함수 $y=\frac{3x+8}{x+3}$ 의 그래프는 함수 $y=-\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=3$이다.



문제 10 다음 유리함수의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=\frac{-3x-4}{x+1}$　　(2) $y=\frac{x+1}{2x+1}$

문제 11 유리함수 $y=\frac{ax+1}{x+b}$ 의 그래프의 점근선이 직선 $x=1$, $y=2$가 되도록 상수 a, b의 값을 구하여라.

실생활

문제 12 농도가 20 %인 설탕물 100 g이 있다. 이 설탕물에 물 $9x$ g과 설탕 x g을 넣은 후의 농도를 y %라고 할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하여라.

(설탕물의 농도) $=\frac{(\text{설탕의 양})}{(\text{설탕물의 양})}\times 100(\%)$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

1초당 1 g의 모래가 아래로 떨어지는 모래시계가 있다. 처음 모래의 양이 300 g일 때, 함수 $f(t)=\frac{(t\text{초 후 위에 남은 모래의 양})}{(t\text{초 후 아래로 떨어진 모래의 양})}$ 의 그래프를 그려라. (단, $0<t\leq 300$)

10

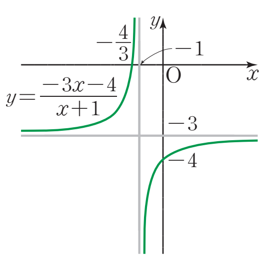
목표| 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=\frac{-3x-4}{x+1}$

$=-\frac{1}{x+1}-3$

이므로 점근선의 방정식은

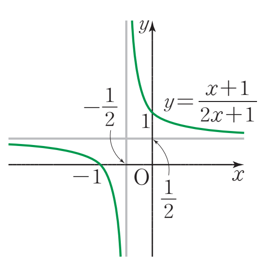
$\boldsymbol{x=-1,\ y=-3}$



(2) $y=\frac{x+1}{2x+1}=\frac{\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}$

이므로 점근선의 방정식은

$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}}$



11

목표| 유리함수의 점근선이 주어졌을 때, 유리함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=\frac{ax+1}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+1}{x+b}$

$=\frac{-ab+1}{x+b}+a$

따라서 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=a$이므로　$\boldsymbol{a=2,\ b=-1}$

12

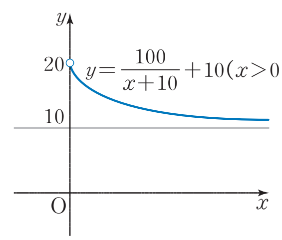
목표| 유리함수를 이해하고, 이를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 농도가 20 %인 설탕물 100 g에 들어 있는 설탕의 양은　$100\times\frac{20}{100}=20(\text{g})$

물 $9x$ g과 설탕 x g을 넣은 후의 농도는

$y=\frac{x+20}{10x+100}\times 100=\frac{100}{x+10}+10(\%)$

이때 $x>0$이므로 그래프는 다음 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $\boldsymbol{y=10}$이다.



단원 과제

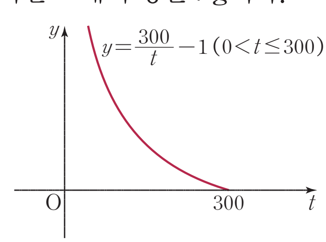
목표| 실생활에서 사용되는 모래시계의 원리를 이용하여 유리함수의 식을 세우고, 그 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| 1초에 1 g의 모래가 아래로 떨어지므로 모래가 떨어지기 시작하여 t초 후에 위에 남아 있는 모래의 양은 $(300-t)$g이고, 아래로 떨어진 모래의 양은 t g이다.

$f(t)=\frac{300-t}{t}=\frac{300}{t}-1$

$(0<t\leq 300)$

따라서 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



02 무리함수

소단원 지도 목표

① 무리식의 뜻을 알고, 간단한 무리식의 계산을 할 수 있게 한다.
② 무리함수의 뜻을 알게 한다.
③ 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하게 한다.
④ 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하게 한다.
⑤ 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 무리함수 $y=\sqrt{x}$의 역함수가 $y=x^2(x\geq0)$임을 이해시키고, $y=\sqrt{x}$의 그래프는 포물선 $y=x^2$의 그래프를 이용해서 그릴 수 있다는 것을 확인시킨다.

2. 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 꼴은 간단한 것만 다루며, 무리함수의 정의역과 치역에 유의하도록 한다.

교과서 102 쪽

02

무리함수

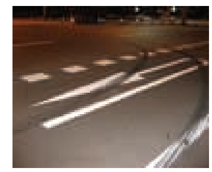
● 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

무리식이란 무엇인가?

생각 열기

스키드 마크(Skid Mark)

스키드 마크란 자동차의 브레이크가 작동하여 바퀴가 구르지 않고 미끄러질 때 도로 면에 나타나는 타이어 자국을 말한다. 스키드 마크의 길이를 알면 도로의 종류와 상태에 따른 마찰 계수를 적용하여 제동하기 직전의 자동차의 속력을 추정할 수 있다. 따라서 스키드 마크는 교통사고의 원인을 밝히는 중요한 단서가 된다.



탐구 활동

어느 도로에서 스키드 마크의 길이를 S m, 마찰 계수를 F, 제동 직전의 승용차의 속력을 V km/h라고 하면

$$V=\sqrt{254\times S\times F}$$

의 관계식이 성립한다고 하자. 아스팔트 포장도로의 상태에 따른 승용차의 마찰 계수가 오른쪽 표와 같을 때, 다음 물음에 답하여 보자.

도로의 상태	마찰 계수
건조할 때	0.8
비가 내릴 때	0.6
눈이 내리거나 얼었을 때	0.3

1. 비가 내리는 날과 눈이 내리는 날 각각 길이가 S m인 스키드 마크가 하나씩 생겼을 때, 제동 직전의 두 승용차의 속력을 추정하여 보자.

2. 눈이 내리는 날 길이가 10 m, 40 m인 스키드 마크 두 개가 생겼을 때, 제동 직전의 두 승용차의 속력을 추정하여 보자. (단, 반올림하여 소수 첫째 자리까지 구한다.)

1 다음과 같이 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식으로, 유리식으로 나타낼 수 없는 식을 무리식이라고 한다.

$$\sqrt{3x},\quad \sqrt{x^2-1},\quad 2+\sqrt{x},\quad \frac{1}{\sqrt{4-x}}$$

무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안의 식의 값이 0 이상이어야 하므로 무리식을 계산할 때에는

$$(\text{근호 안의 식의 값})\geq0$$

이 되는 문자의 값의 범위에서만 생각한다.

무리식에 분모가 있는 경우에는 분모가 0이 되도록 하는 문자의 값을 제외하고 생각한다.

새로 나온 용어와 기호

• 무리식(無理式, irrational expression)
• 무리함수(無理函數, irrational function)

생각 열기 참/고/자/료

스키드 마크의 형태에 따라 교통사고의 원인은 서로 다르게 추측할 수 있다. 중간이 길게 끊긴 형태의 스키드 마크는 자동차의 바퀴가 회전을 멈춘 상태로 노면에 미끄러지는 과정에서 브레이크를 중간에 풀었다가 다시 제동할 때 발생하는 타이어 자국으로 주로 주행하던 차량이 보행자 혹은 자전거와 충돌할 경우 흔히 발생한다. 한편 곡선 형태의 스키드 마크는 위험 상황이 돌출하여 피하려고 핸들을 과조작하여 제동하게 되면 발생하거나 자갈, 눈 등의 원인으로 양쪽 바퀴에 닿는 부분의 마찰력의 차이 때문에 발생한다. 스키드 마크를 이용한 교통사고에 대한 보다 자세한 정보는 도로교통공단 홈페이지(http://www.koroad.or.kr)에서 확인할 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 자동차의 제동 직전의 속력을 스키드 마크의 길이에 대한 무리식으로 나타내어 봄으로써 무리식의 뜻을 이해하도록 하기 위한 것이다.

1. 비가 내리는 날 제동 직전의 승용차의 속력은 $\sqrt{254\times S\times0.6}$ **km/h**이고, 눈이 내리는 날 제동 직전의 승용차의 속력은 $\sqrt{254\times S\times0.3}$ **km/h**이다.

2. 스키드 마크의 길이가 10 m일 때 제동 직전의 승용차의 속력은 $\sqrt{254\times10\times0.3}$이므로 **27.6 km/h**이고, 스키드 마크의 길이가 40 m일 때 속력은 $\sqrt{254\times40\times0.3}$이므로 **55.2 km/h**이다.

교과서 103 쪽

보기 (1) 무리식 $\sqrt{1-x}$는 $1-x \geq 0$, 즉 $x \leq 1$인 범위에서만 생각한다.
(2) 무리식 $x+\sqrt{x+2}$는 $x+2 \geq 0$, 즉 $x \geq -2$인 범위에서만 생각한다.

문제 1 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x값의 범위를 구하여라.

(1) $\sqrt{2x-1}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$　　(3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+1}$

무리식의 계산은 무리수의 계산과 같은 방법으로 한다.

특히 분모에 무리식이 있는 경우, 분자와 분모에 적당한 식을 곱하여 분모를 유리화한다.

예제 01 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

풀이 (1) $(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})=(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{x})^2$

$=(x+3)-x=3$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2}=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$

답 (1) 3　(2) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$

문제 2 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\dfrac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} \times \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

2

목표| 무리식의 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} \times \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{2x\sqrt{x^2}}{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x})^2}$

$=\dfrac{2x^2}{x+2-x}=\boldsymbol{x^2}$

(2) $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$

$=\dfrac{(\sqrt{x+1})^2-2\sqrt{x+1}\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}$

$=\dfrac{x+1-2\sqrt{x^2+x}+x}{x+1-x}$

$=\boldsymbol{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}$

본문 해설

❶ 근호 안의 다항식을 완전제곱식으로 나타낼 수 있는 경우는 무리식이 아니다.
예를 들어 $\sqrt{x^2+2x+1}$에서 x^2+2x+1을 완전제곱식으로 나타내면 $\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$이므로 이 식은 무리식이 아니다.

1

목표| 무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안의 식의 값이 0 이상이어야 함을 이해하게 한다.

풀이| (1) $2x-1 \geq 0$이어야 하므로 $\boldsymbol{x \geq \dfrac{1}{2}}$이다.

(2) $3-x>0$이어야 하므로 $\boldsymbol{x<3}$이다.

(3) $x-2 \geq 0$, $2x+1 \geq 0$이어야 하므로

$x \geq 2$, $x \geq -\dfrac{1}{2}$에서 $\boldsymbol{x \geq 2}$이다.

지/도/자/료 무리식의 계산

무리수의 개념과 제곱근의 성질, 분모를 유리화하는 방법 등을 이해하고 있지 못하고 있는 경우에는 제곱근의 정의와 성질, 분모를 유리화하는 방법을 구체적인 예를 통하여 이해하게 한 후, 무리식의 계산은 무리수의 계산과 유사함을 이용하여 계산할 수 있도록 지도한다.

(1) 제곱근의 정의와 성질

① 제곱해서 2가 되는 수를 2의 제곱근이라 하고, 이를 $\pm\sqrt{2}$로 나타낸다.

② $\sqrt{(-3)^2}=3$

(2) 분모에 근호가 있는 수의 분모의 유리화

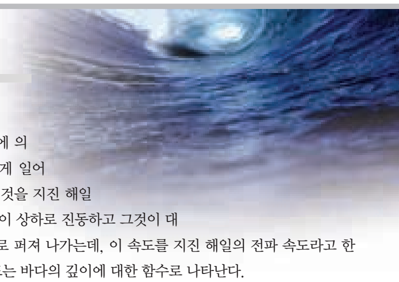
① $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$

② $\dfrac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{5}-2\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{5-\sqrt{10}-2\sqrt{10}+4}{3}=\dfrac{9-3\sqrt{10}}{3}$

$=3-\sqrt{10}$

교과서 104 쪽



무리함수란 무엇인가?

생각 열기 **지진 해일**

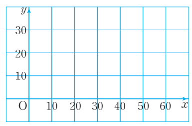
지진으로 인한 지각 변동에 의하여 갑자기 바닷물이 크게 일어서 육지로 넘쳐 들어오는 것을 지진 해일이라고 한다. 이때 바닷물이 상하로 진동하고 그것이 대규모의 파동이 되어 외부로 퍼져 나가는데, 이 속도를 지진 해일의 전파 속도라고 한다. 지진 해일의 전파 속도는 바다의 깊이에 대한 함수로 나타난다.

탐구 활동 **바다의 깊이를 x m, 지진 해일의 전파 속도를 y m/s라고 하면 $y=\sqrt{9.8x}$의 관계식이 성립한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 다음 표를 완성하여 보자. (단, 반올림하여 소수 첫째 자리까지 구한다.)

x	0	10	20	30	40	50	60
y	0			17.1			24.2

2. **1**의 표에서 구한 순서쌍 $(x,\ y)$를 오른쪽 좌표평면 위에 점으로 나타낸 후 곡선으로 매끄럽게 이어 보자.



함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 **무리함수**라고 한다.

무리함수에서 정의역이 주어지지 않은 경우에는 근호 안의 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

분모에 무리식을 포함하는 무리함수의 경우, 분모가 0이 되도록 하는 원소는 정의역에서 제외된다.

보기 함수 $y=\sqrt{x-2}$, $y=\sqrt{-2x+4}$는 무리함수이다. 이때 무리함수 $y=\sqrt{x-2}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 2\}$이고, 무리함수 $y=\sqrt{-2x+4}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\le 2\}$이다.

문제 3 다음 중에서 무리함수인 것을 찾고, 그 함수의 정의역을 구하여라.

(1) $y=\sqrt{2}x+\sqrt{3}$ (2) $y=\sqrt{2x+3}$

(3) $y=\dfrac{\sqrt{2}}{x}$ (4) $y=\sqrt{-\dfrac{1}{2}x+2}$

생각 열기 참/고/자/료

해일에는 바닷속 지진으로 인하여 일어나는 지진 해일, 태풍이나 강한 폭풍으로 인하여 연안에서 높은 파도를 일으키는 폭풍 해일, 천문과 기상 현상의 복합적인 영향으로 일어나는 고조 해일이 있다. 특히 지진 해일은 영어로는 Tsunami(쓰나미)라고 하며, 갑자기 해안을 덮치는 큰 파도를 의미하는 일본어에서 유래되었다. 이는 1896년 6월 15일 일본 산리꾸 연안에서 발생한 지진 해일로 22,000여명이 사망한 사실이 여러 나라에 전해지면서 세계 공통어로 사용하게 되었다.
기상청 홈페이지(http://www.kma.go.kr)를 방문하면 지진과 해일에 대한 다양한 정보를 얻을 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 지진 해일의 전파 속도가 바다의 깊이에 대한 무리식으로 표현됨을 이용하여 무리함수의 그래프를 알아보도록 하기 위한 것이다.

1. $y=\sqrt{9.8x}$이므로

$x=10$일 때 $y=\sqrt{98}=9.89\cdots$ ⇨ 9.9

$x=20$일 때 $y=\sqrt{196}=14$

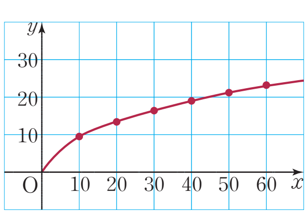
$x=40$일 때 $y=\sqrt{392}=19.79\cdots$ ⇨ 19.8

$x=50$일 때 $y=\sqrt{490}=22.13\cdots$ ⇨ 22.1

따라서 표를 완성하면 다음과 같다.

x	0	10	20	30	40	50	60
y	0	**9.9**	**14**	17.1	**19.8**	**22.1**	24.2

2.



참고| 이론적으로는 바다의 깊이 x m와 해일의 전파 속도 y m/s 사이에 $y=\sqrt{gx}$의 관계식이 성립한다. 이때 g는 중력가속도로서 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$라고 하면 $y=\sqrt{9.8x}$이고, $\sqrt{9.8}$은 약 3.13이므로 $y=3.13\sqrt{x}$로 나타낼 수 있다.

3

목표| 무리함수의 뜻을 알고, 그 함수의 정의역을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{2}x+\sqrt{3}$은 x에 대한 다항식이므로 $y=\sqrt{2}x+\sqrt{3}$은 **무리함수가 아니다.**

(2) $\sqrt{2x+3}$은 x에 대한 무리식이므로 $y=\sqrt{2x+3}$은 **무리함수이고,** $2x+3\ge 0$에서 $x\ge -\dfrac{3}{2}$이므로 이 함수의 정의역은 $\left\{\boldsymbol{x\,|\,x\ge -\dfrac{3}{2}}\right\}$이다.

(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{x}$는 x에 대한 유리식이므로 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{x}$는 **무리함수가 아니다.**

(4) $\sqrt{-\dfrac{1}{2}x+2}$는 x에 대한 무리식이므로 $y=\sqrt{-\dfrac{1}{2}x+2}$는 **무리함수이고,** $-\dfrac{1}{2}x+2\ge 0$에서 $x\le 4$이므로 이 함수의 정의역은 $\{\boldsymbol{x\,|\,x\le 4}\}$이다.

교과서 105 쪽

무리함수 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 어떻게 그리는가?

무리함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프는 그 역함수를 이용하면 쉽게 그릴 수 있다.

함수 $y=\sqrt{x}$ 는 정의역 $\{x|x\ge0\}$에서 치역 $\{y|y\ge0\}$으로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

역함수를 구하기 위하여 $y=\sqrt{x}\ (x\ge0)$를 x에 대하여 정리하면

$$x=y^2\ (y\ge0)$$

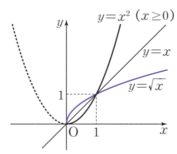
이다.

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 역함수

$$y=x^2\ (x\ge0)$$

을 얻는다.

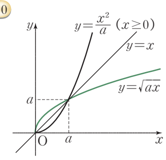
그런데 함수 $y=\sqrt{x}$와 그 역함수 $y=x^2\ (x\ge0)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=x^2$ $(x\ge0)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 얻을 수 있다.



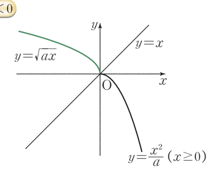
> $y=f(x)$의 역함수 구하기
> ① 일대일 대응인지 확인한다.
> ② $y=f(x)$를 x에 대하여 정리하여 $x=f^{-1}(y)$의 꼴로 나타낸다.
> ③ x와 y를 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$의 꼴로 나타낸다.

① 일반적으로 함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\ne0)$는 이차함수 $y=\frac{x^2}{a}\ (a\ne0,\ x\ge0)$의 역함수이므로 두 함수의 그래프가 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\ne0)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

$a>0$

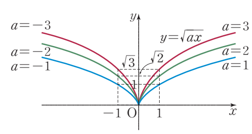


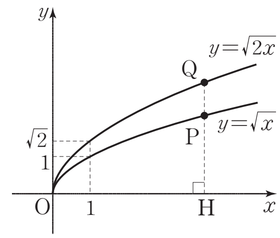
$a<0$



> $y=\sqrt{ax}\ (a\ne0)$에서 정의역은
> $a>0$일 때 $\{x|x\ge0\}$
> $a<0$일 때 $\{x|x\le0\}$
> 이다.

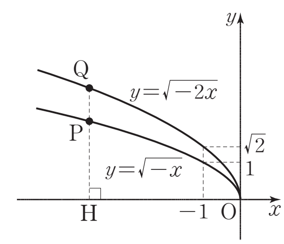
② 또 함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\ne0)$의 그래프에서 $a=\pm1,\ \pm2,\ \pm3$일 때의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $|a|$의 값이 커질수록 그래프가 x축에서 멀어짐을 알 수 있다.





일반적으로 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 $\sqrt{a}$배 하여 그린 곡선이다.

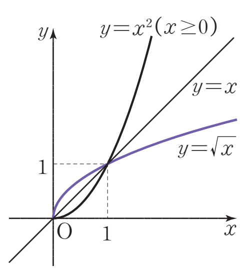
한편 $y=\sqrt{-2x}=\sqrt{2}\sqrt{-x}$이므로 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 y축의 방향으로 $\sqrt{2}$배한 곡선이다. 따라서 다음 그림에서 $\overline{\mathrm{HP}}:\overline{\mathrm{HQ}}=1:\sqrt{2}$가 성립한다.

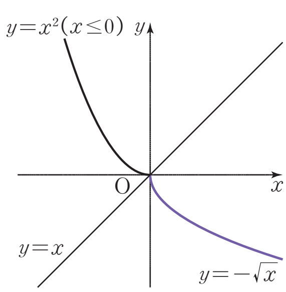


일반적으로 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 y축의 방향으로 $\sqrt{-a}$배하여 그린 곡선이다.

본문 해설

① 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프는 $x=y^2$, 즉 $y=\pm\sqrt{x}$의 그래프이다. 이때 $y=x^2\ (x\ge0)$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$로 대칭이 동되며 $y=x^2\ (x\le0)$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$로 대칭이 동된다.





② $y=\sqrt{2x}=\sqrt{2}\sqrt{x}$이므로 $y=\sqrt{2x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 $\sqrt{2}$배한 곡선이다. 따라서 다음 그림에서 $\overline{\mathrm{HP}}:\overline{\mathrm{HQ}}=1:\sqrt{2}$가 성립한다.

지/도/자/료 무리식으로 나타나는 생활 속의 함수

1. 사람의 최고 보행 속도 y km/h는 그 사람의 다리의 길이 x cm에 대하여 다음과 같은 공식에 의해 결정된다.

$$y=\sqrt{2.73x}\ (\mathrm{km/h})$$

2. 사이클 경기에서 커브를 돌 때, 선수들은 넘어지지 않기 위해 경기장 안쪽으로 자전거와 몸을 구부린다. 사이클 트랙의 경사 $\theta°$, 트랙의 반지름 r m, 사이클의 속도 v m/s 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$v=\sqrt{0.002983r\theta}$$

3. 1805년 영국의 기상학자 보버트(Beaufort, F.)에 의해 고안된 풍력 계급 B은 지상 10 m에서 측정된 바람의 세기 x mile/h에 대하여 다음과 같은 공식에 의해 결정된다.

$$B=1.9\sqrt{x+8}-5.4$$

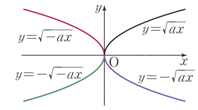
교과서 106 쪽

$y=-\sqrt{-ax}\,(a\neq0)$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\,(a\neq0)$의 그래프와 원점에 대하여 대칭이다.

❶ 한편 함수 $y=-\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이므로 $a>0$일 때

$$y=\sqrt{ax},\ y=\sqrt{-ax},$$
$$y=-\sqrt{ax},\ y=-\sqrt{-ax}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

무리함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프

(1) 정의역은 $a>0$일 때 $\{x\,|\,x\geq0\}$, $a<0$일 때 $\{x\,|\,x\leq0\}$이고, 치역은 $\{y\,|\,y\geq0\}$이다.

(2) $|a|$의 값이 커질수록 그래프가 x축에서 멀어진다.

예제 02 역함수의 그래프를 이용하여 무리함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 그려라.

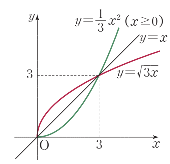
풀이 $y=\sqrt{3x}$를 x에 대하여 정리하면

$$x=\frac{1}{3}y^2\ (y\geq0)$$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$$y=\frac{1}{3}x^2\ (x\geq0)$$

함수 $y=\sqrt{3x}$와 그 역함수 $y=\frac{1}{3}x^2\ (x\geq0)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



문제 4 다음 무리함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하여라.

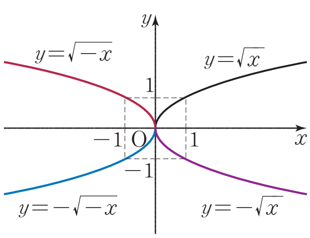
(1) $y=\sqrt{2x}$　　(2) $y=\sqrt{-2x}$

(3) $y=-\sqrt{3x}$　　(4) $y=-\sqrt{-3x}$

본문 해설

❶ $y=f(x)$의 그래프와 $y=-f(x)$의 그래프는 x축에 대하여 서로 대칭이므로 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 그릴 수 있다.

예를 들어 제1사분면의 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 제4사분면의 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 얻을 수 있고, 제2사분면의 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 제3사분면의 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 얻을 수 있으므로 네 그래프를 한 좌표평면에 그리면 다음과 같다.

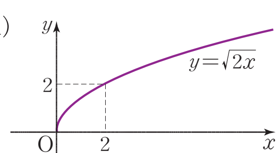


4

목표| 무리함수 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구할 수 있게 한다.

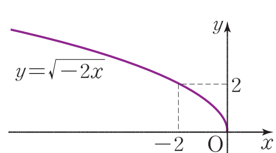
풀이

(1)



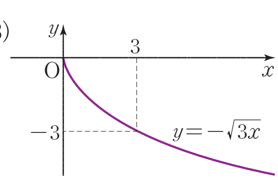
정의역: $\{x\,|\,x\geq0\}$
치역: $\{y\,|\,y\geq0\}$

(2)



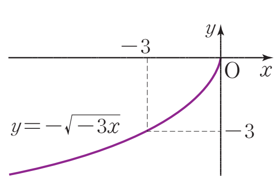
정의역: $\{x\,|\,x\leq0\}$
치역: $\{y\,|\,y\geq0\}$

(3)



정의역: $\{x\,|\,x\geq0\}$
치역: $\{y\,|\,y\leq0\}$

(4)



정의역: $\{x\,|\,x\leq0\}$
치역: $\{y\,|\,y\leq0\}$

생각 열기 참/고/자/료

피사의 사탑은 이탈리아 토스카나 주 피사 시의 피사 대성당에 있는 종탑으로 최대 높이는 58.36 m이고, 무게는 1만 4453톤으로 추정되며 294개의 나선형 계산이 꼭대기까지 연결되어 있다. 피사의 사탑이 기울어진 이유는 지반의 불균형 때문이라고 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 지상의 일정한 높이에서 자유 낙하시킨 물체의 높이와 시간 사이의 관계식에서 무리함수의 관계식을 유도하고 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 꼴의 그래프를 평행이동을 이용하여 이해하도록 하기 위한 것이다.

1. $h=-5t^2+50$에서 $t^2=\dfrac{50-h}{5}=10-\dfrac{1}{5}h$

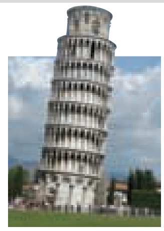
$t\geq0$이므로 $t=\sqrt{10-\frac{1}{5}h}$

2. $t=\sqrt{-\frac{1}{5}(h-50)}$

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 어떻게 그리는가?

생각 열기 피사의 사탑

이탈리아의 피사에 세워진 피사의 사탑은 8층으로 설계되어 1173년에 건축을 시작하였지만 3층이 완성되기 전에 탑이 기울기 시작하였다. 많은 노력에도 불구하고 탑을 바로 세우지 못한 채 공사가 지연되다가 14세기가 되어서야 탑이 기울어진 채로 완성되었다. 이 피사의 사탑에서 갈릴레이(Galilei, G. : 1564~1642)가 자유 낙하 실험을 했다는 일화가 유명하다.



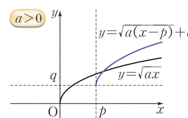
탐구 활동 어느 탑의 50 m 높이에서 물체를 자유 낙하시킬 때, t초 후의 높이를 h m라고 하면 $h=-5t^2+50\ (t\ge0)$의 관계식이 성립한다고 하자. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 함수 $h=-5t^2+50\ (t\ge0)$을 t에 대하여 정리하여 보자.
2. 1에서 나타낸 식을 $t=\sqrt{a(h+b)}$ (a, b는 상수)의 꼴로 변형하여 보자.

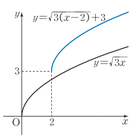
일반적으로 무리함수

$$y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$$

의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.



보기 무리함수 $y=\sqrt{3(x-2)}+3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\ge2\}$, 치역은 $\{y|y\ge3\}$이다.



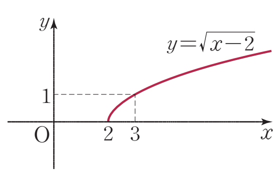
문제 5 다음 무리함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하여라.

(1) $y=\sqrt{x-2}$ (2) $y=\sqrt{-(x-1)}+2$
(3) $y=-\sqrt{2(x-1)}-2$ (4) $y=-\sqrt{-3(x-2)}+1$

5

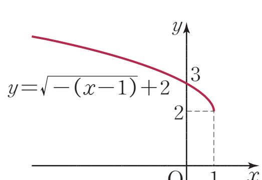
목표| 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=\sqrt{x-2}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



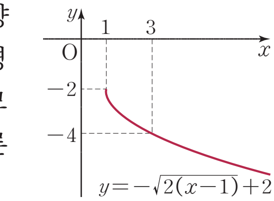
정의역: $\{x|x\ge2\}$, 치역: $\{y|y\ge0\}$

(2) $y=\sqrt{-(x-1)}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



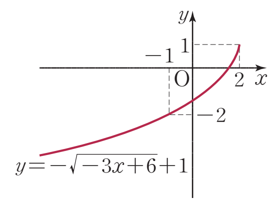
정의역: $\{x|x\le1\}$, 치역: $\{y|y\ge2\}$

(3) $y=-\sqrt{2(x-1)}-2$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



정의역: $\{x|x\ge1\}$, 치역: $\{y|y\le-2\}$

(4) $y=-\sqrt{-3(x-2)}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



정의역: $\{x|x\le2\}$, 치역: $\{y|y\ge1\}$

지/도/자/료 무리함수의 그래프의 오개념 지도 방법

1. 평행이동한 무리함수의 그래프를 그릴 때, 적당한 순서로 그리는 방법을 몰라 잘못된 형태로 그래프를 그리는 경우가 많다. 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)+q}$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그릴 수 있도록 지도한다.
   ① $(p,\ q)$를 좌표평면 위에 나타낸다.
   ② a의 부호를 확인하여 그래프를 그린다.
2. 평행이동 관계를 정확하게 이해하도록 한다. 예를 들어 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프가 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축으로 -4만큼 평행이동한 것으로 잘못 이해하는 경우가 있으므로 $y=\sqrt{2(x+2)}$의 꼴로 고쳐서 평행이동을 생각하도록 지도한다.
3. 무리함수의 그래프를 그릴 때, 이를테면 $y=\sqrt{x}$의 그래프에서 오른쪽 끝이 어떤 값에 근접하여 점근선이 존재하는 것처럼 그리는 경우가 있다. 그러나 $y=\sqrt{x}$는 이차함수의 경우와 같이 계속 증가하는 꼴의 그래프임을 강조하도록 한다.

교과서 108 쪽

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a\neq 0)$의 그래프는 $y=\sqrt{ax+b}+c$를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq 0)$의 꼴로 변형한 다음 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 평행이동하여 그릴 수 있다.

$y=\sqrt{ax+b}+c$를 변형하면

$$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left\{x-\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}}+c$$

가 된다. 따라서 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

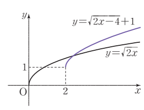
이상을 정리하면 다음과 같다.

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a\neq 0)$의 그래프

(1) 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

(2) 정의역은 $a>0$일 때 $\left\{x \middle| x\geq -\frac{b}{a}\right\}$, $a<0$일 때 $\left\{x \middle| x\leq -\frac{b}{a}\right\}$이고, 치역은 $\{y|y\geq c\}$이다.

보기 무리함수 $y=\sqrt{2x-4}+1=\sqrt{2(x-2)}+1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\geq 2\}$, 치역은 $\{y|y\geq 1\}$이다.



문제 6 다음 무리함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하여라.

(1) $y=\sqrt{2x+6}-1$　　(2) $y=\sqrt{-3x+5}+\frac{1}{2}$

(3) $y=-\sqrt{3x+9}-1$　　(4) $y=-\sqrt{-2x-4}+1$

● $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 평행이동한 것이다.

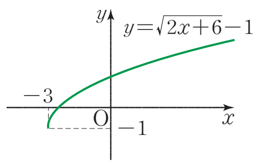
실생활 **문제 7** 바람이 불면 바람이 불지 않을 때보다 더 춥게 느껴지는데, 이렇게 실제로 느껴지는 온도를 체감 온도라고 한다. 기온을 t ℃, 풍속을 v m/s, 복사량을 I kW/m^2, 체감 온도를 T ℃라고 하면 $T=t-\sqrt{16v}+12I$의 관계식이 성립한다고 하자. 기온이 5 ℃이고 복사량이 $\frac{1}{2}$ kW/m^{2}일 때, 함수 $T=f(v)$의 그래프를 그려라. (단, $v>0$)

● 복사량 I kW/m^{2}는 단위 넓이당 1분 동안 받는 일사량을 칼로리의 값으로 나타낸 것이다.

6

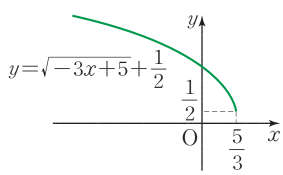
목표| 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=\sqrt{2x+6}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{2(x+3)}-1$이므로 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



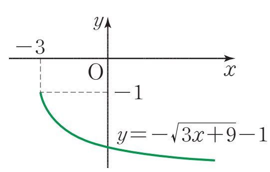
정의역: $\{x|x\geq -3\}$, 치역: $\{y|y\geq -1\}$

(2) $y=\sqrt{-3x+5}+\frac{1}{2}$의 그래프는 $y=\sqrt{-3\left(x-\frac{5}{3}\right)}+\frac{1}{2}$이므로 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{5}{3}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



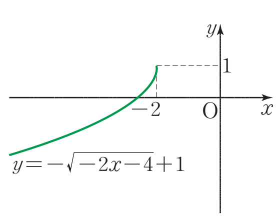
정의역: $\left\{x \middle| x\leq \frac{5}{3}\right\}$, 치역: $\left\{y \middle| y\geq \frac{1}{2}\right\}$

(3) $y=-\sqrt{3x+9}-1$의 그래프는 $y=-\sqrt{3(x+3)}-1$이므로 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



정의역: $\{x|x\geq -3\}$, 치역: $\{y|y\leq -1\}$

(4) $y=-\sqrt{-2x-4}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2(x+2)}+1$이므로 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



정의역: $\{x|x\leq -2\}$, 치역: $\{y|y\leq 1\}$

7

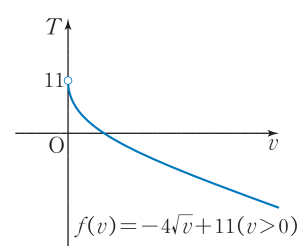
목표| 무리함수를 이해하고, 이를 실생활 소재에 적용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $t=5$, $I=\frac{1}{2}$이므로

$T=5-\sqrt{16v}+12\cdot\frac{1}{2}$

$=-4\sqrt{v}+11$ $(v>0)$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



참고| 체감 온도는 외부에 있는 사람이나 동물이 바람과 한기에 노출된 피부로부터 열을 빼앗길 때 느끼는 추운 정도를 나타내는 지수이다. 바람이 강해질수록 피부의 열 손실률은 높아지게 되며 결국 내부 체온이 떨어진다. 실제 우리나라의 기상청에서 사용하는 체감 온도는 다음과 같다.

체감 온도$=13.12+0.6215T-11.37V^{0.16}+0.3965V^{0.16}T$

(단, T는 온도(℃), V는 풍속(km/h))

중단원 기초

[해답 p.223]

수준별 학습

1 다음 유리식을 간단히 하여라.

(1) $\dfrac{25x^2y^2}{20xy^4}$　　(2) $\dfrac{x^2-5x+4}{(x-1)(x+1)}$

01 유리함수 유리식

2 유리함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 다음과 같이 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 구하여라.

(1) x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 5만큼

(2) x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -2만큼

01 유리함수 유리함수의 그래프

3 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x값의 범위를 구하여라.

(1) $\sqrt{x+1}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$　　(3) $\sqrt{4-x}+3\sqrt{x-2}$

02 무리함수 무리식

4 무리함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 다음과 같이 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 구하여라.

(1) x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼

(2) x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼

02 무리함수 무리함수의 그래프

5 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=\dfrac{1}{x-3}$　　(2) $y=\dfrac{1}{x-3}+1$

(3) $y=\sqrt{x+2}$　　(4) $y=\sqrt{x+2}-1$

01 유리함수 02 무리함수 유리함수와 무리함수의 그래프

중/단/원 기초

1

목표| 유리식의 성질을 이용하여 유리식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{25x^2y^2}{20xy^4}=\dfrac{25\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}}{20\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{y}\cdot y\cdot y}=\boldsymbol{\dfrac{5x}{4y^2}}$

(2) $\dfrac{x^2-5x+4}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\boldsymbol{\dfrac{x-4}{x+1}}$

2

목표| 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y-5=\dfrac{3}{x-3}$이므로 $\boldsymbol{y=\dfrac{3}{x-3}+5}$

(2) $y+2=\dfrac{3}{x+4}$이므로 $\boldsymbol{y=\dfrac{3}{x+4}-2}$

3

목표| 무리식의 값이 실수가 되기 위한 x값의 범위를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x+1\geq0$이어야 하므로 $\boldsymbol{x\geq-1}$이다.

(2) $2-x>0$이어야 하므로 $\boldsymbol{x<2}$이다.

(3) $4-x\geq0$, $x-2\geq0$이어야 하므로
$x\leq4$, $x\geq2$에서 $\boldsymbol{2\leq x\leq4}$이다.

4

목표| 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 구할 수 있게 한다.

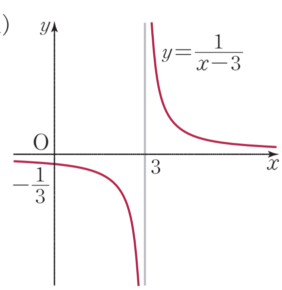
풀이| (1) $y+2=\sqrt{2(x-1)}$이므로
$\boldsymbol{y=\sqrt{2(x-1)}-2}$

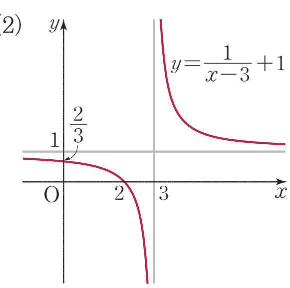
(2) $y-2=\sqrt{2(x+1)}$이므로
$\boldsymbol{y=\sqrt{2(x+1)}+2}$

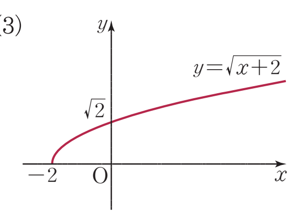
5

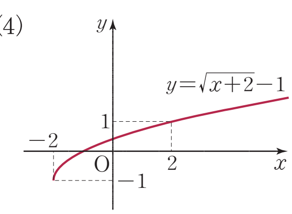
목표| 간단한 유리함수와 무리함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이|

(1)


(2)


(3)


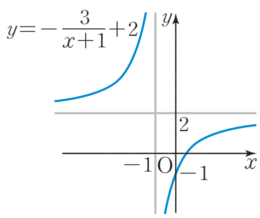
(4)


중/단/원 기본

1

목표| 유리함수와 무리함수의 그래프를 그리고, 정의역, 치역, 점근선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1)

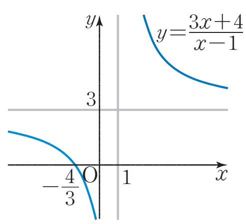


정의역: $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\neq-\mathbf{1}$**인 실수**$\}$

치역: $\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}\neq\mathbf{2}$**인 실수**$\}$

점근선: $\boldsymbol{x}=-\mathbf{1},\ \boldsymbol{y}=\mathbf{2}$

(2)

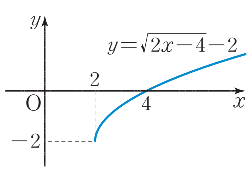


정의역: $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\neq\mathbf{1}$**인 실수**$\}$

치역: $\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}\neq\mathbf{3}$**인 실수**$\}$

점근선: $\boldsymbol{x}=\mathbf{1},\ \boldsymbol{y}=\mathbf{3}$

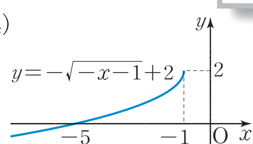
(3)



정의역: $\{\boldsymbol{x}|\mathbf{2}\geq\mathbf{0}\}$

치역: $\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}\geq-\mathbf{2}\}$

(4)



정의역: $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\leq-\mathbf{1}\}$

치역: $\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}\leq\mathbf{2}\}$

2

목표| 점근선을 이용하여 유리함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=\dfrac{ax+1}{x+b}=\dfrac{-ab+1}{x+b}+a$에서 이 함수의 점근선은 $x=-b,\ y=a$이므로 $\boldsymbol{a=3,\ b=-2}$

3

목표| 그래프를 이용하여 무리함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=\sqrt{ax+b}=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}$이므로 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a<0,\ -\dfrac{b}{a}>0$에서 $\boldsymbol{a<0,\ b>0}$이다.

교과서 110 쪽

중단원 기본

[해답 p.224]

수준별 학습

1 다음 함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하여라. 또 유리함수인 것은 점근선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=-\dfrac{3}{x+1}+2$ (2) $y=\dfrac{3x+4}{x-1}$

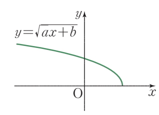
(3) $y=\sqrt{2x-4}-2$ (4) $y=-\sqrt{-x-1}+2$

01 유리함수 02 무리함수 유리함수와 무리함수의 그래프

2 유리함수 $y=\dfrac{ax+1}{x+b}$의 점근선이 직선 $x=2,\ y=3$일 때, 두 상수 $a,\ b$의 값을 구하여라.

01 유리함수 유리함수의 그래프

3 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 두 상수 $a,\ b$의 부호를 정하여라.



02 무리함수 무리함수의 그래프

4 두 함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1},\ g(x)=\sqrt{5x-1}$에 대하여 $(g\circ f^{-1})(3)$의 값을 구하여라.

01 유리함수 02 무리함수 유리함수와 무리함수

5 $1\leq x\leq3$일 때, 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=\dfrac{2}{x+1}$ (2) $y=-\dfrac{2}{x+2}+1$

(3) $y=\sqrt{2x-1}-2$ (4) $y=-\sqrt{-x+4}+2$

01 유리함수 02 무리함수 유리함수와 무리함수의 그래프

4

목표| 합성함수와 역함수의 정의를 이용하여 유리함수와 무리함수의 합성함수의 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=3$에서 $x=2$이므로 $f^{-1}(3)=2$

따라서 $(g\circ f^{-1})(3)=g(f^{-1}(3))=g(2)=\mathbf{3}$

5

목표| 제한된 범위에서 유리함수와 무리함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 최댓값은 $x=1$일 때 $\mathbf{1}$

최솟값은 $x=3$일 때 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) 최댓값은 $x=3$일 때 $\boldsymbol{\frac{3}{5}}$, 최솟값은 $x=1$일 때 $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

(3) 최댓값은 $x=3$일 때 $\boldsymbol{\sqrt{5}-2}$

최솟값은 $x=1$일 때 $\mathbf{-1}$

(4) 최댓값은 $x=3$일 때 $\mathbf{1}$

최솟값은 $x=1$일 때 $\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$

중단원 실력

[해답 p.224]

수준별 학습

1 유리함수 $y=\frac{ax-1}{x+b}$의 그래프가 두 직선 $y=x-2$와 $y=-x+3$에 대하여 모두 대칭일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

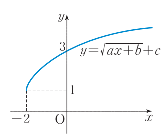
01 유리함수
유리함수의 그래프

2 유리함수 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq0,\ ad-bc\neq0)$에 대하여 다음 세 조건 p, q, r가 서로 필요충분조건임을 설명하여라.

01 유리함수

p : $f=f^{-1}$ (단, f^{-1}는 f의 역함수이다.)
q : $a=-d$
r : '두 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있다.'

3 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 세 상수 a, b, c의 값을 각각 구하여라.



02 무리함수
무리함수의 그래프

4 무리함수 $f(x)=\sqrt{6x-9}$의 역함수를 $y=f^{-1}(x)$라고 할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 구하여라.

02 무리함수
무리함수의 그래프

5 두 점 A(2, 3), B(3, 2)에 대하여 무리함수 $y=\sqrt{m(x+1)}$ $(m>0)$의 그래프가 선분 AB와 만날 때, 실수 m값의 범위를 구하여라.

02 무리함수
무리함수의 그래프

중/단/원 실력

1

목표| 두 직선에 대칭인 성질을 이용하여 유리함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=\frac{ax-1}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab-1}{x+b}=\frac{-ab-1}{x+b}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=a$

점 $(-b,\ a)$가 두 직선 $y=x-2$와 $y=-x+3$의 교점이므로 $x-2=-x+3$에서 $x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{1}{2}$

따라서 $\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{b=-\frac{5}{2}}$이다.

2

목표| 유리함수에 대한 주어진 조건이 필요충분조건임을 설명할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$의 역함수는 $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$

$f=f^{-1} \Longleftrightarrow a=-d$이므로 $p \Longleftrightarrow q$ …… ①

$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$의 점근선은 $x=-\frac{d}{c}$, $y=\frac{a}{c}$

이므로 두 점근선의 교점의 좌표는

$\left(-\frac{d}{c},\ \frac{a}{c}\right)$이다.

따라서 두 점근선이 직선 $y=x$ 위에 있을 필요충분조건은 $\frac{a}{c}=-\frac{d}{c}$, 즉 $a=-d$이므로

$r \Longleftrightarrow q$ …… ②

①, ②에 의하여 $p \Longleftrightarrow q \Longleftrightarrow r$

3

목표| 그래프를 이용하여 무리함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$이므로

$-\frac{b}{a}=-2$, $c=1$ …… ①

한편 y절편이 3이므로 $\sqrt{b}+c=3$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=2,\ b=4,\ c=1}$

4

목표| 역함수의 성질을 이용하여 무리함수와 그 역함수의 교점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\sqrt{6x-9}=x\ \left(x\geq\frac{3}{2}\right)$에서 $6x-9=x^2$, $x=3$

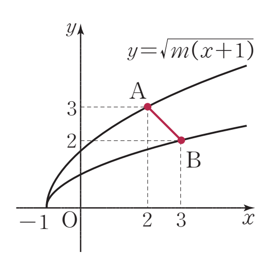
따라서 구하는 교점의 좌표는 $\mathbf{(3,\ 3)}$이다.

5

목표| 특정한 조건을 만족시키는 무리함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (i) $y=\sqrt{m(x+1)}$이
점 A(2, 3)을 지날 때
$3=\sqrt{m(2+1)}$에서 $m=3$

(ii) $y=\sqrt{m(x+1)}$이
점 B(3, 2)를 지날 때
$2=\sqrt{m(3+1)}$에서 $m=1$



(i), (ii)에 의하여 $y=\sqrt{m(x+1)}$의 그래프가 선분 AB와 만나는 실수 m값의 범위는 $\boldsymbol{1\leq m\leq3}$이다.

교과서 112 쪽

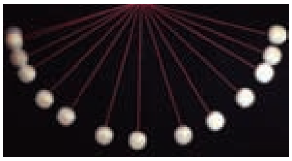
수행 과제

진자의 주기

실의 맨 끝에 작은 추를 달아서 흔들면 일정한 간격으로 추가 진동한다. 이와 같은 장치를 진자라고 하며 추가 한 번 왕복하는 데 걸리는 시간을 주기라고 한다. 진자의 길이를 l m, 중력 가속도를 g m/s^2, 진자의 주기를 T초라고 하면

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

의 관계가 성립한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



| 과 제 | 1 1 m 길이의 진자를 만들어 진자가 10회 왕복한 시간을 조사하여 보고, 이를 이용하여 주기 T의 값을 구하여 보자. 또 T의 값을 이용하여 g의 값을 반올림하여 소수 첫째 자리까지 구하여 보자.

| 과 제 | 2 오른쪽 그림과 같이 진자의 주기가 일정한 성질을 이용하여 만든 시계를 괘종시계라고 한다. 이 시계의 진자가 60회 왕복할 때마다 긴 시겟바늘이 한 칸씩 움직인다. 이 시계의 진자의 길이를 4배로 늘리면 긴 시겟바늘은 진자의 길이를 늘리기 전보다 몇 배 느리게 움직이는지 설명하여 보자. (단, 긴 시겟바늘이 한 칸 움직이는 시간은 1분이다.)

교과서 113 쪽

대단원 학습 내용 정리

1 함수

함수

함수 $f: X \longrightarrow Y$에 대하여 집합 X를 정의역, 집합 Y를 공역, 함숫값 전체의 집합 $\{f(x) \mid x \in X\}$를 치역이라고 한다.

여러 가지 함수

함수 $f: X \longrightarrow Y$에서

(1) 일대일함수: 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 함수

(2) 일대일 대응: 일대일함수 중에서 치역과 공역이 일치하는 함수

(3) 항등함수: $X=Y$이고, 정의역 X의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x)=x$인 함수

(4) 상수함수: 정의역 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=c$ (c는 상수)인 함수

합성함수

(1) 두 함수 $f: X \longrightarrow W$, $g: W \longrightarrow Y$에 대하여 $g \circ f: X \longrightarrow Y$, $(g \circ f)(x)=g(f(x))$

(2) $g \circ f \neq f \circ g$

(3) $h \circ (g \circ f)=(h \circ g) \circ f$

역함수

함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일 대응이면

(1) 역함수 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$가 존재한다.

(2) $y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$

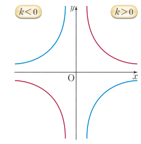
(3) $f^{-1} \circ f$와 $f \circ f^{-1}$는 각각 항등함수이다.

(4) $(f^{-1})^{-1}=f$

(5) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

2 유리함수

유리함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$의 그래프

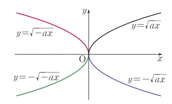


유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$의 그래프

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ $(k\neq 0)$의 꼴로 변형한 후 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하여 그린다.

3 무리함수

무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$, $y=\pm\sqrt{-ax}$ $(a>0)$의 그래프



무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a\neq 0)$의 그래프

$y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a\neq 0)$를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 꼴로 변형한 후 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하여 그린다.

용어와 기호 대응, 정의역, 공역, 치역, 일대일함수, 일대일 대응, 항등함수, 상수함수, 합성함수, 역함수, 유리식, 유리함수, 다항함수, 점근선, 무리식, 무리함수, $f: X \longrightarrow Y$, $g \circ f$, $(g \circ f)(x)$, $y=g(f(x))$, f^{-1}, $y=f^{-1}(x)$

수행 과제

● 수행 과제 의도

괘종시계의 시계추의 운동 속에 숨어 있는 무리함수의 원리를 찾아봄으로써 무리함수의 유용성을 느낄 수 있도록 하기 위한 것이다.

과제 1 _풀이

1 m의 길이의 진자를 만들어 보면 진자의 주기는 약 2초임을 알 수 있다. 주어진 식에서 $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$이므로 이 식에 $T=2$를 대입하여 구한 g의 값을 반올림하여 소수 첫째 자리까지 나타내면 **9.9**이다.

과제 2 _풀이

괘종시계는 추의 진동 주기에 따라 시겟바늘이 회전하게 되어 있으므로 추의 진동 주기가 k배 느려지면 시겟바늘도 k배 느려진다.

$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$에서 진자의 길이를 4배로 늘리면 주기는 2배 늘어나므로 시겟바늘은 진자의 길이를 늘이기 전보다 2배 느리게 움직인다.

읽/기/자/료 진자의 등시성

갈릴레이(Galilei, G. ; 1564~1642)는 어느 날 피사 성당에서 천장에 매달려 있는 램프가 흔들거리는 것을 보게 되었는데 거기에서 그는 진자의 등시성을 발견하였다. 진자의 등시성이란 진자가 한 번 왕복하는 데 걸리는 시간은 흔들리는 폭에 상관없이 항상 일정하며, 다만 그 시간은 진자의 길이와 관련이 있다는 것이다.

교과서 114 쪽

대 / 단 / 원 평가 문제

Ⅱ. 함수

선택형

1 두 집합 $X=\{0, 1, 2\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 $f(x)=|2x-1|$로 주어질 때, 치역의 원소의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2 두 집합 $X=\{x|-2\le x\le 2\}$, $Y=\{y|-4\le y\le 4\}$에 대하여

$$f: X \longrightarrow Y,\ f(x)=ax+b\ (a>0)$$

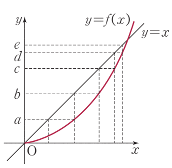
로 정의되는 함수 f가 일대일 대응일 때, $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

3 함수 f가 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족시키고 $f(1)=3$이라고 할 때, $f(3)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

4 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $(f\circ f\circ f)(d)$의 값은? (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

5 함수 $f(x)=2x+a$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$에 대하여 $f^{-1}(3)=1$이다. 이때 $f^{-1}(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

6 함수 $f(x)=-2x+|x|$에 대하여 $f^{-1}(1)+f^{-1}(-1)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

7 유리함수 $y=\frac{ax-1}{x-b}$의 그래프가 두 직선 $x=3$, $y=2$와 만나지 않을 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8 함수 $f(x)=\frac{ax}{x-3}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

대 / 단 / 원 평가 문제

1

목표| 정의역과 공역이 주어진 함수의 치역을 구할 수 있게 한다.

풀이| 정의역의 원소 0, 1, 2에 대한 함숫값을 구하면

$f(0)=|2\times 0-1|=|-1|=1$

$f(1)=|2\times 1-1|=|1|=1$

$f(2)=|2\times 2-1|=|3|=3$

이므로 함수 f의 치역은 $\{1, 3\}$이다. 따라서 치역의 원소의 합은 $1+3=4$이다.

답 ②

2

목표| 정의역과 공역이 주어진 함수가 일대일 대응이 될 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a>0$이므로 함수 f가 일대일 대응이 되려면

$f(-2)=-4$, $f(2)=4$

$f(x)=ax+b$이므로

$-2a+b=-4$, $2a+b=4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$

따라서 $a+b=2$이다.

답 ③

3

목표| 특정한 조건을 만족시키는 함수의 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)$

$=3+3=6$

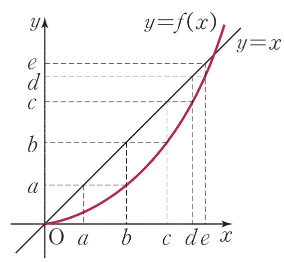
$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=6+3=9$

답 ④

4

목표| 그래프가 주어진 함수에 대하여 합성함수의 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림에서



$f(f(f(d)))$

$=f(f(c))$

$=f(b)$

$=a$

답 ①

5

목표| 역함수의 성질을 이용하여 역함수의 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f^{-1}(3)=1$에서 $f(1)=3$이므로

$2\times 1+a=3$에서 $a=1$

따라서 $f(x)=2x+1$이므로

$f(x)=1$에서 $2x+1=1$, $x=0$이므로 $f(0)=1$

따라서 $f^{-1}(1)=0$이다.

답 ③

6

목표| 역함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (i) $x\ge 0$일 때 $f(x)=-2x+x=-x\le 0$

(ii) $x<0$일 때 $f(x)=-2x-x=-3x>0$

이므로 $f(x)=\begin{cases}-x & (x\ge 0)\\ -3x & (x<0)\end{cases}$

$f^{-1}(1)=m$이라고 하면 $f(m)=1>0$

따라서 $-3m=1$이므로 $m=-\frac{1}{3}$

$f^{-1}(-1)=n$이라고 하면 $f(n)=-1\le 0$

따라서 $-n=-1$이므로 $n=1$

그러므로 $f^{-1}(1)+f^{-1}(-1)=\frac{2}{3}$

답 ②

7

목표| 유리함수의 그래프와 점근선의 성질을 이용하여 유리함수의 계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=\frac{ax-1}{x-b}=\frac{ab-1}{x-b}+a$에서

이 함수의 점근선의 방정식은 $x=b,\ y=a$

두 직선 $x=3,\ y=2$은 이 함수의 그래프와 만나지 않으므로 $b=3,\ a=2$

따라서 $a+b=2+3=5$

답 ⑤

8

목표| 유리함수의 그래프가 직선에 대하여 대칭인 조건을 이용하여 유리함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=\frac{ax}{x-3}=\frac{3a}{x-3}+a$에서

점근선의 방정식은 $x=3,\ y=a$

점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 존재해야 하므로

$a=3$

답 ③

9

목표| 역함수의 성질을 이용하여 무리함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f^{-1}(4)=5$에서 $f(5)=4$이므로 $\sqrt{2\times 5-1}+a=4$

위의 식을 풀면 $a=1$

답 ④

교과서 115 쪽

[해답 p.225]

9 무리함수 $f(x)=\sqrt{2x-1}+a$에 대하여 $f^{-1}(4)=5$를 만족시킬 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

10 $-2\le x\le 1$에서 무리함수 $y=\sqrt{2-x}+a$의 최솟값이 2일 때, 최댓값은?

① $\sqrt{2}+1$ ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\sqrt{2}+2$ ⑤ 4

서답형

11 자연수 n에 대하여 함수 f를
$f(n)=(n$의 일의 자리 숫자$)$라고 정의할 때,

$$f(3)+f(3^2)+f(3^3)+\cdots+f(3^{10})$$

의 값을 구하여라.

12 두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일함수일 때,

$$1\cdot f(1)+2\cdot f(2)+3\cdot f(3)$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하자. 이때 $M+m$의 값을 구하여라.

13 거리가 10 km인 산책로를 처음에는 x km/h의 속력으로 쉬지 않고 걷기로 하였다가 계획했던 속력보다 1 km/h 더 빠르게 걷고 중간에 30분을 쉬었다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 10 km를 가는 데 총 y시간이 걸렸을 때, y를 x에 대한 함수로 나타내어라.

(2) $0<x<4$일 때, (1)에서 구한 함수의 그래프를 그려라.

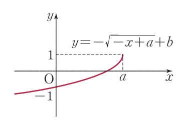
14 함수 $f(x)=\frac{x}{x-1}$에 대하여 $f(f(f(10)))$의 값을 구하여라.

|서|술|형|

15 함수 $f(x)=\begin{cases} -x & (x>0\text{일 때}) \\ (a^2-5a)x & (x\le 0\text{일 때}) \end{cases}$가 일대일 대응이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

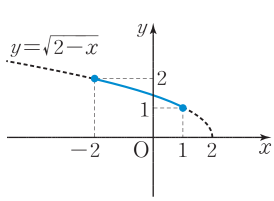
16 무리함수 $y=-\sqrt{-x+a}+b$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 두 상수 a, b의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



10

목표| 제한된 범위에서 무리함수의 최댓값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=\sqrt{2-x}=\sqrt{-(x-2)}$ $(-2\le x\le 1)$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$ $(-4\le x\le -1)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 최솟값은 $x=1$일 때 1이다.



한편 $y=\sqrt{2-x}+a$의 그래프는 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다. 이때 최솟값이 2이므로 $1+a=2$에서 $a=1$이다.

따라서 주어진 함수는 $y=\sqrt{2-x}+1$이고,

최댓값은 $x=-2$일 때 $\sqrt{2+2}+1=3$이다.

답 ③

11

목표| 주어진 함수에 대하여 함숫값의 규칙을 구할 수 있게 한다.

풀이| $3=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243,\ \cdots$과 같이 3의 거듭제곱의 일의 자리 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복되어 나타난다.

따라서 구하는 값은

$f(3)+f(3^2)+f(3^3)+\cdots+f(3^{10})$

$=3+9+7+1+3+9+7+1+3+9=52$

답 52

12

목표| 일대일함수의 성질을 이용하여 주어진 식의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 f의 공역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고, 일대일함수이므로 $1\cdot f(1)+2\cdot f(2)+3\cdot f(3)$은

$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=4$일 때 최댓값을 가지고,

$f(1)=3,\ f(2)=2,\ f(3)=1$일 때 최솟값을 가진다.

따라서

$M=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4=20,\ m=1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1=10$

이므로 $M+m=30$

답 30

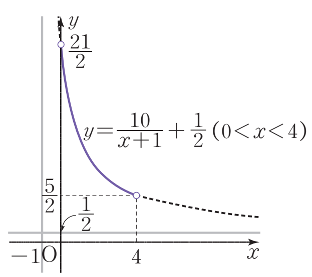
13

목표| 실생활 문제를 함수로 나타내고, 이 함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $(\text{시간})=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$이므로 거리가 10 km인 산책로를 $(x+1)$km/h의 속력으로 걷는 데 걸리는 시간은 $\dfrac{10}{x+1}$시간이다.

또 중간에 30분$\left(=\dfrac{1}{2}\text{시간}\right)$을 쉬었으므로 10 km를 가는 데 걸린 시간 y는 $y=\dfrac{10}{x+1}+\dfrac{1}{2}$(시간)이다.

(2)



답 (1) $y=\dfrac{10}{x+1}+\dfrac{1}{2}$ (2) 풀이 참조

14

목표| 합성함수의 정의를 이용하여 주어진 합성함수의 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(f(f(10)))=f\left(f\left(\dfrac{10}{10-1}\right)\right)=f\left(f\left(\dfrac{10}{9}\right)\right)$

$$=f\left(\dfrac{\frac{10}{9}}{\frac{10}{9}-1}\right)=f(10)=\dfrac{10}{10-1}=\dfrac{10}{9}$$

답 $\dfrac{10}{9}$

다른 풀이

$$f(f(x))=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\dfrac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=x$$

이므로 $f(f(f(10)))=f(10)=\dfrac{10}{10-1}=\dfrac{10}{9}$

15

목표| 주어진 함수가 일대일 대응이 되기 위한 조건을 이용하여 정수 a의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 f가 일대일 대응이 되려면 $x>0$일 때 직선 $y=f(x)$의 기울기가 0보다 작으므로 $x\le0$일 때에도 직선 $y=f(x)$의 기울기가 0보다 작아야 한다.

즉, $a^2-5a<0$에서 $a(a-5)<0,\ 0<a<5$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 $1,\ 2,\ 3,\ 4$의 4개다.

답 4개

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	함수 f가 일대일 대응이 되도록 하는 조건 찾기	30%
	조건을 a에 대한 부등식으로 나타내기	30%
	a에 대한 부등식 풀기	20%
답 구하기	정수 a의 개수 구하기	20%

16

목표| 그래프를 이용하여 무리함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=-\sqrt{-x+a}+b=-\sqrt{-(x-a)}+b$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

한편 $y=-\sqrt{-x+a}+b$의 그래프는 점 $(a,\ 1)$을 지나므로 $1=-\sqrt{-a+a}+b,\ b=1$

또 $y=-\sqrt{-x+a}+b$의 그래프는 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 $-1=-\sqrt{0+a}+1$

따라서 $a=4,\ b=1$이다.

답 $a=4,\ b=1$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	무리함수를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 나타내기	10%
	그래프를 이용하여 $a,\ b$에 대한 식 세우기	50%
답 구하기	상수 $a,\ b$의 값 구하기	40%

M+ Literature

수 학 + 문 학

김삿갓 방랑기

미국의 수학자 데이비스(Davis, P. J.)와 미국의 수학자 허시(Hersh, R.)가 지은 "수학적 경험"이라는 책에서는 수학을 다음과 같이 소개하고 있다.

'수학의 창조자가 느끼는 기쁨과 평화로움 그리고 자신감은 이 세상 어느 것에도 비교할 수 없는 것이다. 또한 위대하고 새로운 수학적 구조는 불멸의 진리이다.'

이와 같이 새로운 것을 만들어 낸다는 것은 매우 큰 기쁨이자 아름다움이다. 이런 이유로 종종 수학과 문학을 같은 부류로 취급하기도 한다.

조선 시대 과거 제도에서는 시가 필수였으며, 선비뿐만 아니라 기생도 시에 능했다. 그중 눈에 띄는 인물로는 방랑 시인 김삿갓으로 잘 알려진 시인 김병연이 있다.

그는 과거 시험에서 자신이 역적으로 몰아 욕을 퍼부은 '김익순'이 자신의 조부임을 알고, 그 죄책감에 평생 삿갓을 쓰고 방랑하며 살았다고 한다. 그의 호방하고 재치 있는 시는 우리에게 잘 알려져 있는데 그의 시 중에서 수학과 관련된 세 편의 시를 소개한다.

먼저 무한과 관련된 그의 시를 살펴보자.

물론 그가 무한의 본질을 알고 이 시를 썼는지는 알 수 없으나, 김삿갓의 발상은 신기하게도 칸토어(Cantor, G. ; 1845~1918)의 무한론의 발상과 일치하고 있다.

一峯二峯 三四峯 (일봉이봉 삼사봉)　　하나, 둘, 셋, 네 봉우리
五峯六峯 七八峯 (오봉육봉 칠팔봉)　　다섯, 여섯, 일곱, 여덟 봉우리
須臾更作 千萬峯 (수유갱작 천만봉)　　잠깐 사이에 천만 봉우리로 늘어나더니
九萬長天 都是峯 (구만장천 도시봉)　　온 하늘이 모두 구름 봉우리로다.

구름의 속성상 한 조각의 구름이 무한의 구름이 될 수 있다. 즉, 구름을 소재로 무한을 생각하고 있는 김삿갓의 수학적 재치가 돋보이는 시이다.

다음으로 일대일 대응에 관련된 그의 시를 살펴보자.

이 시는 어떤 사람의 회갑을 축하하는 것으로 만수무강을 기원하는 내용을 담고 있다.

김삿갓은 이 세상의 모든 모래알의 수를 무한으로 보고, 그 개수를 세는 방법을 칸토어가 무한집합의 개념을 만들 때 사용한 '일대일 대응'의 원리를 사용하고 있다.

可憐江浦望 (가련강포망)	강에 나와 그 경치를 살펴보니
明沙十里連 (명사십리련)	유리알 같은 모래가 십 리에 걸쳐 있구나.
令人個個捨 (영인개개사)	모래알을 일일이 세어 보니
共數父母年 (공수부모년)	그 수가 부모님의 연세와 같구나.

끝으로 숫자와 관련된 그의 시를 살펴보자.

이 시는 반복적인 기법으로 구월산의 경치를 재미있게 표현한 것이다.

去年九月 過九月(거년구월 과구월)	지난해에도 구월에 구월산에 왔고
今年九月 過九月(금년구월 과구월)	올해에도 구월에 구월산에 왔네.
年年九月 過九月(연년구월 과구월)	해마다 구월에 구월산에 오니
九月山光 長九月(구월산광 장구월)	구월산의 경치는 언제나 구월이로구나.

김삿갓의 시에서는 항상 그 재치와 천재성을 엿볼 수 있는데, 그가 수학적으로도 뛰어났음을 알 수 있다.

M+ Engineering

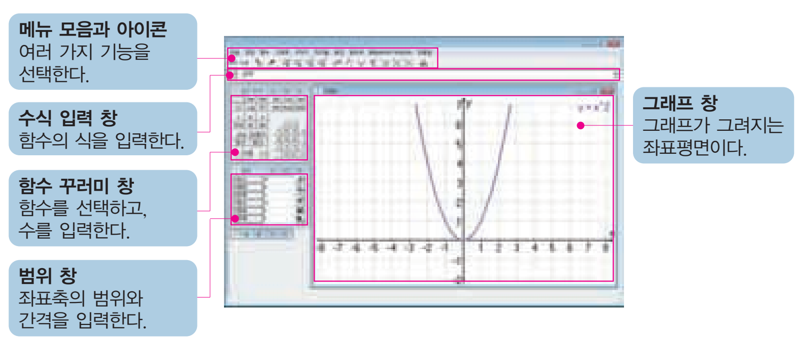
수 학 + 공 학

컴퓨터에 숨어 있는 수학 보물 – 함수의 그래프

함수의 그래프를 그리는 컴퓨터 프로그램을 이용하면 여러 가지 함수의 그래프를 쉽게 그릴 수 있다. 또 그래프의 교점을 이용하면 방정식의 근을 구할 수 있다.

1 \ 소프트웨어의 사용 방법을 알아보자.

예를 들어 다음 그림과 같이 수식 입력 창에 'x^2'를 입력하고 Enter↵ 를 누르면 그래프 창에 함수 $y=x^2$의 그래프가 그려진다.



참고 (1) 수식 입력 창에 함수의 식을 입력하는 방법은 다음과 같다.

지수 'x^n' → x^n, 곱셈 → *, 나눗셈 → /

정의역 '$\{x|a\le x\le b\}$' → $[a\,;b]$

(2) 아이콘을 이용하여 여러 가지 기능을 수행한다.

: 그래프를 그린다. : 그래프를 지운다.

: 그래프를 확대한다. : 그래프를 축소한다.

: 그래프의 꼭짓점과 교점의 좌표를 구한다.

2\ 두 함수 $y=x^2-2x-3$, $y=-x-1$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

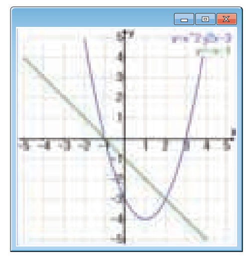
(1) 두 함수의 그래프를 같은 평면 위에 그려 보자.

❶ 함수 꾸러미 창의 버튼이나 컴퓨터 자판을 이용하여 수식 입력 창에 'x^2-2x-3' 을 입력한다.

❷ 를 누르거나 자판에서 Enter↵ 를 누르면 그래프 창에 $y=x^2-2x-3$의 그래프가 그려진다.

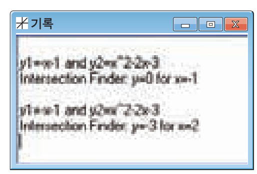
❸ 수식 입력 창에 입력된 내용을 지우고 '$-x-1$'을 입력한다.

❹ 를 누르거나 자판에서 Enter↵ 를 누르면 오른쪽 그림과 같이 $y=-x-1$의 그래프가 $y=x^2-2x-3$의 그래프와 같은 평면 위에 그려진다.



(2) 두 함수의 그래프의 교점의 좌표를 구하여 보자.

교점의 좌표를 구하는 아이콘 을 누른 다음, 그래프에서 하나의 교점이 포함되도록 마우스를 끌어 영역을 지정하면 왼쪽 아래의 기록 창에 교점의 좌표가 표시된다.
다른 교점도 마찬가지 방법으로 구하면 두 점 $(-1,\ 0)$과 $(2,\ -3)$이 두 그래프의 교점임을 알 수 있다.



3\ 함수의 그래프를 그리는 프로그램을 인터넷으로 찾아서 다음을 연습하여 보자.

(1) 두 함수 $y=x^2-2x+1$, $y=x+1$의 그래프를 같은 평면 위에 그리고, 교점의 좌표를 구하여 보자.

(2) 두 함수 $y=\dfrac{2}{x}$, $y=\dfrac{2}{x-1}+2$의 그래프를 같은 평면 위에 그리고, 두 그래프의 평행이동을 살펴보자.

(3) 두 함수 $y=\sqrt{3x}$, $y=\sqrt{3(x+3)}+1$의 그래프를 같은 평면 위에 그리고, 두 그래프의 평행이동을 살펴보자.

수 학 ✚ 공 학

앵무조개의 단면,
식물의 잎이 붙는 순서,
솔방울의 나선 수 등에서 규칙성을 찾을 수 있다.

III 수열

|준|비|학|습|

초등 수의 규칙 찾기

1 다음에 나열된 수들이 어떤 규칙을 가지고 있는지 찾아 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \boxed{5},\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \boxed{10},\ 11,\ 12,\ \cdots$

(2) $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \boxed{11},\ 13,\ 15,\ \boxed{17},\ 19,\ 21,\ \cdots$

(3) $2,\ \boxed{-4},\ 8,\ -16,\ 32,\ -64,\ \boxed{128},\ -256,\ \cdots$

중② 일차함수
중③ 이차함수

2 다음 함수에 대하여 $f(1)$, $f(6)$의 값을 구하여라.

(1) $f(n)=3n-1$ $f(1)=2,\ f(6)=17$

(2) $f(n)=2n^2$ $f(1)=2,\ f(6)=72$

단원의 지도 목표

1. 등차수열과 등비수열

① 수열의 뜻을 알게 한다.
② 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있게 한다.
③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있게 한다.

2. 수열의 합

① $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.
② 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있게 한다.

3. 수학적 귀납법

① 수열의 귀납적 정의를 이해하게 한다.
② 수학적 귀납법의 원리를 이해하게 한다.
③ 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 여러 가지 수열의 합에서는 자연수의 거듭제곱의 합 $\sum_{k=1}^{n}k$, $\sum_{k=1}^{n}k^2$, $\sum_{k=1}^{n}k^3$과 수열의 합이 간단한 것만 다룬다.
② 수열과 관련된 실생활 문제를 귀납적으로 표현할 수 있게 하고, 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하는 문제는 다루지 않는다.
③ 수학적 귀납법에 의한 증명은 원리를 이해할 수 있는 정도로 간단히 다룬다.
④ 기호 S_n은 교수 · 학습 상황에서 다루어질 수 있다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습	본 단원	후속 학습
[중1~3학년군] 일차함수 이차함수 [수학 Ⅱ] 함수	1. 등차수열과 등비수열 수열의 뜻 등차수열 등비수열 2. 수열의 합 $\sum$의 뜻과 성질 여러 가지 수열의 합 3. 수학적 귀납법 수열의 귀납적 정의 수학적 귀납법	[미적분 Ⅰ] 수열의 극한 급수 함수의 극한 함수의 연속

단원의 차시별 지도 계획

<table>
<tr><th>중단원</th><th>소단원</th><th>차시</th><th>교과서(쪽)</th><th>지도 내용</th><th>용어와 기호</th></tr>
<tr><td colspan="2">단원의 개관</td><td rowspan="3">1~2</td><td>120~121</td><td>• 단원의 개관
• 준비 학습</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">1. 등차수열과 등비수열</td><td>중단원 도입</td><td>122</td><td>• 실생활에서 수열의 활용</td><td></td></tr>
<tr><td>01 수열의 뜻</td><td>123~125</td><td>• 수열의 뜻</td><td>수열, 항, 일반항, a_n, $\{a_n\}$</td></tr>
<tr><td>02 등차수열</td><td>3~6</td><td>126~132</td><td>• 등차수열의 뜻
• 등차수열의 합</td><td>공차, 등차수열, 등차중항</td></tr>
<tr><td>03 등비수열</td><td>7~8</td><td>133~138</td><td>• 등비수열의 뜻
• 등비수열의 합</td><td>공비, 등비수열, 등비중항</td></tr>
<tr><td>수준별 학습</td><td>9</td><td>139~141</td><td>• 중단원 확인 학습 문제</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. 수열의 합</td><td>중단원 도입</td><td rowspan="2">10~11</td><td>142</td><td>• 피라미드와 수</td><td></td></tr>
<tr><td>01 $\sum$의 뜻과 성질</td><td>143~145</td><td>• $\sum$의 뜻과 성질</td><td>$\sum_{k=1}^{n} a_k$</td></tr>
<tr><td>02 여러 가지 수열의 합</td><td>12~15</td><td>146~150</td><td>• 자연수의 거듭제곱의 합</td><td></td></tr>
<tr><td>수준별 학습</td><td>16</td><td>151~153</td><td>• 중단원 확인 학습 문제</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">3. 수학적 귀납법</td><td>중단원 도입</td><td rowspan="2">17~18</td><td>154</td><td>• 시어핀스키 삼각형</td><td></td></tr>
<tr><td>01 수열의 귀납적 정의</td><td>155~157</td><td>• 수열의 귀납적 정의</td><td>귀납적 정의</td></tr>
<tr><td>02 수학적 귀납법</td><td>19~20</td><td>158~160</td><td>• 수학적 귀납법</td><td>수학적 귀납법</td></tr>
<tr><td>수준별 학습</td><td>21</td><td>161~163</td><td>• 중단원 확인 학습 문제</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">단원 마무리</td><td>22~23</td><td>164~169</td><td>• 수행 과제
• 대단원 학습 내용 정리
• 대단원 평가 문제
• 수학 플러스</td><td></td></tr>
</table>

단원의 이론적 배경

1. 수열 개념의 역사

수열 문제 중 가장 오래된 것은 이집트의 유명한 린드 파피루스에 나오는 곡물의 분배에 관한 문제이다. 19세기 말에 린드가 발견한 파피루스는 기원전 1650년경에 만들어진 것이지만 이 곡물의 문제는 그보다 더 이전인 기원전 3000년경의 수학 책에서 옮긴 것으로 추측되고 있다. 이 문제를 현대적인 의미로 번역해서 쓰면 다음과 같다.

'100 kg의 곡물을 5명이 나누는데 A보다 B가, B보다 C가, C보다 D가, D보다 E가 각각 어떤 일정한 양만큼 많아지도록 나누었다. 그리고 A, B 두 명의 몫은 나머지 3명의 몫의 $\frac{1}{7}$이었다. 각각 나누어 가진 곡물의 양을 구하여라.'

여기서 각각 나누어 가진 곡물의 양은 등차수열을 이루고 있다. 첫째항을 x, 공차를 y라고 하면 A, B, C, D, E가 가진 양은 각각 x, $x+y$, $x+2y$, $x+3y$, $x+4y$이다. 문제의 조건으로부터 다음 두 개의 방정식을 얻는다.

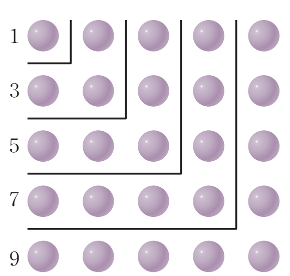
$$x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100$$
$$7\{x+(x+y)\}=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)$$

이것을 풀면 $x=\frac{5}{3}$, $y=\frac{55}{6}$를 얻으므로 A, B, C, D, E가 나누어 가진 곡물의 양은 차례로

$$\frac{5}{3},\ \frac{65}{6},\ 20,\ \frac{175}{6},\ \frac{115}{3}\ (\text{kg})$$

이다.

이외에도 기원전 6세기경 피타고라스학파는 1부터 시작하여 처음 n개의 홀수를 더한 것은 n^2이라는 사실을 오른쪽 그림을 이용하여 밝힌 바 있다.



$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

2. 피보나치 수열

이탈리아의 수학자 피보나치(Fibonacci ; ?1170~?1250)는 그의 아버지가 이탈리아와 아라비아를 돌아다니는 상인이었기 때문에 일찍부터 산술에 관심을 가지게 되었다('Fibonacci'는 'Bonacci의 아들'이라는 뜻임). 그 당시 이탈리아에서는 i, ii, iii, iv, v, vi, …과 같은 로마 숫자를 주로 사용하고 있었는데 아버지를 따라 이집트, 시칠리아, 그리스, 시리아 등을 여행한 피보나치는 인도 · 아라비아의 계산 방법이 탁월한 것을 확신하게 되었다. 그래서 1202년에 "산술의 서"를 써서 영의 개념과 자리 수를 사용하는 아라비아 숫자의 사용법을 설명하였다. 실제로 이 책은 유럽에 아라비아 숫자를 도입하는 데 크게 공헌하였다고 한다.

이 책에 실린 피보나치 수열은 19세기 프랑스의 수학자 루카스(Lucas)가 네 권으로 된 "오락 수학"을 저술하면서 다음 문제의 풀이에 피보나치라는 이름을 사용함으로써 유명해지게 된 것이다.

'암수 한 쌍의 토끼의 나이가 한 달이면 새끼를 낳기에는 아직 어리지만 나이가 두 달 이상이 되면 매달 암수 한 쌍의 새끼를 낳는다고 하자. n달 후의 토끼의 마리 수는 얼마인가?'

이 문제의 해답은 점화식 $a_{n+1}=a_{n-1}+a_n\,(n\geq 2)$로 설명될 수 있는 다음과 같은 수열이다.

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \cdots$$

피보나치 수열이라고 불리는 이 수열은 중요한 성질을 많이 가지고 있다.

예를 들면 이웃한 두 항은 모두 서로소이고, 이웃한 두 항의 비의 극한

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618\cdots$$

은 황금분할의 비이다. 또 이 수열은 나뭇잎의 배열이나 생물의 성장 등과도 관련이 있다.

3. 자연수에 대한 페아노의 공리

자연수의 개념은 수학의 가장 기본적인 것 중의 하나로 이를 정의하기 위한 시도는 이탈리아의 수학자 페아노(Peano, G, ; 1858~1932)가 논문 '수의 개념에 대하여'에서 제시한 공리계가 대표적인 것이다.

그는 '1', '후자(successor)', '자연수'라는 세 가지의 무정의 용어로부터 출발하는 다음의 5가지 공리로 자연수를 규정하였다.

① 1은 자연수이다.

② 임의의 자연수 x에는 후자 x'이 오직 하나 존재하고, x'도 자연수이다.

③ $x'=y'$이면 $x=y$이다.

④ $x'=1$이 되는 자연수 x는 존재하지 않는다.

⑤ 1이 어떤 성질을 가지고, 그 성질을 가진 자연수 x의 후자 x'도 역시 그 성질을 가지면 모든 자연수도 그 성질을 갖는다.

이상이 페아노의 공리계이다. 특히 ⑤의 공리가 완전귀납법으로도 불리는 수학적 귀납법의 원리이다. 수열을 귀납적으로 정의하는 것은 이 수학적 귀납법의 원리를 기초로 하고 있다. 또 자연수의 덧셈, 곱셈, 거듭제곱 등도 이 페아노의 5개 공리를 바탕으로 정의하지만 그중에서도 수학적 귀납법의 원리인 공리 ⑤가 그 토대가 되며 사칙연산의 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙, 지수법칙의 증명에도 이 페아노의 공리계가 활용된다.

4. 소수(素數)

소수로 만들어지는 수열 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …을 생각해 보자. 소수의 발생은 불규칙적이기 때문에 이 수열을 일반항으로 표현하는 방법은 아직 알려져 있지 않지만 그 값이 점점 커질수록 소수의 발생 빈도는 줄어들기 때문에 '언젠가는 더 이상 소수가 나타나지 않는 것이 아닐까'하는 의문이 들 수도 있다.

그러나 실제로 소수는 무한히 많이 있으며, 이 사실은 이미 유클리드(Euclid ; ?B.C. 325~?B.C. 265)에 의하여 증명되었다. 귀류법에 의한 증명의 전형으로 여겨지는 유클리드의 그 증명은 다음과 같다.

'먼저 소수가 유한하다고 가정하면 가장 큰 소수가 존재하므로 그것을 p라고 하자. 이때

$$p!=p(p-1)(p-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1$$

을 생각하면 $p!$은 $2\le n\le p$인 모든 정수 n으로 나누어떨어지므로 $p!=n\cdot X$ 꼴로 나타낼 수 있다. 그러나 $p!+1=n\cdot X+1$은 $2\le n\le p$인 어떤 정수 n으로도 나누어떨어지지 않는다. 이는 $p!+1$이 그 자체가 p보다 더 큰 소수이거나 아니면 p보다 더 큰 어떤 소수에 의해 나누어떨어져야 함을 뜻한다. 이는 결국 p가 가장 큰 소수라는 가정에 모순이 되므로 가장 큰 소수는 존재하지 않으며 따라서 무한히 많은 소수가 존재함을 의미하게 된다.'

한편 기원전 200년경 고대 그리스의 수학자 에라토스테네스(Eratosthenes ; B.C. 275~B.C. 194)가 고안해 낸 다음 방법을 이용하면 실제로 소수를 찾을 수 있고, 소수가 나타나는 빈도를 예상해 볼 수 있다. 이 방법에 대하여 알아보자.

'100 이하의 소수를 찾으려면 우선 2에서 100까지의 정수를 모두 쓴다. (1은 보통 소수에서 제외한다.) 먼저 2는 소수이지만 그 밖의 짝수는 2의 배수이므로 모두 사선을 그어 지운다. 다음 3은 소수이지만 그 밖의 3의 배수들은 모두 지운다. (6의 배수는 두 번 사선이 그어진다.) 이와 같은 방법으로 5, 7, 11, 13, …의 소수를 구하고 그것들의 배수를 지워나갈 때 남는 수가 100 이하의 소수이다. 그리고 100보다 큰 소수들도 이와 같은 방법으로 사선을 그어 남는 수가 소수이다.'

이렇게 소수를 찾아가는 방법을 '에라토스테네스의 체(sieve)'라고 부른다.

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

대단원		Ⅲ. 수열	쪽수	교과서 120~124쪽
소단원		1. 등차수열과 등비수열　1-1 수열의 뜻	차시	1/23
학습 목표		수열의 뜻을 알 수 있다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◯ 준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다. ◯ 중단원 도입 글을 읽고, 단원 과제를 발문하여 이번 단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다. ◯ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 수열의 뜻을 알 수 있다.		
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◯ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 해결하도록 한다. ◯ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◯ 학습 내용 설명 **• 수열과 항** 차례로 나열된 수의 열을 수열이라 하고, 나열된 각 수를 그 수열의 항이라고 한다. 이때 각 항을 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항, $\cdots$ 또는 제1항, 제2항, 제3항, $\cdots$이라고 한다. 예 $-4,\ 0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ \cdots$에서 첫째항은 -4, 제3항은 4이다. ◯ 문제 1번을 풀게 한다. • 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◯ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◯ 다음 차시를 예고한다. • 수열의 일반항에 대하여 알아본다.		

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

대단원	Ⅲ. 수열	쪽수	교과서 124~125쪽
소단원	1. 등차수열과 등비수열 1-1 수열의 뜻	차시	2/23
학습 목표	수열의 일반항의 뜻을 알 수 있다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이전 차시에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 학습 동기 유발을 위한 발문을 한다. 예 수열 $1, 2, 3, \cdots$의 제n번째 항은 어떻게 표현할 수 있는지 말하여 보자. ◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 수열의 일반항의 뜻을 알 수 있다.	
전개	개념 학습 문제 해결	◎ 학습 내용 설명 **• 수열의 일반항** (1) 수열을 나타낼 때에는 각 항의 번호를 붙여 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 과 같이 나타내고 제n항 a_n을 이 수열의 일반항이라고 한다. (2) 수열은 각 항의 번호에 그 항이 대응하는 함수로 생각할 수 있다. ◎ 예제 01을 설명한다. ◎ 문제 2, 3번을 풀게 한다. • 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다. ◎ 사고력 기르기를 풀게 한다. • 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	수열을 함수로 생각하는 것은 학생의 수준에 따라 지도하지 않을 수 있다.
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 등차수열에 대하여 알아본다.	

1 등차수열과 등비수열

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 수열의 뜻을 알게 한다.

② 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있게 한다.

③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 수열의 뜻	수열의 뜻
02 등차수열	등차수열의 뜻
	등차수열의 합
03 등비수열	등비수열의 뜻
	등비수열의 합
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

들어가면서

수에 대한 이론은 수학의 가장 오래된 분야 중 하나로 수의 성질과 규칙성은 고대에서부터 많이 연구되어 왔다. 그 결과 오늘날 수열은 수학의 중요한 연구 대상일 뿐만 아니라 우리 눈의 홍채, 카메라의 조리개 등 자연 현상을 수학적으로 나타낼 수 있는 중요한 도구가 되었으며 생활 속에서 규칙성을 가지고 있는 수의 나열을 찾아 그 규칙을 이용하면 문제를 보다 효율적으로 해결할 수 있다.

교과서 122 쪽

1 등차수열과 등비수열

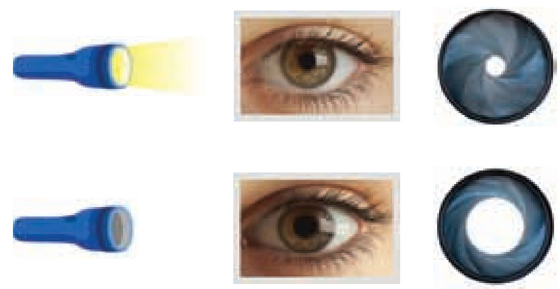
홍채와 조리개

눈으로 물체를 인식하기 위해서는 적당한 양의 빛이 필요하다. 눈에는 빛의 양을 조절해 주는 홍채가 있는데, 주변이 어두운 곳에서는 눈으로 많은 빛이 들어오게 하기 위하여 홍채의 넓이가 줄어 동공이 커진다. 반대로 주변이 밝은 곳에서는 눈으로 들어오는 빛의 양을 줄이기 위하여 홍채의 넓이가 늘어나 동공이 작아진다.

카메라를 이용하여 사진을 찍을 때에도 빛의 양을 조절하는 것이 중요하다. 카메라에서 홍채의 역할을 하는 것은 조리개인데, 주변의 밝기에 따라 조리개를 열거나 조여 줌으로써 빛의 양을 조절한다. 조리개를 조절할 때, 기준이 되는 것은 F수라고 하는 조리개의 눈금이다. F수는

$$1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, \cdots$$

으로 이 값은 조리개의 열린 부분의 지름에 반비례한다. 즉, F수가 커질수록 조리개가 닫혀 더 적은 양의 빛을 받아들이고 F수가 작아질수록 조리개가 열려 더 많은 양의 빛을 받아들인다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 138쪽

카메라의 F수 $1.4,\ 2,\ 2.8,\ 4,\ 5.6,\ \cdots$에는 어떤 규칙이 있을까?

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 수열의 뜻을 설명할 수 있다.	상	수열의 규칙을 파악하여 일반항을 구할 수 있다.
	중	주어진 수열의 규칙을 찾을 수 있다.
	하	주어진 수열의 일반항을 이용하여 특정한 항을 구할 수 있다.
2. 등차수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.	상	등차수열의 일반항을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	등차수열의 첫째항과 공차가 주어질 때 일반항을 구할 수 있다.
	하	등차수열인 것을 찾고 공차를 구할 수 있다.
3. 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.	상	등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구하고, 일반항과 합의 관계를 설명할 수 있다.
	중	등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.
	하	등차수열의 합의 공식을 말할 수 있다.
4. 등비수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.	상	등비수열의 일반항을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	등비수열의 첫째항과 공비가 주어질 때 일반항을 구할 수 있다.
	하	등비수열인 것을 찾고 공비를 구할 수 있다.
5. 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.	상	등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구하고, 일반항과 합의 관계를 설명할 수 있다.
	중	등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.
	하	등비수열의 합의 공식을 말할 수 있다.

교과서 123 쪽

01 수열의 뜻

● 수열의 뜻을 안다.

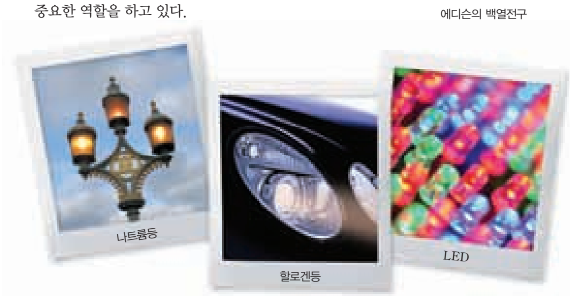
수열이란 무엇인가?

생각 열기

조명

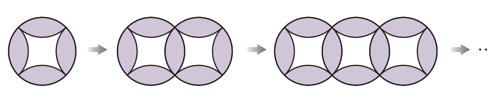
1879년 미국의 에디슨(Edison, T. A. ; 1847~1931)이 발명한 백열전구는 동식물의 기름이나 석유에 불을 붙여 밤을 밝혔던 조명의 역사에 획기적인 변화를 가져왔다. 이후 수은등, 나트륨등, 할로겐등, LED, OLED 등 다양한 조명이 개발되었으며 최근에는 기능성뿐만 아니라 실내 장식에서도 중요한 역할을 하고 있다.


에디슨의 백열전구



탐구 활동

다음 그림과 같이 조립식 조명 ⬭을 연결하여 조명 장치를 만들 때, 물음에 답하여 보자.



1. 4단계에는 어떤 모양이 되는지 그려 보자.

2. 각 단계에서 사용된 조립식 조명 ⬭의 개수를 차례로 나열하여 보자.

3. 2에서 나열한 수에는 어떤 규칙이 있는지 말하여 보자.

01 수열의 뜻

소단원 지도 목표

① 수열과 항의 뜻을 알게 한다.

② 일반항의 뜻을 알고 수열의 일반항을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 수열을 나타내는 기호 $\{a_n\}$에서 $\{\ \ \}$는 수열에서 사용되는 기호로 집합의 기호와 혼동하지 않도록 지도한다.

2. 수열은 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하고, 실수 전체의 집합을 공역으로 하는 함수임을 예를 통해 이해하게 한다.

3. 일정한 규칙 없이 수를 나열한 것도 수열이지만 규칙성이 있는 수열만을 다루도록 한다.

4. 나열된 수로부터 일반적인 규칙을 찾을 수 있도록 충분한 개수의 수를 나열하여 제시하도록 한다.

새로 나온 용어와 기호

- 수열(數列, sequence)
- 항(項, term)
- 일반항(一般項, general term)
- a_n, $\{a_n\}$

생각 열기 참/고/자/료

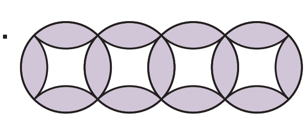
에디슨이 백열전구를 발명하기 30년 전에 이미 많은 과학자들이 백열전구를 발명하고 개량하였다. 따라서 에디슨은 세계 최초의 백열전구 발명가라기보다는 세계 최초로 45시간 이상 꺼지지 않는 보다 완벽한 백열전구의 개량에 성공한 과학자라고 할 수 있다. 에디슨은 백열전구의 수명을 연장시키기 위해 1천 5백 개 이상의 재료로 필라멘트를 만들고 9,999번을 실패하면서 백열전구의 실용화에 성공하였고 지금과 같은 전기 조명 시대를 이끌었다. 백열전구는 1738년에 발명된 석유등이나 1799년에 점화된 가스등보다 위생적이고 화재 위험이 없는 진보된 조명이었으며 1808년부터 쓰인 아크등보다 유지비가 덜하고 관리하기 편하였다.

이 밖에 자세한 조명의 역사는 조명박물관 및 그 홈페이지(http://www.lighting-museum.com)에서 알아볼 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 조립식 조명을 단계별로 연결하여 나열해 보는 과정에서 수열의 규칙성을 찾도록 하기 위한 것이다.

1.



2. 4, 7, 10, 13, …

3. 4부터 시작하여 차례로 3씩 늘어난다.

1

목표 | 수열의 항의 뜻을 이해하고 주어진 수열의 각 항을 찾을 수 있게 한다.

풀이 | (1) 첫째항: **3**, 제5항: **11**

(2) 첫째항: **1**, 제5항: **25**

본문 해설

❶ 수열은 항의 순서를 나타내는 자연수에 각 항이 대응하는 다음과 같은 수열로 볼 수 있다.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & \cdots \end{array}$$

이 대응 방법을 f라고 하면, 수열 $\{a_n\}$은 함수 $f(n)=a_n$으로 정해진다.

역으로 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $f(n)$은 수열 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\cdots$, $f(n)$, $\cdots$을 결정한다. 이를테면 $f(n)=n+2$일 때 $f(1)=3$, $f(2)=4$, $f(3)=5$, $f(4)=6$, $\cdots$이므로 수열 3, 4, 5, 6, $\cdots$이 정해진다.

교과서 124 쪽

탐구 활동의 각 단계에서 사용된 조립식 조명 의 개수는 다음과 같이 4부터 시작하여 차례로 3씩 늘어난다.

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ \cdots$$

이와 같이 차례로 나열된 수의 열을 **수열**이라 하고, 나열된 각 수를 그 수열의 **항**이라고 한다.

이때 각 항을 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항, $\cdots$ 또는 제1항, 제2항, 제3항, $\cdots$이라고 한다.

일정한 규칙 없이 수를 나열한 것도 수열이지만, 여기에서는 규칙성이 있는 수열만 다룬다.

보기 수열 -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, $\cdots$에서 첫째항은 -4, 제3항은 4이다.

문제 1 다음 수열의 첫째항과 제5항을 각각 말하여라.

(1) 3, 5, 7, 9, 11, 13, $\cdots$

(2) 1, 4, 9, 16, 25, 36, $\cdots$

일반적으로 수열을 나타낼 때에는 각 항의 번호를 붙여

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

과 같이 나타내고, 제n항 a_n을 이 수열의 **일반항**이라고 한다.

또 수열 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$은 일반항 a_n을 사용하여

$$\{a_n\}$$

과 같이 간단히 나타낸다.

❶ 한편 수열 $\{a_n\}$은 각 항의 번호에 그 항이 대응하는 함수로 생각할 수 있다.

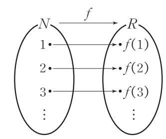
즉, 자연수 전체의 집합 N을 정의역, 실수 전체의 집합 R를 공역으로 하는 함수 $f: N \longrightarrow R$를

$$f(n)=a_n$$

으로 정의하면

$$f(1)=a_1,\ f(2)=a_2,\ f(3)=a_3,\ \cdots$$

이다.



따라서 일반항 a_n이 n에 관한 식 $f(n)$으로 주어지면 n에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 모든 항을 구할 수 있다.

2

목표 | 수열의 일반항 a_n의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하여 수열의 각 항을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $a_1=3\cdot1-4=-1$

$a_2=3\cdot2-4=2$

$a_3=3\cdot3-4=5$

$a_4=3\cdot4-4=8$

$a_5=3\cdot5-4=11$

이므로 수열 a_n의 첫째항부터 제5항까지 나열하면

-1, 2, 5, 8, 11

(2) $a_1=(-3)^1=-3$

$a_2=(-3)^2=9$

$a_3=(-3)^3=-27$

$a_4=(-3)^4=81$

$a_5=(-3)^5=-243$

이므로 수열 a_n의 첫째항부터 제5항까지 나열하면

-3, 9, -27, 81, -243

(3) $a_1=(1+1)^2=2^2=4$

$a_2=(2+1)^2=3^2=9$

$a_3=(3+1)^2=4^2=16$

$a_4=(4+1)^2=5^2=25$

$a_5=(5+1)^2=6^2=36$

이므로 수열 a_n의 첫째항부터 제5항까지 나열하면

4, 9, 16, 25, 36

(4) $a_1=\frac{1}{1}=1$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1}{3}$, $a_4=\frac{1}{4}$, $a_5=\frac{1}{5}$

이므로 수열 a_n의 첫째항부터 제5항까지 나열하면

1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$

교과서 125 쪽

보기 일반항이 $a_n=\sqrt{n}$인 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=\sqrt{1}=1,\ a_2=\sqrt{2},\ a_3=\sqrt{3},\ a_4=\sqrt{4}=2,\ a_5=\sqrt{5},\ \cdots$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2,\ \sqrt{5},\ \cdots$$

문제 2 일반항이 다음과 같은 수열의 첫째항부터 제5항까지를 나열하여라.

(1) $a_n=3n-4$　　(2) $a_n=(-3)^n$

(3) $a_n=(n+1)^2$　　(4) $a_n=\dfrac{1}{n}$

예제 01 다음 수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots$　　(2) $10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ \cdots$

풀이 (1) $a_1=2=2\times1,\ a_2=4=2\times2,\ a_3=6=2\times3,\ a_4=8=2\times4,\ a_5=10=2\times5,\ \cdots$

이므로 일반항은 $a_n=2n$이다.

(2) $a_1=10=10^1,\ a_2=100=10^2,\ a_3=1000=10^3,\ a_4=10000=10^4,\ \cdots$

이므로 일반항은 $a_n=10^n$이다.

답 (1) $a_n=2n$　(2) $a_n=10^n$

문제 3 다음 수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $1,\ 8,\ 27,\ 64,\ \cdots$　　(2) $1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{1}{7},\ \cdots$

(3) $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$　　(4) $1\cdot2,\ 2\cdot3,\ 3\cdot4,\ 4\cdot5,\ \cdots$

사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

띠동갑인 사람의 나이를 작은 수부터 나열하면 그 수는 12씩 늘어난다. 이와 같이 우리 생활 주변에서 수열로 표현할 수 있는 것에는 어떤 것들이 있는지 말하여 보자.

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 생활 주변에서 수열로 표현할 수 있는 것을 찾아봄으로써 수열의 유용성을 알아보기 위한 문제이다.

풀이| 올림픽은 4년마다 한 번씩 열리므로 올림픽의 개최 연도를 차례로 나열하면 4씩 늘어나는 규칙을 가진 수열이 된다.

참고| 반드시 규칙이 있는 수열을 찾을 필요는 없다.

3

목표| 주어진 수열의 규칙을 찾아 일반항을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a_1=1=1^3,\ a_2=8=2^3,\ a_3=27=3^3,$
$a_4=64=4^3,\ \cdots$

이므로 일반항은 $\boldsymbol{a_n=n^3}$

(2) $a_1=1=\dfrac{1}{2\cdot1-1},\ a_2=\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2\cdot2-1},$

$a_3=\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{2\cdot3-1},\ a_4=\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{2\cdot4-1},\ \cdots$

이므로 일반항은 $\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{2n-1}}$

(3) $a_1=-1=(-1)^1,\ a_2=1=(-1)^2,$
$a_3=-1=(-1)^3,\ a_4=1=(-1)^4,\ \cdots$

이므로 일반항은 $\boldsymbol{a_n=(-1)^n}$

(4) $a_1=1\cdot2=1\cdot(1+1),\ a_2=2\cdot3=2\cdot(2+1),$
$a_3=3\cdot4=3\cdot(3+1),\ a_4=4\cdot5=4\cdot(4+1),\ \cdots$

이므로 일반항은 $\boldsymbol{a_n=n(n+1)}$

지/도/자/료 수열의 지도 방법

1. 수열을 나열하여 나타낼 때에는 나열된 수의 열로부터 일반적인 규칙을 찾을 수 있도록 충분한 개수의 항을 나열하도록 한다. 그렇지 않을 경우 수열의 규칙이 다음과 같이 여러 가지로 해석될 수도 있다.

예를 들어 어떤 수열을 2, 4, …로 나타내면

① 2, 4, 6, 8, … ⇨ 2부터 시작하여 2씩 커지는 수열

② 2, 4, 8, 16, … ⇨ 2부터 시작하여 2배씩 커지는 수열

2. 수열을 나타내는 수열을 기호 $\{a_n\}$에서 $\{\ \ \}$는 수열에서 사용되는 기호로, 집합의 기호 $\{1,\ 2\}$와 혼동될 수 있으므로 문맥으로 구별 할 수 있도록 지도하고 $\{a_n\}$에서 n은 자연수임을 알게 한다.

3. 수열 $\{a_n\}$에서 일반항 a_n이 반드시 n에 대한 식으로 나타낼 수 있는 것은 아님을 이해하게 한다. 예를 들어 수열 2, 3, 5, 7, 11, …은 소수를 나열한 것으로 n에 대한 식으로 나타낼 수 없다.

02 등차수열

소단원 지도 목표

① 등차수열과 공차의 뜻을 알게 한다.
② 등차수열의 일반항을 구할 수 있고, 이를 활용할 수 있게 한다.
③ 등차중항의 뜻을 알고, 이를 이용하여 등차수열의 임의의 두 항을 알 때 다른 항을 구할 수 있게 한다.
④ 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있게 한다.
⑤ 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 나열된 수들의 차를 구해 보고 공차의 뜻을 이해할 수 있도록 한다.

2. 등차수열의 합의 공식을 유도하는 과정을 이해하고, 이를 활용할 수 있도록 지도한다.

3. 첫째항부터 제n항까지의 합이 n에 관한 이차식 중 상수항이 0인 수열은 등차수열임을 구체적인 예를 통하여 이해하도록 한다.

새로 나온 용어와 기호

- 등차수열(等差數列, arithmetic sequence)
- 공차(公差, common difference)
- 등차중항(等差中項, arithmetic means)

생각 열기 참/고/자/료

테셀레이션은 기원전부터 미술, 건축 등에 적용되기 시작되어 20세기에 이르러 미술의 한 장르로 정착되었다. 이집트, 페르시아, 그리스, 로마 등 서양은 물론 중국, 한국, 일본 등 동양의 각종 장식 예술품에도 테셀레이션을 이용한 문양이 곳곳에서 발견된다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 테셀레이션을 만드는 활동을 통해서 각 단계에서 사용된 타일의 총개수가 일정한 수를 더하여 얻어지는 등차수열임을 알게 하기 위한 것이다.

교과서 126 쪽

02 등차수열

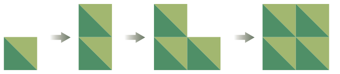
● 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

등차수열이란 무엇인가?

생각 열기 테셀레이션

동일한 모양을 이용해 틈이나 포개짐 없이 평면이나 공간을 완전하게 덮는 것을 테셀레이션이라고 한다. 이는 라틴 어의 정사각형 모양의 돌 또는 타일을 뜻하는 테셀라(tessella)에서 유래된 말로 우리말로는 '쪽매 맞춤'이라고 한다.

탐구 활동 다음은 삼각형 모양의 타일 ◣ 과 ◥ 을 이용하여 테셀레이션을 만드는 과정이다. 물음에 답하여 보자.



1 단계 2 단계 3 단계 4 단계

1. 각 단계에서 사용된 타일 ◣ 과 ◥ 의 개수의 합을 나열하여 보자.
2. 1에서 나열한 수에는 어떤 규칙이 있는지 말하여 보자.

수열

$$\underbrace{2,\ 4}_{+2},\ \underbrace{\ 6}_{+2},\ \underbrace{\ 8}_{+2},\ \underbrace{\ 10}_{+2},\ \cdots$$

은 첫째항 2부터 차례로 일정한 수 2를 더하여 얻은 수열이다.

이와 같이 첫째항부터 차례로 일정한 수를 더하여 만들어지는 수열을 **등차수열**이라 하고, 그 일정한 수를 **공차**라고 한다.

● 등차수열(等差數列)은 영어로 arithmetic sequence, 공차(公差)는 영어로 common difference라고 한다.

● $a_{n+1}-a_n=d$

❶ 따라서 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서 제n항 a_n과 제$(n+1)$항 a_{n+1} 사이에는

$$a_{n+1}=a_n+d \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

인 관계가 성립한다.

보기 (1) 수열 $-2,\ 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \cdots$은 첫째항이 -2, 공차가 3인 등차수열이다.
(2) 수열 $2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ \cdots$는 첫째항이 2, 공차가 -1인 등차수열이다.

1. $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots$

2. 2부터 시작하여 차례로 2씩 늘어난다.

본문 해설

❶ 수열 a_n이 등차수열이 되기 위한 필요충분조건은 $a_{n+1}-a_n=d$ (단, n은 자연수, d는 상수)이다.

(i) 수열 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$이 공차가 d인 등차수열이면 $a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_{n+1}-a_n=d$이므로 $a_{n+1}-a_n=d$ (단, n은 자연수, d는 상수)

(ii) $a_{n+1}-a_n=d$ (단, n은 자연수, d는 상수)가 주어져 있을 때 이 식에 n 대신 차례로 1, 2, 3, $\cdots$을 대입하면 $a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_{n+1}-a_n=d$가 되어 이웃하는 두 항 사이의 차가 d로서 일정하다.

따라서 (i), (ii)로부터 $a_{n+1}-a_n=d$를 만족시키는 수열 a_n은 첫째항이 a_1, 공차가 d인 등차수열이다.

문제 1 다음 수열 중에서 등차수열인 것을 찾고, 등차수열인 것은 공차를 구하여라.

(1) $4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ \cdots$　　(2) $9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \cdots$

(3) $\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{7}{8},\ -\frac{10}{8},\ \cdots$　　(4) $1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ \cdots$

이제 등차수열의 일반항을 구하여 보자.

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=a=a+0d$$
$$a_2=a_1+d=a+1d$$
$$a_3=a_2+d=(a+d)+d=a+2d$$
$$a_4=a_3+d=(a+2d)+d=a+3d$$
$$\vdots$$

이므로 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ 등차수열의 일반항

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

보기 (1) 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$$

(2) 수열 $7,\ 4,\ 1,\ -2,\ -5,\ \cdots$는 첫째항이 7, 공차가 -3인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$$a_n=7+(n-1)\times(-3)=-3n+10$$

문제 2 다음 등차수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) 첫째항이 2, 공차가 3　　(2) 첫째항이 3, 공차가 -4

(3) $-1,\ 4,\ 9,\ 14,\ 19,\ \cdots$　　(4) $1,\ -1,\ -3,\ -5,\ -7,\ \cdots$

공차가 주어지지 않은 경우에는 먼저 공차를 구한다.

문제 3 첫째항이 50, 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 제10항을 구하여라.　　(2) -26은 제 몇 항인가?

1

목표| 수열 중에서 등차수열인 것을 찾고 등차수열의 공차를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 수열 $4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ \cdots$은 첫째항 4부터 차례로 일정한 수 4를 더하여 얻은 수열이므로 **등차수열이다. 이때 공차는 4**이다.

(2) 수열 $9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \cdots$에서 $3-9\neq 1-3$이므로 **등차수열이 아니다.**

(3) 수열 $\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{7}{8},\ -\frac{10}{8},\ \cdots$은 첫째항 $\frac{1}{4}$부터 차례로 일정한 수 $-\frac{3}{8}$을 더하여 얻은 수열이므로 **등차수열이다.** 이때 공차는 $\mathbf{-\frac{3}{8}}$이다.

(4) 수열 $1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ \cdots$에서 $2-1\neq 4-2$이므로 **등차수열이 아니다.**

본문 해설

❶ 등차수열의 일반항 $a_n=a+(n-1)d$를 전개하여 정리하면 $a_n=dn+a-d$이다. 즉, 등차수열의 일반항은 n에 관한 일차식이고, n의 계수가 등차수열의 공차임을 알 수 있다. 역으로 일반항 a_n이 $a_n=pn+q$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 p인 등차수열이다.

2

목표| 첫째항과 공차를 이용하여 등차수열의 일반항을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 첫째항이 2, 공차가 3이므로 구하는 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=2+(n-1)\times 3=\mathbf{3n-1}$

(2) 첫째항이 3, 공차가 -4이므로 구하는 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=3+(n-1)\times(-4)=\mathbf{-4n+7}$

(3) 수열 $-1,\ 4,\ 9,\ 14,\ 19,\ \cdots$에서 첫째항이 -1, 공차가 5이므로 구하는 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=-1+(n-1)\times 5=\mathbf{5n-6}$

(4) 수열 $1,\ -1,\ -3,\ -5,\ -7,\ \cdots$에서 첫째항이 1, 공차가 -2이므로 구하는 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=1+(n-1)\times(-2)=\mathbf{-2n+3}$

3

목표| 등차수열의 일반항을 이용하여 등차수열의 항을 구할 수 있게 한다.

풀이| 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 50, 공차가 -4이므로 일반항 a_n은

$a_n=50+(n-1)\times(-4)=-4n+54$

(1) $a_{10}=-4\cdot 10+54=\mathbf{14}$

(2) $a_n=-4n+54=-26$으로 놓으면 $-4n=-26-54$

$4n=80,\ n=20$

따라서 -26은 **제20항**이다.

4

목표| 주어진 두 항을 이용하여 등차수열의 일반항을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d 라고 하면

$a_2=a+(2-1)d$

$=a+d=8$ …… ①

$a_5=a+(5-1)d$

$=a+4d=-1$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=11$, $d=-3$

따라서 구하는 일반항 a_n은

$a_n=11+(n-1)\times(-3)=\boldsymbol{-3n+14}$

(2) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+(3-1)d$

$=a+2d=5$ …… ①

$a_9=a+(9-1)d$

$=a+8d=17$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1$, $d=2$

따라서 구하는 일반항 a_n은

$a_n=1+(n-1)\times2=\boldsymbol{2n-1}$

교과서 128 쪽

예제 01 제4항이 13, 제10항이 37인 등차수열의 일반항 a_n을 구하여라.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_4=a+(4-1)d$

$=a+3d=13$ ……①

$a_{10}=a+(10-1)d$

$=a+9d=37$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1$, $d=4$

따라서 구하는 일반항 a_n은 $a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$이다.

답 $a_n=4n-3$

문제 4 다음 등차수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $a_2=8$, $a_5=-1$ (2) $a_3=5$, $a_9=17$

예제 02 등차수열 -72, -68, -64, …에서 처음으로 양수가 되는 항은 제 몇 항인지 구하여라.

풀이 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면 첫째항이 -72, 공차가 4이므로

$a_n=-72+(n-1)\times4=4n-76$

$a_n>0$에서 $4n-76>0$, $n>19$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제20항이다.

답 제20항

문제 5 다음 물음에 답하여라.

(1) 공차가 -5, 제10항이 36인 등차수열에서 처음으로 음수가 되는 항은 제 몇 항인지 구하여라.

(2) 제3항이 3, 제10항이 24인 등차수열에서 처음으로 200보다 크게 되는 항은 제 몇 항인지 구하여라.

발전 **문제 6** 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n이 n에 관한 일차식 $pn+q$ (p, q는 상수)일 때, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열임을 보이고, 이 수열의 첫째항과 공차를 구하여라.

5

목표| 등차수열의 일반항을 구하고 조건을 만족시키는 항을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 주어진 수열의 첫째항을 a라고 하면 공차가 -5이고, 제10항이 36이므로

$a+(10-1)\times(-5)=36$, $a=81$

따라서 이 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=81+(n-1)\times(-5)=-5n+86$

$a_n<0$에서 $-5n+86<0$, $n>17.2$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 **제18항**이다.

(2) 주어진 수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

제3항이 3이므로 $a+(3-1)\times d=3$

$a+2d=3$ …… ①

제10항이 24이므로 $a+(10-1)\times d=24$

$a+9d=24$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3$, $d=3$

따라서 이 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=-3+(n-1)\times3=3n-6$

$a_n>200$에서 $3n-6>200$, $n>68.666\cdots$

따라서 처음으로 200보다 크게 되는 항은 **제69항**이다.

6

목표| 일반항이 n에 대한 일차식으로 나타나는 수열은 등차수열이고, 이때 일차항의 계수가 공차, 모든 계수의 합이 초항임을 알게 한다.

풀이| $a_n=pn+q$이므로

$a_{n+1}=p(n+1)+q=pn+p+q$

$a_{n+1}-a_n=(pn+p+q)-(pn+q)=p$

이때 p는 상수이므로 이 수열의 이웃하는 두 항의 차는 p로 일정하다. 즉, $a_{n+1}=a_n+p$ ($n=1$, 2, 3, …)인 관계가 성립한다.

또 첫째항을 구하면 $a_1=p\times1+q=p+q$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\boldsymbol{p+q}$, 공차가 $\boldsymbol{p}$인 등차수열이다.

한편 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 **등차중항**이라고 한다. 이때 b가 a와 c의 등차중항이면 $b-a=c-b$이므로 $b=\frac{a+c}{2}$이다.

역으로 $b=\frac{a+c}{2}$이면 $b-a=c-b$이므로 b는 a와 c의 등차중항이다.

즉, b가 a와 c의 등차중항이기 위한 필요충분조건은

$$b=\frac{a+c}{2}$$

이다.

b가 a와 c의 등차중항일 때, $b=\frac{a+c}{2}$이므로 b는 a와 c의 산술평균이다.

보기 세 수 2, x, 8이 이 순서대로 등차수열을 이루면 x는 2와 8의 등차중항이므로

$$x=\frac{2+8}{2}=5$$

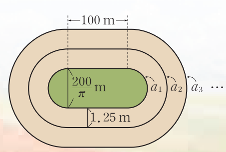
문제 7 다음 수열이 등차수열이 되도록 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

(1) 2, a, 14, b, $\cdots$ (2) a, -3, b, -17, $\cdots$

발전 문제 8 두 수 8과 23 사이에 네 수를 넣어 전체가 등차수열이 되도록 할 때, 이 네 수를 순서대로 구하여라.

창의 up

오른쪽 그림과 같이 직선 주로와 반원 모양의 곡선 주로로 이루어진 육상 경기장이 있다. 이 경기장의 레인은 총 8개로 각각의 폭은 1.25 m이다. 각 레인의 안쪽 경계선을 차례로 a_1, a_2, $\cdots$, a_8이라고 할 때, a_8의 길이를 구하여라. (단, 모든 경계선은 반원 2개와 100 m의 선분 2개로 이루어져 있다.)



7

목표| 등차중항을 이용하여 주어진 수열의 항을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) a는 2와 14의 등차중항이므로

$a=\frac{2+14}{2}=8$

따라서 이 수열은 공차가 6인 등차수열이므로

$b=14+6=\mathbf{20}$

(2) b는 -3과 -17의 등차중항이므로

$b=\frac{-3+(-17)}{2}=\mathbf{-10}$

따라서 이 수열은 공차가 -7인 등차수열이므로

$a+(-7)=-3$에서 $a=\mathbf{4}$

8

목표| 특정한 두 수 사이에 여러 수를 넣어 등차수열을 이루도록 하는 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 두 수 사이에 네 수를 넣어 등차수열이 될 때, 이 수열의 공차를 d라고 하면 구하는 네 수는

$8+d$, $8+2d$, $8+3d$, $8+4d$

로 놓을 수 있다. 즉,

8, $8+d$, $8+2d$, $8+3d$, $8+4d$, 23

은 공차가 d인 등차수열이다.

$8+4d+d=23$에서 $5d=15$, $d=3$

따라서 구하는 네 수는 **11, 14, 17, 20**이다.

창의 UP

출제 의도| 등차수열의 일반항을 실생활 문제에 활용해 봄으로써 등차수열의 유용성을 느끼고 문제 해결력을 기를 수 있도록 하기 위한 것이다.

풀이| 경계선 a_1, a_2, a_3, $\cdots$의 곡선 주로는 각각 지름의 길이가

$\frac{200}{\pi}$ m, $\left(\frac{200}{\pi}+1.25\times2\right)$ m,

$\left(\frac{200}{\pi}+1.25\times4\right)$ m, $\cdots$

인 원의 둘레이므로 경계선 a_n의 길이는

$\pi\times\left\{\frac{200}{\pi}+1.25\times(2n-2)\right\}+200$

$=2.5\pi n+400-2.5\pi\,(\mathrm{m})$

따라서 a_8의 길이는

$2.5\pi\times8+400-2.5\pi=\mathbf{17.5\pi+400\ (m)}$

지/도/자/료 몇 개의 수가 등차수열을 이루는 조건의 문제 해결 지도 방법

세 수가 등차수열을 이룰 때 세 수를 a, $a+d$, $a+2d$, 네 수가 등차수열을 이룰 때 네 수를 a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$와 같이 놓아도 되지만 문제에서 주어진 조건을 만족시키는 식을 찾을 때, a와 d의 값을 찾는 과정이 복잡해 지는 경우가 많다.

따라서 등차수열을 이루는 세 수, 네 수, 다섯 수라는 표현이 있을 때에는 다음과 같이 수들을 서로 대칭이 되도록 놓으면 계산이 편리해진다.

- 세 수: $a-d$, a, $a+d$
- 네 수: $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$
- 다섯 수: $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 삼각수를 이용하여 스티커를 붙여 나가는 활동을 통해 등차수열의 합을 구하는 방법을 이해할 수 있도록 하기 위한 것이다.

1. 5개

2. 6개

3. 1단계는 1개를 붙여야 한다. 2단계는 1단계의 스티커에 2개의 스티커를 더 붙여야 하므로 모두 $(1+2)$개, 3단계는 2단계의 스티커에 3개의 스티커를 더 붙여야 하므로 $(1+2+3)$개, $\cdots$
이와 같은 방식으로 10단계의 스티커는 모두 $(1+2+3+\cdots+10)$개이다.
$1+2+3+\cdots+10$
$=(1+10)+(2+9)+\cdots+(5+6)$
$=55$

교과서 130 쪽

등차수열의 합을 어떻게 구하는가?

탐구 활동 다음 그림과 같이 정삼각형 모양으로 스티커를 붙여 나갈 때, 사용된 스티커의 개수 1, 3, 6, 10, $\cdots$을 삼각수라고 한다. 이와 같은 방법으로 계속해서 스티커를 붙여 나간다고 할 때, 물음에 답하여 보자.

1. 4단계에서 스티커를 몇 개 더 붙여야 5단계가 되는가?
2. 5단계에서 스티커를 몇 개 더 붙여야 6단계가 되는가?
3. 10단계의 스티커의 개수를 구하는 방법에 대하여 말하여 보자.

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여 보자.

첫째항이 a, 공차가 d이고 제n항이 l인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l \quad \cdots\cdots ①$$

이고, ①에서 우변의 각 항을 역순으로 나타내면

$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \quad \cdots\cdots ②$$

이다.

①, ②를 변끼리 더하면

$$2S_n=\underbrace{(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)}_{n\text{개}}=n(a+l)$$

이므로

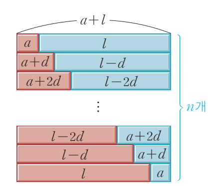
$$S_n=\frac{n(a+l)}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

이다.

한편 $l=a+(n-1)d$이므로 이것을 ③에 대입하여 정리하면

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

이다.



수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합
$a_1+a_2+\cdots+a_n$
을 기호로 나타낼 때에는 보통 S_n을 이용하여
$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$
과 같이 나타낸다.

지/도/자/료

등차수열의 합의 공식을 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있도록 한다. 예를 들어 세 자리 자연수 중에서 8의 배수의 개수와 이들의 합을 구하여 보자.
8의 배수를 $8N$(N은 자연수)으로 나타내면 $8N$은 세 자리 수이어야 하므로
$100\le 8N<1000$, $12.5\le N<125$
따라서 구하는 8의 배수는
8×13, 8×14, $\cdots$, 8×124
이것은 첫째항이 104이고 끝항이 992인 등차수열로 항의 개수는 $124-(13-1)=112$이다.
그러므로 구하는 합 S는

$$S=\frac{112\times(104+992)}{2}=61376$$

읽/기/자/료 천재 소년 가우스

아르키메데스(Archimedes ; ?B.C. 287~B.C. 212), 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)과 더불어 유사 이래 최고의 수학자라고 불리는 가우스(Gauss, K. F. ; 1777~1855)는 독일에서 석공의 외아들로 태어났다.
가우스가 초등학교에 다니던 10살 때, 선생님이 1시간쯤 걸릴 것으로 예상하고 '1에서 100까지의 수의 합'을 계산하도록 문제를 주었다. 그런데 학급에서 최연소인 가우스는 다음과 같이 계산하여 금방 답을 구하였다.

$$\begin{array}{rl} & 1+\ \ 2+\ \ 3+\cdots+\ 98+\ 99+100 \\ +) & 100+\ 99+\ 98+\cdots+\ \ 3+\ \ 2+\ \ 1 \\ \hline & 101+101+101+\cdots+101+101+101 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $101\times100\div2=5050$

가우스는 1795년에 대학에 입학하여 언어학과 수학 중에서 어느 것을 전공할 것인지 고민하다가, 다음 해에 정17각형의 작도법을 발견하고 나서 수학으로 결정하였다고 한다. 22살인 1799년 '대수학의 기본 정리'를 최초로 증명한 논문으로 박사 학위를 받았다.

교과서 131 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **등차수열의 합**
>
> 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은
>
> (1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때, $\dfrac{n(a+l)}{2}$
>
> (2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

보기 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10\{2\times2+(10-1)\times3\}}{2}=155$$

문제 9 다음 물음에 답하여라.

(1) 첫째항이 -3, 제10항이 15인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

(2) 첫째항이 8, 공차가 -2인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합을 구하여라.

(3) 등차수열의 합 $2+4+6+8+\cdots+200$을 구하여라.

(4) 등차수열의 합 $-7+(-10)+(-13)+(-16)+\cdots+(-52)$를 구하여라.

발전

문제 10 첫째항부터 제10항까지의 합이 -155, 첫째항부터 제15항까지의 합이 -120인 등차수열에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 첫째항부터 제20항까지의 합

(2) 첫째항부터 제n항까지의 합이 최소가 되도록 하는 n의 값

이제 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 알아보자.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a_1부터 제n항 a_n까지의 합을 S_n이라고 하면

$n=1$일 때, $S_1=a_1$

$n\ge2$일 때, $S_2=a_1+a_2=S_1+a_2$

$S_3=a_1+a_2+a_3=S_2+a_3$

$\vdots$

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=S_{n-1}+a_n$

이므로

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

이다.

$\underbrace{\overbrace{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}^{S_{n-1}}+a_n}_{S_n}$

첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 주어지면 일반항 a_n을 구할 수 있다.

9

목표| 등차수열의 합의 공식을 이용하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{10(-3+15)}{2}=\mathbf{60}$

(2) $\dfrac{20\{2\times8+(20-1)\times(-2)\}}{2}=\dfrac{20\times(-22)}{2}$

$=\mathbf{-220}$

(3) 등차수열 2, 4, 6, 8, …의 일반항을 a_n이라고 하면 첫째항과 공차가 모두 2이므로

$a_n=2+(n-1)\times2=2n$

$a_n=2n=200$에서 $n=100$

따라서 구하는 등차수열의 합은

$2+4+6+8+\cdots+200=\dfrac{100(2+200)}{2}=\mathbf{10100}$

(4) 등차수열 -7, -10, -13, -16, …의 일반항을 a_n이라고 하면 첫째항은 -7, 공차는 -3이므로

$a_n=-7+(n-1)\times(-3)=-3n-4$

$a_n=-3n-4=-52$에서 $n=16$

따라서 구하는 등차수열의 합은

$-7+(-10)+(-13)+(-16)$

$+\cdots+(-52)$

$=\dfrac{16\{-7+(-52)\}}{2}=\mathbf{-472}$

참고| 등차수열의 합을 구할 때, 문제에서 주어진 조건에 따라 적당한 공식을 선택하여 계산한다.

10

목표| 등차수열의 합의 공식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$\dfrac{10\{2a+(10-1)\times d\}}{2}=-155$에서 $10a+45d=-155$

$2a+9d=-31$ …… ①

$\dfrac{15\{2a+(15-1)\times d\}}{2}=-120$에서 $15a+105d=-120$

$a+7d=-8$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-29$, $d=3$

따라서 이 수열의 일반항 a_n은

$a_n=3n-32$

(1) 첫째항부터 제20항까지의 합은

$\dfrac{20\{2\times(-29)+(20-1)\times3\}}{2}=\dfrac{20(-58+57)}{2}$

$=\mathbf{-10}$

(2) $a_n=3n-32<0$에서 $n<10.666\cdots$

이므로 이 수열은 첫째항부터 제10항까지는 음수이고 제11항부터 양수로 이루어진 수열이다.

따라서 첫째항부터 **제10**항까지의 합이 최소가 된다.

교과서 132 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

수열의 합과 일반항 사이의 관계는 등차수열뿐만 아니라 모든 수열에서 성립한다.

수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

예제 03 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2-3n$일 때, 일반항 a_n을 구하고, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열임을 보여라.

풀이 $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2-3\times1=-2$ …… ①

$n\ge2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-3n)-\{(n-1)^2-3(n-1)\}=2n-4$ …… ②

②에 $n=1$을 대입하면 ①과 같으므로 이 수열의 일반항 a_n은 $a_n=2n-4$이다.

이때 $a_{n+1}-a_n=2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -2, 공차가 2인 등차수열이다.

문제 11 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=2n^2+3n$일 때, 일반항 a_n을 구하고, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열임을 보여라.

발전

문제 12 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2-n-1$일 때, 일반항 a_n을 구하여라.

창의 UP

다음은 프랑스의 수학자 드무아브르(de Moivre, A. ; 1667～1754)의 일화이다.

> 어느 날 드무아브르는 자신의 수면 시간이 매일 15분씩 길어진다는 것을 발견하였다. 그는 수면 시간이 24시간이 되는 날을 계산하고, 그날에 자신이 죽을 것이라고 예측하였는데 놀랍게도 그 날짜에 생을 마쳤다고 한다.

드무아브르는 매일 밤 12시에 잠이 들고, 어느 날의 수면 시간이 10시간이라고 할 때, 그날부터 생을 마칠 때까지 깨어 있는 시간의 합을 구하여라.

11

목표| 첫째항부터 제n항까지의 합이 상수항이 0인 n에 대한 2차식으로 주어진 수열의 일반항을 구하고, 이 수열은 등차수열임을 보일 수 있게 한다.

풀이| $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\times1^2+3\times1=5$ …… ①

$n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(2n^2+3n)-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}\\&=4n+1\end{aligned}$$ …… ②

②에 $n=1$을 대입하면 ①과 같으므로 이 수열의 일반항 a_n은 $a_n=4n+1$이다.

이때 $a_{n+1}-a_n=4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 4인 등차수열이다.

12

목표| 첫째항부터 제n항까지의 합이 상수항이 아닌 n에 대한 2차식으로 주어진 수열의 일반항을 구할 수 있게 한다.

풀이| $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2-1-1=-1$ …… ①

$n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(n^2-n-1)-\{(n-1)^2-(n-1)-1\}\\&=2n-2\end{aligned}$$ …… ②

따라서 이 수열의 일반항 a_n은

$a_1=-1,\ a_n=2n-2\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

창의 UP

출제 의도| 등차수열의 합을 수학자의 일화에 적용해 봄으로써 문제 해결력을 기르기 위한 것이다.

풀이| 깨어 있는 시간은 어느 날에는 14시간이고, 매일 $\frac{1}{4}$시간씩 줄어든다. 어느 날부터 깨어 있는 시간은 등차수열을 이루므로 어느 날을 1일로 하여 n일에 깨어 있는 시간을 a_n시간이라고 하면 $a_n=-\frac{1}{4}n+\frac{57}{4}$

$a_n=-\frac{1}{4}n+\frac{57}{4}=0$에서 $n=57$

따라서 생을 마칠 때까지 깨어 있는 시간의 합은

$\frac{57(14+0)}{2}=\mathbf{399}$ (시간)

지/도/자/료

1. 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 S_n은 상수항이 0인 n에 대한 이차식이다.

$$S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{d}{2}n^2+\left(a-\frac{1}{2}d\right)n$$

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$S_n=pn^2+q$ …… ①

인 수열은 첫째항이 $a=S_1=p+q$, 공차가 $d=2p$인 등차수열이다.

2. ①에서 S_n이 상수항이 0이 아닌 n에 대한 이차식 $S_n=pn^2+qn+r$인 경우에는

$a_1=S_1=p+q+r$

$a_2=S_2-S_1=(4p+2q+r)-(p+q+r)=3p+q$

이며, 둘째항 a_2부터 공차가 $d=2p$인 등차수열이 된다.

교과서 133 쪽

03 등비수열

● 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

등비수열이란 무엇인가?

생각 열기 이성계와 명주실

무학 대사는 이성계가 어느 정도의 인물인지를 알아보고자 이성계에게 질문하였다.
"명주실 한 가닥을 반으로 접어 두 가닥이 되도록 하고, 다시 반을 접어 네 가닥이 되도록 할 때, 같은 방법으로 30번 접으면 굵기는 얼마가 되겠습니까?"
그러자 이성계는 한 기둥을 가리키며
"저 기둥 정도가 될 것 같습니다."
라고 하였다. 당시 이성계가 가리킨 기둥은 명주실을 약 27번 접은 굵기였다고 한다.

탐구 활동 생각 열기의 명주실에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 다음 표는 명주실을 접는 횟수에 따른 명주실의 가닥수를 나타낸 것이다. 표를 완성하여 보자.

접는 횟수	1	2	3	4	5	6	7
가닥수	2	4	8				

2. 1의 표에서 명주실의 가닥수를 차례로 나열하고, 어떤 규칙이 있는지 말하여 보자.

수열

$$2,\ \underset{\times 2}{\frown}\ 4,\ \underset{\times 2}{\frown}\ 8,\ \underset{\times 2}{\frown}\ 16,\ \underset{\times 2}{\frown}\ 32,\ \cdots$$

는 첫째항 2부터 차례로 일정한 수 2를 곱하여 얻은 수열이다.

이와 같이 첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어지는 수열을 **등비수열**이라 하고, 그 일정한 수를 **공비**라고 한다.

따라서 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 제n항 a_n과 제$(n+1)$항 a_{n+1} 사이에는

$$a_{n+1}=ra_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

인 관계가 성립한다.

● 등비수열(等比數列)은 영어로 geometric sequence, 공비(公比)는 영어로 common ratio라고 한다.

● $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r\ (a_n\neq 0)$

03 등비수열

소단원 지도 목표

① 등비수열과 공비의 뜻을 알게 한다.
② 등비수열의 일반항을 구할 수 있고, 이를 활용할 수 있게 한다.
③ 등비중항의 뜻을 알고, 이를 이용하여 등비수열의 임의의 두 항을 알 때 다른 항을 구할 수 있게 한다.
④ 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있게 한다.
⑤ 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하게 한다.
⑥ 등비수열의 합을 이용하여 원리합계와 같은 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 등비수열은 이웃하는 항 사이의 비가 일정한 수열임을 강조하여 지도한다.

2. 지수가 0인 수는 Ⅳ. 지수와 로그 단원에서 처음 다루므로 등비수열의 일반항을 나타낼 때, 공비 r에 대하여 r^0은 지도하지 않도록 주의한다.

3. 등비수열의 합에서 각 항이 문자로 주어진 경우에는 공비 r가 $r\neq1$인 경우와 $r=1$인 경우로 나누어 생각하도록 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

- 등비수열(等比數列, geometric sequence)
- 공비(公比, common ratio)
- 등비중항(等比中項, geometric means)

생각 열기 참/고/자/료

일화의 상황을 실제로 계산해 보자. 명주실을 한 번 접으면 2가닥, 2번 접으면 4, 즉 2의 제곱 가닥, 3번 접으면 8, 즉 2의 세제곱 가닥, …이다. 이런 식으로 계산하면 명주실을 30번 접었을 때에는 2의 30제곱 가닥이 된다. 2를 30번 곱한 값은 10억 7374만 1824로, 명주실 100가닥의 단면의 넓이가 $1\,\mathrm{mm}^2$라고 하면 30번 접은 명주실의 단면의 넓이는 약 $10.7\,\mathrm{m}^2$이다. 즉, 반지름이 약 1.85 m인 원의 넓이와 같다. 따라서 이성계가 가리킨 기둥의 단면이 원이라면 이 원의 지름은 약 3.7 m인 것이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 각 단계에서 명주실의 가닥수를 나열 하였을 때 차례로 일정한 수를 곱하여 얻어진다는 규칙을 이용하여 등비수열의 의미를 이해하게 하기 위한 것이다.

1.

접는 횟수	1	2	3	4	5	6	7
가닥수	2	4	8	**16**	**32**	**64**	**128**

2. **2, 4, 8, 16, 32, 64, 128**
2부터 시작하여 차례로 2배가 된다.

1

목표| 수열 중에서 등비수열인 것을 찾고 등비수열의 공비를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 수열 2, 4, 6, 8, 10, $\cdots$에서

$\frac{4}{2} \neq \frac{6}{4}$

이므로 **등비수열이 아니다.**

(2) 수열 18, 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\cdots$는 첫째항 18부터 차례로 일정한 수 $\frac{1}{3}$을 곱하여 얻은 수열이므로 **등비수열이다.** 이때 공비는 $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$이다.

(3) 수열 1, -2, 4, -8, 16, $\cdots$은 첫째항 1부터 차례로 일정한 수 -2를 곱하여 얻은 수열이므로 **등비수열이다.** 이때 공비는 $\boldsymbol{-2}$이다.

(4) 수열 1, 4, 9, 16, 25, $\cdots$에서

$\frac{4}{1} \neq \frac{9}{4}$

이므로 **등비수열이 아니다.**

교과서 134 쪽

보기 (1) 수열 2, 6, 18, 54, 162, $\cdots$는 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이다.

(2) 수열 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\cdots$은 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

문제 **1** 다음 수열 중에서 등비수열인 것을 찾고, 등비수열인 것은 공비를 구하여라.

(1) 2, 4, 6, 8, 10, $\cdots$ (2) 18, 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\cdots$

(3) 1, -2, 4, -8, 16, $\cdots$ (4) 1, 4, 9, 16, 25, $\cdots$

이제 등비수열의 일반항을 구하여 보자.

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a_1 r = ar^1$$
$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2$$
$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3$$
$$\vdots$$

이므로 일반항 a_n은

$$a_1 = a,\ a_n = ar^{n-1}\ (n=2, 3, 4, \cdots)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

등비수열의 일반항

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은

$$a_1 = a,\ a_n = ar^{n-1}\ (n=2, 3, 4, \cdots)$$

보기 (1) 첫째항이 5, 공비가 -2인 등비수열의 일반항 a_n은

$$a_1 = 5,\ a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}\ (n=2, 3, 4, \cdots)$$

(2) 수열 -2, 2, -2, 2, $\cdots$는 첫째항이 -2, 공비가 -1인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$$a_1 = -2,\ a_n = -2 \cdot (-1)^{n-1}\ (n=2, 3, 4, \cdots)$$

문제 **2** 다음 등비수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) 첫째항이 -2, 공비가 3 (2) 첫째항이 12, 공비가 $-\frac{1}{3}$

(3) $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32, $\cdots$ (4) 1, -2, 4, -8, 16, $\cdots$

2

목표| 첫째항과 공비를 이용하여 등차수열의 일반항을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 첫째항이 -2, 공비가 3이므로 구하는 등비수열의 일반항 a_n은

$$\boldsymbol{a_1 = -2,\ a_n = -2 \cdot 3^{n-1}\ (n=2, 3, 4, \cdots)}$$

(2) 첫째항이 12, 공비가 $-\frac{1}{3}$이므로 구하는 등비수열의 일반항 a_n은

$$\boldsymbol{a_1 = 12,\ a_n = 12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ (n=2, 3, 4, \cdots)}$$

(3) 수열 $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32, $\cdots$에서 첫째항이 $\frac{1}{8}$, 공비가 4이므로 구하는 등비수열의 일반항 a_n은

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{8},\ a_n = \frac{1}{8} \cdot 4^{n-1}\ (n=2, 3, 4, \cdots)}$$

(4) 수열 1, -2, 4, -8, 16, $\cdots$에서 첫째항이 1, 공비가 -2이므로 구하는 등비수열의 일반항 a_n은

$$\boldsymbol{a_1 = 1,\ a_n = (-2)^{n-1}\ (n=2, 3, 4, \cdots)}$$

3

목표| 주어진 두 항을 이용하여 등비수열의 일반항을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3 = ar^2 = 24$ $\cdots\cdots$ ①

$a_6 = ar^5 = 192$ $\cdots\cdots$ ②

②를 ①로 변끼리 나누면

$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{192}{24}$이므로 $r^3 = 8$, $r = 2$

$r=2$를 ①에 대입하면 $4a = 24$, $a = 6$

따라서 구하는 일반항 a_n은

$$\boldsymbol{a_1 = 6,\ a_n = 6 \cdot 2^{n-1}\ (n=2, 3, 4, \cdots)}$$

(2) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2 = ar = -6$ $\cdots\cdots$ ①

$a_5 = ar^4 = 162$ $\cdots\cdots$ ②

②를 ①로 변끼리 나누면

$\frac{ar^4}{ar} = -\frac{162}{6}$이므로 $r^3 = -27$, $r = -3$

예제 01 제2항이 15, 제5항이 405인 등비수열의 일반항 a_n을 구하여라.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$$a_2=ar^{2-1}=ar=15 \quad \cdots\cdots ①$$
$$a_5=ar^{5-1}=ar^4=405 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=5$, $r=3$

따라서 구하는 일반항 a_n은 $a_1=5$, $a_n=5\cdot 3^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$이다.

②÷①에서 $r^3=27$, $r=3$

답 $a_1=5$, $a_n=5\cdot 3^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$

문제 3 다음 등비수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $a_3=24$, $a_6=192$ (2) $a_2=-6$, $a_5=162$

문제 4 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이고 $a_3=1$, $a_6=\frac{1}{8}$일 때, $\frac{1}{256}$은 제 몇 항인지 구하여라.

한편 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 **등비중항**이라고 한다. 이때 b가 a와 c의 등비중항이면 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$이므로 $b^2=ac$이다.

역으로 $b^2=ac$이면 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$이므로 b는 a와 c의 등비중항이다.

즉, b가 a와 c의 등비중항이기 위한 필요충분조건은

$$b^2=ac$$

이다.

b가 a와 c의 등비중항일 때, $b^2=ac$에서 $b=\pm\sqrt{ac}$이다. 특히 $b=\sqrt{ac}$일 때, b는 a와 c의 기하평균이다.

보기 세 수 -8, x, -2가 이 순서대로 등비수열을 이루면 x는 -8과 -2의 등비중항이므로

$$x^2=(-8)\times(-2)=16,\ x=\pm 4$$

문제 5 다음 수열이 등비수열이 되도록 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

(1) -3, a, -48, b, $\cdots$ (2) a, 28, b, $7\cdots$

발전 **문제 6** 두 수 -162와 $\frac{2}{3}$ 사이에 네 수를 넣어 전체가 등비수열이 되도록 할 때, 이 네 수를 순서대로 구하여라.

$r=-3$을 ①에 대입하면 $-3a=-6$, $a=2$

따라서 구하는 일반항 a_n은

$\boldsymbol{a_1=2,\ a_n=2\cdot(-3)^{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)}$

4

목표| 등비수열의 일반항을 이용하여 등비수열의 항을 구할 수 있게 한다.

풀이| 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=1 \quad \cdots\cdots ①$

$a_6=ar^5=\frac{1}{8} \quad \cdots\cdots ②$

②를 ①로 변끼리 나누면 $r^3=\frac{1}{8}$, $r=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$을 ①에 대입하면 $a=4$

이 수열의 일반항 a_n은

$a_1=4$, $a_n=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$

$4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{256}$에서

$4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4\cdot\frac{1}{1024}=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

따라서 $n-1=10$에서 $n=11$이므로 $\frac{1}{256}$은 이 수열의 **제11항**이다.

5

목표| 등비중항을 이용하여 주어진 수열의 항을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) a는 -3과 -48의 등비중항이므로

$a^2=(-3)\times(-48)=144$에서 $a=\pm 12$

(i) $a=12$일 때 이 수열의 공비는 -4이므로 $b=(-48)\times(-4)=192$

(ii) $a=-12$일 때 이 수열의 공비는 4이므로 $b=(-48)\times 4=-192$

따라서 $\begin{cases} \boldsymbol{a=12} \\ \boldsymbol{b=192} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \boldsymbol{a=-12} \\ \boldsymbol{b=-192} \end{cases}$이다.

(2) b는 28과 7의 등비중항이므로

$b^2=28\times 7=196$에서 $b=\pm 14$

(i) $b=14$일 때 이 수열의 공비는 $\frac{1}{2}$이므로

$a\times\frac{1}{2}=28$에서 $a=56$

(ii) $b=-14$일 때 이 수열의 공비는 $-\frac{1}{2}$이므로

$a\times\left(-\frac{1}{2}\right)=28$에서 $a=-56$

따라서 $\begin{cases} \boldsymbol{a=56} \\ \boldsymbol{b=14} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \boldsymbol{a=-56} \\ \boldsymbol{b=-14} \end{cases}$이다.

6

목표| 특정한 두 수 사이에 여러 수를 넣어 등비수열을 이루도록 하는 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 두 수 사이에 네 수를 넣어 등비수열이 될 때, 이 수열의 공비를 r라고 하면 구하는 네 수는

$-162r$, $-162r^2$, $-162r^3$, $-162r^4$

로 놓을 수 있다. 즉,

-162, $-162r$, $-162r^2$, $-162r^3$, $-162r^4$, $\frac{2}{3}$

는 공비가 r인 등비수열이다.

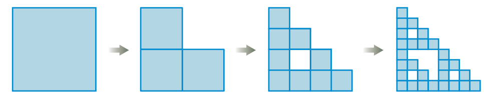
$-162r^4\cdot r=\frac{2}{3}$에서 $r^5=-\frac{1}{243}$, $r=-\frac{1}{3}$

따라서 구하는 네 수는 **54, −18, 6, −2**이다.

교과서 136 쪽

등비수열의 합을 어떻게 구하는가?

탐구 활동 다음 그림과 같이 색종이에 나타난 모든 정사각형에 4등분하는 선을 그리고 오른쪽 위에 생긴 정사각형을 오려 내는 과정을 반복하였다. 물음에 답하여 보자.



1 단계　　2 단계　　3 단계　　4 단계

1. 1단계부터 4단계까지 각 단계에 남아 있는 정사각형의 개수를 나열하여 보자.

2. **1**에서 나열한 수의 합을 S라고 할 때, 다음은 S의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

$$\begin{array}{rl} \square S= & \quad\;\; 3+3^2+3^3+3^4 \\ -\big)\quad S= & 1+3+3^2+3^3 \\ \hline 2S= & 3^4-1 \end{array} \Rightarrow S=\square$$

등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여 보자.

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} \qquad \cdots\cdots ①$$

이고, ①의 양변에 r를 곱하면

$$rS_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \qquad \cdots\cdots ②$$

이다.

❶ ①에서 ②를 변끼리 빼면

$$(1-r)S_n=a-ar^n=a(1-r^n)$$

이므로 S_n은 다음과 같다.

$r\neq1$일 때, $\quad S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r=1$일 때, ①에서 $\quad S_n=\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{개}}=na$

❷ $r>1$일 때에는 $S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$, $r<1$일 때에는 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$을 이용하면 편리하다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 단계별로 남아 있는 정사각형 모양의 색종이의 개수의 합을 구하는 과정을 통하여 등비수열의 합을 구하는 방법을 생각해 볼 수 있는 기회를 제공하기 위한 것이다.

1. 1, 3, 9, 7

2.

$$\begin{array}{rl} \boxed{3}S= & \quad\;\; 3+3^2+3^3+3^4 \\ -\big)\quad S= & 1+3+3^2+3^3 \\ \hline 2S= & 3^4-1 \end{array} \Rightarrow S=\boxed{40}$$

본문 해설

❶ S_n-rS_n에서 같은 항끼리 빼지 않고

$$\begin{aligned} &S_n-rS_n \\ &=(a-ar)+(ar-ar^2)+(ar^2-ar^3)+\cdots \\ &\quad+(ar^{n-1}-ar^n) \\ &=a(1-r)+ar(1-r)+ar^2(1-r)+\cdots \\ &\quad+ar^{n-1}(1-r) \end{aligned}$$

과 같이 계산하면

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}$$

으로 다시 원위치가 되므로 S_n을 구할 수 없다. 그러나 같은 값끼리 뺄셈하여 지우고 나면 우변에 남아 있는 항이 $a-ar^n$이 되므로 S_n을 구할 수 있다.

❷ $r\neq1$일 때 첫째항부터 제n항까지의 합은 다음과 같이 계산하면 분모와 분자가 모두 양의 값이 되어 계산하기 편리하다.

(ⅰ) $r>1$이면 $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(ⅱ) $r<1$이면 $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

지/도/자/료 등비수열의 합을 구하는 여러 가지 방법

등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \text{ (단, } r\neq1)$$

에 대하여

1. $\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{ar}{r-r^2}=\dfrac{ar^2}{r^2-r^3}=\cdots=\dfrac{ar^{n-1}}{r^{n-1}-r^n}$

$$=\frac{a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}}{1-r^n}$$

에서 $\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{S_n}{1-r^n}$이므로 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. $S_n=a+r(a+ar+\cdots+ar^{n-1})-ar^n=a+rS_n-ar^n$에서

$S_n(1-r)=a(1-r^n)$이므로 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

3. $1-r^n=(1-r)(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})$이므로

$$S_n=a(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

7

목표| 등비수열의 합의 공식을 이용하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{2\cdot(3^{10}-1)}{3-1}=\mathbf{3^{10}-1}$

(2) $\dfrac{3\cdot\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{20}\right\}}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=2\cdot\left(1-\dfrac{1}{2^{20}}\right)=\mathbf{2-\dfrac{1}{2^{19}}}$

교과서 137 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

(1) $r\neq1$일 때, $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, na

보기 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=2^{10}-1=1023$$

문제 7 다음 물음에 답하여라.

(1) 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

(2) 첫째항이 3, 공비가 $-\dfrac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제20항까지의 합을 구하여라.

(3) 등비수열의 합 $2+(-4)+8+(-16)+\cdots+(-1024)$를 구하여라.

(4) 등비수열의 합 $2+2\sqrt{2}+4+4\sqrt{2}+\cdots+16\sqrt{2}$를 구하여라.

발전 **문제 8** 첫째항부터 제4항까지의 합이 40, 첫째항부터 제8항까지의 합이 3280인 등비수열의 공비가 양수일 때, 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

예제 02 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=3\cdot2^n-3$일 때, 일반항 a_n을 구하고, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열임을 보여라.

풀이 $n=1$일 때, $a_1=S_1=3\cdot2^1-3=3$

$n\geq2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}=(3\cdot2^n-3)-(3\cdot2^{n-1}-3)=3\cdot2^{n-1}$

따라서 이 수열의 일반항 a_n은 $a_1=3$, $a_n=3\cdot2^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$이다.

이때 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이다.

문제 9 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$일 때, 일반항 a_n을 구하고, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열임을 보여라.

8

목표 | 등비수열의 합의 공식을 이용하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 $r(r>0)$라고 하면

$$\frac{a(r^4-1)}{r-1}=40 \quad\cdots\cdots ①$$

$$\frac{a(r^8-1)}{r-1}=3280 \quad\cdots\cdots ②$$

②를 ①로 변끼리 나누면

$$\frac{r^8-1}{r^4-1}=82,\ \frac{(r^4-1)(r^4+1)}{r^4-1}=82$$

$r^4+1=82$, $r^4=81$

이므로 $r=3$

$r=3$을 ①에 대입하면 $a=1$

따라서 이 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{1\cdot(3^{10}-1)}{3-1}=\mathbf{\frac{1}{2}(3^{10}-1)}$$

(3) 등비수열 2, -4, 8, -16, $\cdots$의 일반항을 a_n이라고 하면 첫째항은 2, 공비는 -2이므로

$a_1=2$, $a_n=2\cdot(-2)^{n-1}$

$a_n=2\cdot(-2)^{n-1}=-1024$에서 $(-2)^{n-1}=-512$

$(-2)^{n-1}=(-2)^9$이므로 $n=10$

따라서 구하는 등비수열의 합은

$2+(-4)+8+(-16)+\cdots+(-1024)$

$$=\frac{2\cdot\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=\mathbf{-682}$$

(4) 등비수열 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라고 하면 첫째항은 2, 공비는 $\sqrt{2}$이므로

$a_1=2$, $a_n=2\cdot(\sqrt{2})^{n-1}$

$a_n=2\cdot(\sqrt{2})^{n-1}=16\sqrt{2}$에서

$2\cdot(\sqrt{2})^{n-1}=2\cdot(\sqrt{2})^7$이므로 $n=8$

따라서 구하는 등비수열의 합은

$2+2\sqrt{2}+4+4\sqrt{2}+\cdots+16\sqrt{2}$

$$=\frac{2\cdot\{(\sqrt{2})^8-1\}}{\sqrt{2}-1}=\frac{30}{\sqrt{2}-1}=\mathbf{30+30\sqrt{2}}$$

9

목표 | 첫째항부터 제n항까지의 합이 주어진 등비수열의 일반항을 구할 수 있게 한다.

풀이 | $n=1$일 때, $a_1=S_1=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^1=\dfrac{1}{3}$

$n\geq2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}-\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

따라서 이 수열의 일반항 a_n은

$$\mathbf{a_1=\frac{1}{3},\ a_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)}$$

이때 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2}{3}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{3}$이고, 공비가 $\dfrac{2}{3}$인 등비수열이다.

교과서 138 쪽

등비수열의 합을 이용하여 적립금의 원리합계와 같은 실생활 문제를 해결하여 보자.

예제 03 연이율이 r이고 1년마다 복리로 매년 초에 a원씩 적립할 때, n년째 연말의 원리합계를 구하여라.

❶ 원리합계는 원금과 이자를 합한 금액이고, 복리법은 이자를 원금에 가산하여 그 합계액을 다음 기간의 원금으로 하는 이자 계산 방법이다.

풀이 n년째 연말까지 매년 초에 a원씩 적립한 금액의 원리합계는 다음과 같다.

	1년 초	2년 초	3년 초	4년 초	…	n년 초	n년 말
제 1 회	a	$a(1+r)$	$a(1+r)^2$	$a(1+r)^3$	…	$a(1+r)^{n-1}$	$a(1+r)^n$
제 2 회		a	$a(1+r)$	$a(1+r)^2$	…	$a(1+r)^{n-2}$	$a(1+r)^{n-1}$
제 3 회			a	$a(1+r)$	…	$a(1+r)^{n-3}$	$a(1+r)^{n-2}$
⋮					⋮		⋮
제 n 회						a	$a(1+r)$

원리합계의 총합을 S_n이라고 하면

$$S_n=a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$$

이것은 첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$S_n=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}\text{(원)}$$

답 $\dfrac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$ 원

문제 10 연이율이 8 %이고 1년마다 복리로 매년 초에 10만 원씩 적립할 때, 10년째 연말의 원리합계를 구하여라. (단, $1.08^{10}=2.16$으로 계산한다.)

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

카메라의 F수 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, …은

$$\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ 4\sqrt{2},\ \cdots \quad \cdots\cdots ①$$

에서 $\sqrt{2}$를 1.4로 계산한 것이다. 수열 ①을 $\{a_n\}$이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 일반항 a_n을 구하여라.

(2) $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$의 값을 구하여라.

본문 해설

❶ 원리합계를 계산하는 방법에는 단리법과 복리법이 있다. 원금 a원을 연이율 r로 n년간 예금했을 때 원리합계 S는

① 단리법: $S=a(1+nr)$

② 복리법: $S=a(1+r)^n$

10

목표| 등비수열의 합을 이용하여 적립금의 원리합계를 구할 수 있게 한다.

풀이| 10년째 연말까지 매년 초에 10만 원씩 적립한 금액의 원리합계는 다음과 같다.

	1년 초	2년 초	3년 초	4년 초	…	10년 초	1년 말
제 1 회	10	10× 1.08	10×1.08^2	10×1.08^3	…	10×1.08^9	10×1.08^{10}
제 2 회		10	10× 1.08	10×1.08^2	…	10×1.08^8	10×1.08^9
⋮					⋮		⋮
제 10 회						10	10× 1.08

원리합계의 총합을 S라고 하면

$$S=100000\times 1.08+100000\times 1.08^2+100000\times 1.08^3+\cdots+100000\times 1.08^{10}$$

이것은 첫째항이 100000×1.08, 공비가 1.08인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$S=\frac{100000\times 1.08\times(1.08^{10}-1)}{1.08-1}$$
$$=\frac{100000\times 1.08\times(2.16-1)}{1.08-1}$$
$$=\mathbf{1566000}\text{(원)}$$

단원 과제

목표| 수열의 규칙을 찾고, 이를 이용하여 수열의 일반항과 주어진 항의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{2}$, 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$$\boldsymbol{a_1=\sqrt{2},\ a_n=(\sqrt{2})^n\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)}$$

(2) $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=2+4+8+16+32$

$$=\frac{2\cdot(2^5-1)}{2-1}=\mathbf{62}$$

지/도/자/료

일정한 기간마다 일정한 금액을 모으는 적립금은 매기의 초에 돈을 넣는 기초불과 매기의 말에 돈을 넣는 기말불이 있다. 예제 03의 경우가 기초불의 원리합계를 구하는 경우이고, 기말불의 원리합계는 다음과 같이 구할 수 있다.

연이율이 r이고 1년마다 복리로 매년 말에 a원씩 적립할 때, n년째 연말의 원리합계를 S라고 하자.

1년 말	2년 말	…	$(n-1)$년 말	n년 말	원리합계
a ― $(n-1)$년 간 →					$a(1+r)^{n-1}$ +
	a ― $(n-2)$년 간 →				$a(1+r)^{n-2}$ +
		⋮			⋮ +
			a ― 1년 간 →		$a(1+r)$ +
				a →	a

따라서 $S=\dfrac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}$이다.

교과서 139 쪽

중단원 기초

[해답 p.227]

수준별 학습

1 다음 수열의 일반항 a_n과 제10항을 구하여라.

01 수열의 뜻 — 일반항

(1) 3, 3, 3, 3, ⋯　(2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$

(3) −1, 2, −3, 4, ⋯　(4) 2·4, 3·5, 4·6, 5·7, ⋯

2 다음 중에서 등차수열과 등비수열을 각각 찾아라.

02 등차수열　03 등비수열

㉠ −9, −4, 1, 6, 11, ⋯　㉡ −1, 3, −5, 7, −9, ⋯

㉢ $24, 12, 6, 3, \frac{3}{2}, \cdots$　㉣ 1, −3, −7, −11, −15, ⋯

㉤ 2, −4, 8, −16, 32, ⋯　㉥ $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \cdots$

3 다음 수열의 일반항 a_n과 제20항을 구하여라.

02 등차수열　03 등비수열 — 등차수열과 등비수열의 일반항

(1) 5, 7, 9, 11, ⋯　(2) 15, 13, 11, 9, ⋯

(3) $-3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \cdots$　(4) 1, 5, 25, 125, ⋯

4 다음을 구하여라.

02 등차수열　03 등비수열 — 등차수열과 등비수열의 합

(1) 첫째항이 15, 공차가 −3인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합

(2) 첫째항이 −3, 공비가 4인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

5 다음은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=2n^2-n$일 때, 일반항 a_n을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

02 등차수열 — 수열의 합과 일반항 사이의 관계

$n=1$일 때, $a_1=S_1=\square$ ⋯⋯ ①

$n\ge2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-n-\{2(\square)^2-(\square)\}$

$=\square$ ⋯⋯ ②

②에 $n=1$을 대입하면 ①과 같으므로 일반항 a_n은 $a_n=\square$이다.

중/단/원 기초

1

목표| 주어진 수열의 규칙을 찾아 일반항을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a_1=3$, $a_2=3$, $a_3=3$, ⋯이므로 일반항은 $\boldsymbol{a_n=3}$이고, $\boldsymbol{a_{10}=3}$이다.

(2) $a_1=1=\frac{1}{1}$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1}{3}$, ⋯이므로 일반항은 $\boldsymbol{a_n=\frac{1}{n}}$이고, $\boldsymbol{a_{10}=\frac{1}{10}}$이다.

(3) $a_1=-1=(-1)^1\cdot1$, $a_2=2=(-1)^2\cdot2$, $a_3=-3=(-1)^3\cdot3$, ⋯이므로 일반항은 $\boldsymbol{a_n=(-1)^n\cdot n}$이고, $\boldsymbol{a_{10}=10}$이다.

(4) $a_1=2\cdot4=(1+1)\cdot(1+3)$, $a_2=(2+1)\cdot(2+3)$, $a_3=(3+1)\cdot(3+3)$, ⋯이므로 일반항은 $\boldsymbol{a_n=(n+1)(n+3)}$이고, $\boldsymbol{a_{10}=143}$이다.

2

목표| 여러 가지 수열 중에서 등차수열과 등비수열을 구분할 수 있게 한다.

풀이| ㉠ 첫째항이 −9이고, 공차가 5인 **등차수열**

㉢ 첫째항이 24이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 **등비수열**

㉣ 첫째항이 1이고, 공차가 −4인 **등차수열**

㉤ 첫째항이 2이고, 공비가 −2인 **등비수열**

3

목표| 등차수열과 등비수열의 일반항과 특정한 항을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 첫째항이 5, 공차가 2인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$\boldsymbol{a_n=2n+3,\ a_{20}=43}$

(2) 첫째항이 15, 공차가 −2인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$\boldsymbol{a_n=-2n+17,\ a_{20}=-23}$

(3) 첫째항이 −3, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$\boldsymbol{a_1=-3,\ a_n=-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n=2, 3, 4, \cdots),}$

$\boldsymbol{a_{20}=-\frac{3}{2^{19}}}$

(4) 첫째항이 1, 공비가 5인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$\boldsymbol{a_1=1,\ a_n=5^{n-1}\ (n=2, 3, 4, \cdots),\ a_{20}=5^{19}}$

4

목표| 등차수열과 등비수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{20\{2\times15+(20-1)\times(-3)\}}{2}=\boldsymbol{-270}$

(2) $\frac{(-3)\cdot(4^{10}-1)}{4-1}=1-4^{10}=\boldsymbol{1-2^{20}}$

5

목표| 합이 주어진 등차수열의 일반항을 구할 수 있게 한다.

풀이| $n=1$일 때, $a_1=S_1=\boxed{\mathbf{1}}$ ⋯⋯ ①

$n\ge2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-n-\{2(\boxed{\boldsymbol{n-1}})^2-(\boxed{\boldsymbol{n-1}})\}$

$=\boxed{\boldsymbol{4n-3}}$ ⋯⋯ ②

②에 $n=1$을 대입하면 ①과 같으므로 일반항 a_n은 $a_n=\boxed{\boldsymbol{4n-3}}$이다.

중/단/원 기본

1

목표| 두 항의 합을 이용하여 등차수열의 제20항을 구할 수 있게 한다.

풀이| 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$(a+d)+(a+4d)=26$

$(a+12d)+(a+15d)=114$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ d=4$

따라서 이 수열의 일반항 a_n은 $a_n=4n-1$

이므로 $a_{20}=\mathbf{79}$

2

목표| 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{10(9+27)}{2}=\mathbf{180}$

(2) $\dfrac{7\{15+(-9)\}}{2}=\mathbf{21}$

(3) $\dfrac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\mathbf{\dfrac{1023}{1024}}$

(4) $\dfrac{3\{1-(-2)^8\}}{1-(-2)}=\mathbf{-255}$

3

목표| 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 구하는 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$\dfrac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=10,\ \dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=195$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-12,\ d=7$

따라서 이 수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$\dfrac{20\{2\cdot(-12)+(20-1)\cdot 7\}}{2}=\mathbf{1090}$

(2) 구하는 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}=-9,\ \dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=63$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3,\ r=-2$

따라서 이 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\dfrac{-3\cdot\{(-2)^{10}-1\}}{-2-1}=\mathbf{1023}$

교과서 140 쪽

중단원 기본

[해답 p.227]

수준별 학습

1 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이고 $a_2+a_5=26,\ a_{13}+a_{16}=114$일 때, a_{20}의 값을 구하여라.

02 등차수열
등차수열의 일반항

2 다음 합을 구하여라.

(1) $9+11+13+\cdots+27$ (2) $15+11+7+\cdots+(-9)$

(3) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{1024}$ (4) $3+(-6)+12+\cdots+(-384)$

02 등차수열 03 등비수열
등차수열과 등비수열의 합

3 다음을 구하여라.

(1) 첫째항부터 제5항까지의 합이 10, 첫째항부터 제10항까지의 합이 195인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합

(2) 첫째항부터 제3항까지의 합이 -9, 첫째항부터 제6항까지의 합이 63인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

02 등차수열 03 등비수열
등차수열과 등비수열의 합

4 두 수 5와 180 사이에 세 수를 넣어 전체가 등비수열이 되도록 할 때, 이 세 수를 순서대로 구하여라.

03 등비수열
등비중항

5 연이율이 10 %이고 1년마다 복리로 매년 초에 5만 원씩 적립할 때, 20년째 연말의 원리합계를 구하여라. (단, $1.1^{20}=6.7$로 계산한다.)

03 등비수열
원리합계

4

목표| 특정한 두 수 사이에 여러 수를 넣어 등비수열을 이루도록 하는 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 구하는 세 수는 $5r,\ 5r^2,\ 5r^3$으로 놓을 수 있다.

즉, $5,\ 5r,\ 5r^2,\ 5r^3,\ 180$은 공비가 r인 등비수열이다.

$5r^4=180$에서 $r^4=36,\ r=\pm\sqrt{6}$

$r=\sqrt{6}$이면 구하는 세 수는 $\mathbf{5\sqrt{6},\ 30,\ 30\sqrt{6}}$

$r=-\sqrt{6}$이면 구하는 세 수는 $\mathbf{-5\sqrt{6},\ 30,\ -30\sqrt{6}}$

5

목표| 등비수열의 합을 이용하여 적립금의 원리합계를 구할 수 있게 한다.

풀이| 20년째 말까지 매년 초에 5만 원씩 적립한 금액의 원리합계의 총합을 S라고 하면

$S=50000\times1.1+50000\times1.1^2+\cdots+50000\times1.1^{20}$

$=\dfrac{50000\times1.1\times(1.1^{20}-1)}{1.1-1}=\mathbf{3135000}$**(원)**

교과서 141 쪽

중단원 실력

[해답 p.228]

수준별 학습

1 오른쪽 표에서 모든 가로줄과 세로줄이 각각 등차수열을 이룰 때, ㉠, ㉡에 들어갈 알맞은 수를 구하여라.

1	2				
		㉠			
			㉡		
-7					
					21

02 등차수열

2 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 n에 관한 이차식 pn^2+qn+r (p, q, r는 상수)일 때, 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이기 위한 필요충분조건을 구하여라.

02 등차수열
수열의 합과 일반항 사이의 관계

3 수열 1, 11, 111, 1111, $\cdots$의 일반항 a_n을 구하여라.

03 등비수열
등비수열의 합

4 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 세 수 S_5, $S_{10}-S_5$, $S_{15}-S_{10}$은 이 순서대로 어떤 수열을 이루는지 말하여라.

03 등비수열

5 은행에서 2014년 초에 1500만 원을 빌리고 그해 말부터 15년 동안 갚아 나가려고 한다. 매년 전년도보다 1 %씩 많은 돈을 갚기로 한다면 2014년 말에 갚는 돈은 얼마인지 구하여라. (단, 연이율이 1 %이고 1년마다 복리로 계산한다.)

03 등비수열
원리합계

중/단/원 실력

1

목표| 등차수열을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 가로 첫 번째 줄은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열이다. 세로 첫 번째 줄의 수열을 $\{a_n\}$이라고 하면 $a_1=1$, $a_5=-7$이므로 $a_n=-2n+3$이다. 세로 6번째 줄의 수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 $b_1=6$, $b_6=21$이므로 $b_n=3n+3$이다.

따라서 ㉠은 3이고, ㉡은 7이다.

1	2	3	4	5	6
-1					9
-3		㉠			12
-5			㉡		15
-7					18
					21

2

목표| 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계를 알게 한다.

풀이| $n=1$일 때, $a_1=S_1=p+q+r$

$n\geq 2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}=2pn-p+q$ $\cdots\cdots$ ①

①에 $n=1$을 대입하면 $p+q$이므로 $\{a_n\}$이 등차수열이기 위한 필요충분조건은 $\boldsymbol{r=0}$

3

목표| 수열의 규칙을 찾아 일반항을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a_1=1=\dfrac{10^1-1}{9}$, $a_2=11=\dfrac{10^2-1}{9}$,

$a_3=\dfrac{10^3-1}{9}$, $a_4=1111=\dfrac{10^4-1}{9}$, $\cdots$

이므로 이 수열의 일반항 a_n은

$$\boldsymbol{a_n=\frac{10^n-1}{9}}$$

4

목표| 등비수열의 합을 이용하여 주어진 세 수가 이루는 수열을 판별할 수 있게 한다.

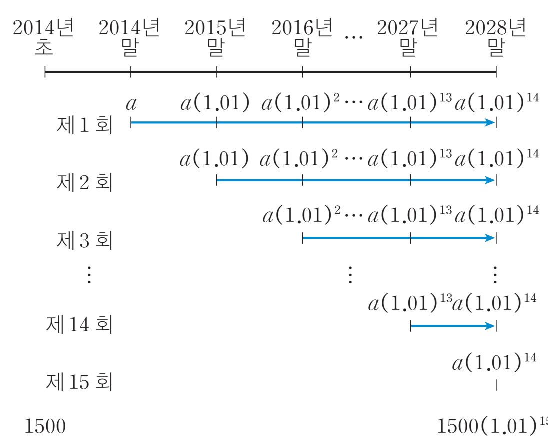
풀이| 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $\dfrac{S_{10}-S_5}{S_5}=\dfrac{S_{15}-S_{10}}{S_{10}-S_5}=r^5$이므로

세 수 S_5, $S_{10}-S_5$, $S_{15}-S_{10}$은 **공비가 r^5인 등비수열을 이룬다.**

5

목표| 등비수열의 합을 이용하여 상환 금액을 구할 수 있게 한다.

풀이|



2014년 말에 갚는 돈을 a만 원이라고 하면

$15a(1.01)^{14}=1500(1.01)^{15}$, $a=100\times 1.01=101$

따라서 2014년 말에 갚는 돈은 **101만 원**이다.

2 수열의 합

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

② 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

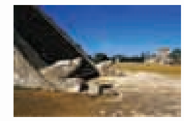
소단원명	지도 내용
01 $\sum$의 뜻과 성질	$\sum$의 뜻과 성질
02 여러 가지 수열의 합	자연수의 거듭제곱의 합
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 142 쪽

2 수열의 합

엘 카스티요와 수 365

멕시코 마야 문명의 중심 도시 치첸이트사는 10～13세기에 번성하고 15세기 무렵 폐허가 되어 지금은 유적지가 되었다. 치첸이트사에는 엘 카스티요라고 불리는 피라미드가 있는데, 이 피라미드에는 몇 가지 흥미로운 특징이 있다.



먼저 춘분날과 추분날에 이 피라미드의 북쪽 계단에서는 마치 살아 있는 뱀이 위에서 아래로 내려오는 것 같은 모습을 볼 수 있다. 아래에 있는 뱀 머리 조각과 계단 벽의 그림자가 함께 어우러져 일어나는 현상이다. 평상시에 보면 북쪽 계단 아래에 입을 딱 벌린 뱀 두 마리의 머리가 조각되어 있지만 몸통은 보이지가 않는다.

또한 엘 카스티요의 네 옆면에는 각각 91단의 계단이 있는데 이 계단의 수에도 의미가 있다. 네 면의 계단과 가장 위에 있는 한 단을 포함하여 총 계단의 수를 구하면 $91\times4+1=365$(단)으로, 이는 1년간의 일수 365일을 상징한다.

365일을 기준으로 해가 바뀌고 우리의 생활도 이를 주기로 변하기 때문에 수 365는 친숙하고 의미 있는 수로 여겨지고 있다. 수 365에는 수학적으로도 재미있는 성질이 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 145 쪽

수 365는 어떤 수열의 합으로 나타낼 수 있을까?

들어가면서 피타고라스의 음계와 같이 일상생활에서 볼 수 있는 수열은 여러 가지가 있다.

엘 카스티요 피라미드는 네 면이 각각 91단의 계단으로 쌓여있고, 가장 위에 있는 한 단을 포함하면 총 계단의 수가 365이다. 이것은 1년간의 일 수 365를 상징한다. 365는 매우 친숙하고 의미있는 수로 여겨지기도 하는데, 실제로 수열과 관련된 많은 성질을 가진 수이다.

이 단원에서는 수열의 합을 $\sum$를 이용하여 간단히 나타내는 방법, $\sum$로 나타내어진 수열의 합을 구하는 방법, 자연수의 거듭제곱의 합, 분수 꼴의 수열의 합에 대하여 지도하고, 이를 이용하여 우리 주변에서 관찰할 수 있는 것들을 수열의 합으로 나타낼 수 있는 능력을 기르도록 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	상	$\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있다.
	중	등차수열과 등비수열의 합을 기호 $\sum$를 이용하여 나타낼 수 있다.
	하	합의 기호 $\sum$의 뜻을 말할 수 있다.
2. 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.	상	자연수의 거듭제곱의 합과 분수 꼴로 된 수열의 합을 구할 수 있다.
	중	$\sum_{k=1}^{n}k$, $\sum_{k=1}^{n}k^2$, $\sum_{k=1}^{n}k^3$을 구할 수 있다.
	하	자연수 1부터 n까지의 합을 구할 수 있다.

교과서 143 쪽

01 $\sum$의 뜻과 성질

● $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

기호 $\sum$의 의미는 무엇인가?

생각 열기 **수학 기호의 편리성**

방정식 $x^2=2$의 한 근인 무리수 $1.414213562\cdots$는 $\sqrt{\ }$를 이용하여 $\sqrt{2}$로 나타낼 수 있고, 1 이상 1000 이하의 실수를 원소로 하는 집합은 $\{x \mid 1 \le x \le 1000\}$으로 나타낼 수 있다. 이와 마찬가지로 수열의 합 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$도 기호를 이용하여 간단히 나타내면 편리하다.

탐구 활동 **다음 물음에 답하여 보자.**

1. 어떤 수 a를 10번 더한 $a+a+a+a+a+a+a+a+a+a$를 간단히 나타내어 보자.
2. $3+6+9+12$를 '$3k$의 k에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하여 얻은 수의 합'과 같이 표현하기로 하면 $3+6+9+12+\cdots+300$은 어떻게 표현할 수 있겠는가?

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

은 기호 $\sum$를 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

제n항까지

$\sum_{k=m}^{n} a_k$ ← 일반항

제m항부터

a_k를 차례로 더한다.

기호 $\sum$는 영어 sum의 첫 글자 s에 해당하는 그리스 문자의 대문자로서 '시그마(sigma)'라고 읽는다.

여기서 $\sum_{k=1}^{n} a_k$는 수열의 일반항 a_k의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하여 얻은 항 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n의 합을 뜻한다.

❶ 따라서 k 대신에 j 또는 l 등의 다른 문자를 사용하여 나타낼 수도 있다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{j=1}^{n} a_j=\sum_{l=1}^{n} a_l$$

이다.

보기 (1) $\sum_{k=1}^{10} 5=\underbrace{5+5+5+\cdots+5}_{10개}$ (2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+13^2=\sum_{k=1}^{13} k^2$

01 $\sum$의 뜻과 성질

소단원 지도 목표

① $\sum$의 뜻을 알게 한다.

② $\sum$의 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 복잡한 수열의 합을 $\sum$를 이용하여 간단하게 나타낼 수 있음을 이해하게 한다.

2. 수열의 합 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 $\sum$로 표현하는데 익숙해지도록 강조하여 지도한다.

3. $\sum_{k=1}^{n} a_k$에서 k 대신 다른 문자를 사용하여 표현할 수 있다는 것을 주의시킨다.

새로 나온 용어와 기호

• $\sum_{k=1}^{n} a_k$

생각 열기 참/고/자/료

수학의 역사는 인류의 역사와 더불어 시작되었다고 할 만큼 오래되었다. 실제로 교역, 분배, 과세, 천문 관측, 달력의 제정, 토지의 측량 등 인류에 필요한 모든 계산을 수학이 담당해 왔다. 그러나 기호가 많이 사용되기 이전에는 그 발달이 미비하여 현재의 학문적 기틀을 마련하기 힘들었다. 16세기 기호의 사용이 발달하게 되면서 수학은 전례가 없는 진전을 이루기 시작하였고, 오늘날과 같은 발달된 학문으로써 자리매김하게 되었다. 이와 같이 기호는 수학을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결하는 데 중요한 도구이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 같은 수의 반복된 합의 표현과 수열로 표현되는 수들의 합을 구하여 보는 활동을 통하여 수열의 합을 간단한 기호로 나타내는 방법을 생각해 볼 수 있는 기회를 제공하기 위한 것이다.

1. $10a$

2. $3k$의 k에 1, 2, 3, 4, $\cdots$, 100을 차례로 대입하여 얻은 수의 합으로 표현할 수 있다.

본문 해설

❶ $\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$\sum_{l=1}^{n} a_l=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$\sum_{j=1}^{n} a_j=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

에서 알 수 있듯이 k 대신 다른 문자를 사용하여도 그 값은 변하지 않는다.

1

목표| $\sum$를 사용하여 나타낸 수열의 합을 $\sum$을 사용하지 않고 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sum_{k=1}^{5} 2^k = 2^1+2^2+2^3+2^4+2^5$

$\quad = \mathbf{2+4+8+16+32}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$= \boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}}$

(3) $\sum_{k=1}^{5} k^3 = 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$

$\quad = \mathbf{1+8+27+64+125}$

(4) $\sum_{k=1}^{n} (3-k)$

$= (3-1)+(3-2)+(3-3)+\cdots+(3-n)$

$= \boldsymbol{2+1+0+\cdots+(3-n)}$

2

목표| 수열의 합을 $\sum$를 사용하여 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $1+3+5+\cdots+21 = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{11} (2k-1)}$

(2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$

(3) $3+6+12+24+\cdots+192 = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{7} 3\cdot 2^{k-1}}$

(4) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1) = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)}$

교과서 144 쪽

문제 1 다음을 기호 $\sum$를 사용하지 않고 합의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sum_{k=1}^{5} 2^k$ (2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(3) $\sum_{k=1}^{5} k^3$ (4) $\sum_{k=1}^{n} (3-k)$

문제 2 다음을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내어라.

(1) $1+3+5+\cdots+21$ (2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

(3) $3+6+12+24+\cdots+192$ (4) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)$

합의 기호 $\sum$의 성질에 대하여 알아보자.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 상수 c에 대하여

[1] $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)$

$= (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

[2] $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k) = (a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+\cdots+(a_n-b_n)$

$= (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

[3] $\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n$

$= c(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

[4] $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{개}} = cn$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\sum$의 기본 성질

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (단, c는 상수) (4) $\sum_{k=1}^{n} c = cn$ (단, c는 상수)

지/도/자/료

1. 다음과 같이 $\sum$의 성질을 잘못 이용하여 계산하는 학생들이 종종 있다.

① $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - 1$ ② $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k}$

③ $\sum_{k=1}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 1과 같은 $\sum$에 대한 오개념을 갖고 있는 학생의 경우 다음과 같이 지도한다.

① $\sum_{k=1}^{n} c = c+c+\cdots+c = nc \neq c$

② $\sum_{k=1}^{n} a_kb_k = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n$,

$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k = (a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

이므로 $\sum_{k=1}^{n} a_kb_k \neq \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}$,

$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$

이므로 $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \neq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}$

③ $\sum_{k=1}^{n} ar^k = ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n$에서 첫째항이 ar, 공비가 r인 등비수열의 합이므로 그 값은 $\frac{ar(1-r^n)}{1-r}$이다.

교과서 145 쪽

예제 01 $\sum_{k=1}^{10} a_k=15$, $\sum_{k=1}^{10} b_k=20$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+2b_k)$　　(2) $\sum_{k=1}^{10}(4a_k-1)$

풀이 (1) $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+2b_k)=\sum_{k=1}^{10}3a_k+\sum_{k=1}^{10}2b_k=3\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k=3\cdot15+2\cdot20=85$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(4a_k-1)=\sum_{k=1}^{10}4a_k+\sum_{k=1}^{10}(-1)=4\sum_{k=1}^{10}a_k+(-1)\cdot10=4\cdot15-10=50$

답 (1) 85　(2) 50

문제 3 $\sum_{k=1}^{15} a_k=-7$, $\sum_{k=1}^{15} b_k=10$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{15}(5a_k+4b_k)$　　(2) $\sum_{k=1}^{15}(3a_k-2b_k+2)$

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

수열 9, 99, 999, …의 첫째항부터 제10항까지의 합이 $\frac{10^{11}-10^a}{b}$일 때, 자연수 a, b의 값을 구하여 보자.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

수 365는 다음과 같이 여러 식으로 표현할 수 있다. 이를 $\sum$를 사용하여 나타낼 때, $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$$365=71+72+73+74+75=\sum_{k=1}^{\square}(k+70)$$

$$365=100+121+144=10^2+11^2+12^2=\sum_{k=1}^{3}(k+\square)^2$$

$$365=2^2+4^2+6^2+8^2+10^2+12^2+1=\sum_{k=1}^{\square}(\square)^2+1$$

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도 | 주어진 수열의 규칙을 이해하여 일반항을 구하고 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 수열 9, 99, 999, …는 수열 $10-1$, $100-1$, $1000-1$, …과 같다. 즉, 10^1-1, 10^2-1, 10^3-1, …과 같으므로 이 수열의 일반항 a_k는 $a_k=10^k-1$이다.

따라서 수열 $9+99+999+\cdots$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}(10^k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}10^k-\sum_{k=1}^{10}1$$

$$=\frac{10(10^{10}-1)}{10-1}-10=\frac{10^{11}-10^2}{9}$$

따라서 구하는 자연수 a, b의 값은

$\boldsymbol{a=2}$, $\boldsymbol{b=9}$이다.

3

목표 | $\sum$의 기본 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\sum_{k=1}^{15}(5a_k+4b_k)=\sum_{k=1}^{15}5a_k+\sum_{k=1}^{15}4b_k$

$$=5\sum_{k=1}^{15}a_k+4\sum_{k=1}^{15}b_k$$

$$=5\cdot(-7)+4\cdot10=\mathbf{5}$$

(2) $\sum_{k=1}^{15}(3a_k-2b_k+2)=\sum_{k=1}^{15}3a_k-\sum_{k=1}^{15}2b_k+\sum_{k=1}^{15}2$

$$=3\sum_{k=1}^{15}a_k-2\sum_{k=1}^{15}b_k+\sum_{k=1}^{15}2$$

$$=3\cdot(-7)-2\cdot10+2\cdot15$$

$$=\mathbf{-11}$$

단원 과제

목표 | 365를 여러 가지 수열의 합으로 나타내고 $\sum$를 사용하여 이 수열의 합을 나타냄으로써 $\sum$의 뜻과 성질을 명확히 이해하게 한다.

풀이 | $365=71+72+73+74+75=\sum_{k=1}^{\boxed{5}}(k+70)$

$$365=100+121+144=10^2+11^2+12^2=\sum_{k=1}^{3}(k+\boxed{\mathbf{9}})^2$$

$$365=2^2+4^2+6^2+8^2+10^2+12^2+1=\sum_{k=1}^{\boxed{6}}(\boxed{\mathbf{2k}})^2+1$$

02 여러 가지 수열의 합

소단원 지도 목표

① 자연수의 거듭제곱의 합을 구하는 방법을 알고, 이를 활용할 수 있게 한다.
② 분수 꼴의 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 자연수의 거듭제곱의 합은 $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$까지만 다루며, 일반적으로 $p \geq 4$일 때 $\sum_{k=1}^{n} k^p$을 구하는 것은 다루지 않는다.

2. 분수 꼴의 수열의 합은 부분분수로 분해하여 구하는 것을 강조하여 지도한다.

3. 분수 꼴의 수열의 합은 분모가 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우만을 다룬다.

4. 일반항이 무리식인 수열의 합은 유리화할 수 있는 경우만을 다룬다.

교과서 146 쪽

02 여러 가지 수열의 합

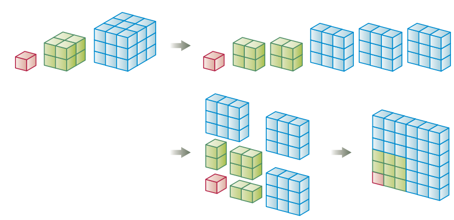
● 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

자연수의 거듭제곱의 합을 어떻게 구하는가?

탐구 활동

그림을 이용하여 자연수의 거듭제곱의 합을 구하려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

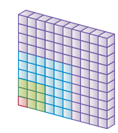
1. 다음 그림을 이용하여 $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$이 성립함을 설명하여 보자.



2. 1과 같은 방법으로 오른쪽 그림을 이용하여

$$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$$

이 성립함을 설명하여 보자.



자연수의 거듭제곱으로 이루어진 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여 보자.

❶ 1부터 n까지의 자연수의 합, 즉 $\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n$은 첫째항이 1이고, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\frac{n\{2\cdot 1+(n-1)\cdot 1\}}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

이 성립한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 블록을 재조립하는 과정을 이용하여 자연수의 거듭제곱의 합을 구하는 방법을 알게 하기 위한 것이다.

1. 첫 번째 그림에서 세 정육면체의 부피의 합 $1^3+2^3+3^3$은 마지막 그림에서 직육면체의 부피 $(1+2+3)^2$과 같으므로 $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$이 성립한다.

2. 주어진 그림의 직육면체의 부피는 한 변의 길이가 각각 1, 2, 3, 4인 네 정육면체의 부피의 합과 같으므로 $1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$이 성립한다.

본문 해설

❶ 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이면 이 수열의 일반항은 항상 n에 대한 일차식 $pn+q$ 꼴로 나타난다. 따라서 $\sum_{k=1}^{n} k$는 물론 $\sum_{k=1}^{n} (pk+q)$도 $\sum$의 기본 성질을 이용하지 않고, 등차수열의 합의 공식을 이용하여 그 값을 구할 수 있다. 즉, $a_k=pk+q$에서 첫째항은 $a_1=p+q$이고 제n항 $a_n=pn+q$이므로 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n} (pk+q)=\frac{n\{(p+q)+pn+q\}}{2}$$

1

목표| 항등식을 이용하여 자연수의 세제곱의 합의 공식을 증명할 수 있게 한다.

$(a+b)^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

이제 1부터 n까지의 자연수의 제곱의 합, 즉 $\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$을 구하여 보자.

항등식 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하면

$$\begin{array}{ll} k=1\text{일 때,} & 2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1 \\ k=2\text{일 때,} & 3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1 \\ k=3\text{일 때,} & 4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1 \\ \vdots & \vdots \\ k=n\text{일 때,} & (n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1 \end{array}$$

이므로 위의 n개의 등식을 변끼리 더하여 정리하면

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{개}})$$

$$=3\sum_{k=1}^{n} k^2+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2=(n+1)^3-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n-1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이 성립한다.

문제 1 항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$을 이용하여 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\sum_{k=1}^{n} k^2 \neq \sum_{k=1}^{n} k \sum_{k=1}^{n} k$

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

풀이 항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하면

$$\begin{array}{lll} k=1\text{일 때,} & 2^4-1^4 & =4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1 \\ k=2\text{일 때,} & 3^4-2^4 & =4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1 \\ k=3\text{일 때,} & 4^4-3^4 & =4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1 \\ \vdots & & \vdots \\ k=n\text{일 때,} & (n+1)^4-n^4 & =4\cdot n^3+6\cdot n^2+4\cdot n+1 \end{array}$$

이므로 위의 n개의 등식을 변끼리 더하여 정리하면

$$(n+1)^4-1^4=4(1^3+2^3+\cdots+n^3)+6(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$
$$+4(1+2+\cdots+n)+(1+1+\cdots+1)$$

$$(n+1)^4-1^4$$
$$=4\sum_{k=1}^{n} k^3+6\sum_{k=1}^{n} k^2+4\sum_{k=1}^{n} k+n$$
$$=4\sum_{k=1}^{n} k^3+6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}$$
$$=(n+1)(n^3+n^2)=n^2(n+1)^2$$

따라서 $\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

이 성립한다.

다른 풀이 $\sum_{k=1}^{n} k^3$의 공식은 다음과 같은 방법으로 유도할 수도 있다.

$$\begin{array}{rl} S=\sum_{k=1}^{n} k^3 = & 1^3+2^3+3^3+\cdots+j^3+\cdots+n^3 \\ = & 1+2^2+3^2+\cdots+j^2+\cdots+n^2 \\ & \quad+2^2+3^2+\cdots+j^2+\cdots+n^2 \\ & \quad\quad\;\; +3^2+\cdots+j^2+\cdots+n^2 \\ & \quad\quad\quad\quad\quad \vdots \\ & \quad\quad\quad\quad\quad +j^2+\cdots+n^2 \\ & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \vdots \\ & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad +n^2 \end{array}$$

2개 3개 j개 n개

$$=\sum_{j=1}^{n}\{j^2+(j+1)^2+(j+2)^2+\cdots+n^2\}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2-\sum_{k=1}^{j-1} k^2\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(j-1)j(2j-1)}{6}\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\left\{n^2(n+1)(2n+1)-2S+3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

위의 식을 S에 관하여 풀면 $S=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$이다.

지/도/자/료

"확률과 통계"의 이항정리를 이용하여 얻은 항등식

$(x+1)^n=x^n+{}_nC_1x^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}+\cdots+{}_nC_{n-1}x+1$

에 $n=2$, 3, 4, 5, $\cdots$를 차례로 대입하여 $\sum_{k=1}^{n} k^p$의 값을 구할 수 있다. 실제로 문제 1은 이 항등식에 $n=4$를 대입한 경우이다. 그러나 여기에서는 $\sum_{k=1}^{n} k^3$까지만 지도하고 $\sum_{k=1}^{n} k^4$부터는 지도하지 않는다.

2

목표| 자연수의 거듭제곱의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{20(20+1)(2\cdot 20+1)}{6}$

$= \mathbf{2870}$

(2) $\sum_{k=1}^{20} k^3 = \left\{\frac{20(20+1)}{2}\right\}^2 = \mathbf{44100}$

(3) $1^2+2^2+3^2+\cdots+15^2$

$= \frac{15(15+1)(2\cdot 15+1)}{6} = \mathbf{1240}$

(4) $1^3+2^3+3^3+\cdots+15^3$

$= \left\{\frac{15(15+1)}{2}\right\}^2 = \mathbf{14400}$

본문 해설

❶ 수열 $\{a_n\}$의 제m항부터 제n항까지의 합은 첫째항부터 제n항까지의 합에서 첫째항부터 제$(m-1)$항까지의 합을 빼면 된다.

즉, $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k$

교과서 148 쪽

보기 (1) $1+2+3+\cdots+15 = \sum_{k=1}^{15} k = \frac{15(15+1)}{2} = 120$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2 = \sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{12(12+1)(2\cdot 12+1)}{6} = 650$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3 = \sum_{k=1}^{9} k^3 = \left\{\frac{9(9+1)}{2}\right\}^2 = 2025$

문제 2 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{20} k^2$　　(2) $\sum_{k=1}^{20} k^3$

(3) $1^2+2^2+3^2+\cdots+15^2$　　(4) $1^3+2^3+3^3+\cdots+15^3$

발전

문제 3 다음 합을 구하여라.

❶ $\sum_{k=7}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^{6} a_k$

(1) $7^2+8^2+9^2+\cdots+20^2$　　(2) $7^3+8^3+9^3+\cdots+20^3$

예제 01 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{n} (k^2+k)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k-4)$

풀이 (1) $\sum_{k=1}^{n} (k^2+k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k-4) = \sum_{k=1}^{n} (k^2-3k-4) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 4$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 4n$

$= \frac{n(n^2-3n-16)}{3}$

답 (1) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$　(2) $\frac{n(n^2-3n-16)}{3}$

3

목표| 자연수의 거듭제곱의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $7^2+8^2+9^2+\cdots+20^2$

$= (1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2) - (1^2+2^2+3^2+\cdots+6^2)$

$= \sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^{6} k^2$

$= \frac{20(20+1)(2\cdot 20+1)}{6} - \frac{6(6+1)(2\cdot 6+1)}{6}$

$= \mathbf{2779}$

(2) $7^3+8^3+9^3+\cdots+20^3$

$= (1^3+2^3+3^3+\cdots+20^3) - (1^3+2^3+3^3+\cdots+6^3)$

$= \sum_{k=1}^{20} k^3 - \sum_{k=1}^{6} k^3$

$= \left\{\frac{20(20+1)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{6(6+1)}{2}\right\}^2$

$= \mathbf{43659}$

기/초/력 향상 문제

다음 합을 구하여라.

1 $1+2+3+\cdots+50$

2 $1^2+2^2+3^2+\cdots+30^2$

3 $1^3+2^3+3^3+\cdots+15^3$

4 $7+8+9+\cdots+30$

5 $5^2+6^2+7^2+\cdots+25^2$

6 $5^3+6^3+7^3+\cdots+25^3$

답 **1** 1275　**2** 9455　**3** 14400
4 444　**5** 5495　**6** 105525

교과서 149 쪽

문제 4 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(k^3+2k^2)$ (2) $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)(2k-1)$

예제 02 다음 합을 구하여라.

$$2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\cdots+(n+1)(n+2)$$

풀이 주어진 식을 $\sum$를 사용하여 나타내면

$$\begin{aligned}2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\cdots+(n+1)(n+2)&=\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)\\&=\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2)\\&=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+2n\\&=\frac{n(n^2+6n+11)}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{n(n^2+6n+11)}{3}$

문제 5 다음 합을 구하여라.

(1) $1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\cdots+n(n+3)$ (2) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

이제 분수 꼴로 주어진 간단한 수열의 합을 구하여 보자.

일반항이 분수 꼴이고, 분모가 두 일차식의 곱으로 나타나는 수열의 합을 구할 때에는

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\ (\text{단, } A\neq B)$$

임을 이용하여 각 항을 두 개의 항으로 분리하여 구한다.

5

목표| 일반항이 변형된 자연수의 거듭제곱의 합으로 나타나는 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\cdots+n(n+3)$

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{n}k(k+3)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k)\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=\boldsymbol{\frac{n(n+1)(n+5)}{3}}\end{aligned}$$

(2) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)\\&=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\&=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n\\&=\boldsymbol{\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}}\end{aligned}$$

4

목표| 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sum_{k=1}^{10}(k^3+2k^2)$

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{10}k^3+\sum_{k=1}^{10}2k^2\\&=\sum_{k=1}^{10}k^3+2\sum_{k=1}^{10}k^2\\&=\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2+2\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}=\mathbf{3795}\end{aligned}$$

(2) $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)(2k-1)$

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{5}(4k^2-1)\\&=4\sum_{k=1}^{5}k^2-\sum_{k=1}^{5}1\\&=4\cdot\frac{5\cdot6\cdot11}{6}-5=\mathbf{215}\end{aligned}$$

지/도/자/료

일반항이 부분분수로 나타나는 대표적인 몇 가지 유형은 다음과 같다.

① $\frac{1}{n(n+p)}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\right)$

② $\frac{1}{(n-p)(n+p)}=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right)$

③ $\frac{1}{n(n+p)(n+2p)}=\frac{1}{2p}\left\{\frac{1}{n(n+p)}-\frac{1}{(n+p)(n+2p)}\right\}$

그러나 ③과 같이 분수 꼴의 일반항의 분모가 두 일차식의 곱으로 나타나지 않는 경우는 다루지 않도록 한다.

6

목표| 분수 꼴의 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{n}{2n+4}}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}}$$

7

목표| 분수 꼴로 표현된 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$$=\frac{1}{(2k+1)-(2k-1)}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

이므로

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\boldsymbol{\frac{n}{2n+1}}$$

교과서 150 쪽

예제 03 다음 합을 구하여라.

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

풀이 자연수 k에 대하여

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

이므로 주어진 식을 $\sum$를 사용하여 나타내면

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{n}{n+1}$$

답 $\dfrac{n}{n+1}$

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{(k+1)-k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

문제 6 다음 합을 구하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}$

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

발전 **문제 7** 다음 합을 구하여라.

(1) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$

$$=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

이므로

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots$$

$$+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\boldsymbol{\sqrt{n+1}-1}$$

교과서 151 쪽

중단원 기초

[해답 p.229]

수준별 학습

1 다음을 기호 $\sum$를 사용하지 않고 합의 꼴로 나타내어라. — 01 $\sum$의 뜻과 성질

(1) $\sum_{k=1}^{5}(4k+1)$ (2) $\sum_{k=1}^{8}(k+1)(k-1)$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(-2)^k$ (4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$

2 다음을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내어라. — 01 $\sum$의 뜻과 성질

(1) $1+2+3+4+\cdots+n$

(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}$

(3) $1+4+7+\cdots+(3n-2)$

(4) $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+n(n+2)$

3 $\sum_{k=1}^{20}a_k=12$, $\sum_{k=1}^{20}b_k=-5$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. — 01 $\sum$의 뜻과 성질 / $\sum$의 기본 성질

(1) $\sum_{k=1}^{20}(2a_k+4b_k)$ (2) $\sum_{k=1}^{20}(a_k-3b_k+1)$

4 다음 합을 구하여라. — 02 여러 가지 수열의 합 / 자연수의 거듭제곱의 합

(1) $1+2+3+\cdots+10$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$

5 다음 합을 구하여라. — 02 여러 가지 수열의 합

(1) $\sum_{k=1}^{5}k(2k-1)$ (2) $\sum_{k=1}^{10}(k+2)^2$

중/단/원 기초

1

목표| $\sum$를 사용하여 나타낸 수열의 합의 의미를 알게 한다.

풀이| (1) $\sum_{k=1}^{5}(4k+1)=\mathbf{5+9+13+17+21}$

(2) $\sum_{k=1}^{8}(k+1)(k-1)=\mathbf{0+3+8+15+24+35+48+63}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(-2)^k=\mathbf{-2+4+(-8)+16+\cdots+(-2)^n}$

(4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\mathbf{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}}$

2

목표| 여러 가지 수열을 $\sum$를 사용하여 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $1+2+3+4+\cdots+n=\mathbf{\sum_{k=1}^{n}k}$

(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\mathbf{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k}$

(3) $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\mathbf{\sum_{k=1}^{n}(3k-2)}$

(4) $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+n\cdot(n+2)$

$=\mathbf{\sum_{k=1}^{n}k(k+2)}$

3

목표| $\sum$의 기본 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sum_{k=1}^{20}(2a_k+4b_k)=2\sum_{k=1}^{20}a_k+4\sum_{k=1}^{20}b_k$

$=\mathbf{4}$

(2) $\sum_{k=1}^{20}(a_k-3b_k+1)=\sum_{k=1}^{20}a_k-3\sum_{k=1}^{20}b_k+\sum_{k=1}^{20}1$

$=\mathbf{47}$

4

목표| 자연수의 거듭제곱의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $1+2+3+\cdots+10=\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{10\cdot11}{2}=\mathbf{55}$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}=\mathbf{385}$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3=\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2=\mathbf{3025}$

5

목표| 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sum_{k=1}^{5}k(2k-1)=\sum_{k=1}^{5}(2k^2-k)$

$=2\sum_{k=1}^{5}k^2-\sum_{k=1}^{5}k$

$=2\cdot\frac{5\cdot6\cdot11}{6}-\frac{5\cdot6}{2}=\mathbf{95}$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(k+2)^2=\sum_{k=1}^{10}(k^2+4k+4)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2+4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}4$

$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+4\cdot\frac{10\cdot11}{2}+4\cdot10$

$=\mathbf{645}$

교과서 152 쪽

중단원 기본

[해답 p.229]

수준별 학습

1 $\sum_{k=1}^{20} a_k=5$, $\sum_{k=1}^{20} a_k^2=10$일 때, $\sum_{k=1}^{20} (2a_k-3)^2$의 값을 구하여라.

01 ∑의 뜻과 성질
∑의 기본 성질

2 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{29} (k-1)-\sum_{k=1}^{30} k$　　(2) $\sum_{k=1}^{20} (k+1)^2-\sum_{k=1}^{20} k(k+2)$

01 ∑의 뜻과 성질
∑의 기본 성질

3 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=n^2-2n$일 때, 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{2n} a_k$　　(2) $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}$

02 여러 가지 수열의 합

4 다음 합을 구하여라.

(1) $1^2\cdot1+2^2\cdot3+3^2\cdot5+\cdots+n^2(2n-1)$

(2) $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{4\cdot6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

02 여러 가지 수열의 합

5 다음 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ \cdots$

02 여러 가지 수열의 합

중/단/원 기본

1

목표| ∑의 기본 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\sum_{k=1}^{20} (2a_k-3)^2=4\sum_{k=1}^{20} a_k^2-12\sum_{k=1}^{20} a_k+\sum_{k=1}^{20} 9$

$$=4\cdot10-12\cdot5+9\cdot20=\mathbf{160}$$

2

목표| ∑의 기본 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sum_{k=1}^{29} (k-1)-\sum_{k=1}^{30} k$

$$=\sum_{k=1}^{29} (k-1)-\left(\sum_{k=1}^{29} k+30\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{29} \{(k-1)-k\}-30=\mathbf{59}$$

(2) $\sum_{k=1}^{20} (k+1)^2-\sum_{k=1}^{20} k(k+2)$

$$=\sum_{k=1}^{20} \{(k+1)^2-k(k+2)\}=\sum_{k=1}^{20} 1=\mathbf{20}$$

3

목표| 일반항이 주어진 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sum_{k=1}^{2n} a_k=\sum_{k=1}^{2n} (k^2-2k)=\sum_{k=1}^{2n} k^2-2\sum_{k=1}^{2n} k$

$$=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-2\cdot\frac{2n(2n+1)}{2}$$

$$=\mathbf{\frac{n(2n+1)(4n-5)}{3}}$$

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=\sum_{k=1}^{n} \{(2k)^2-2(2k)\}=4\sum_{k=1}^{n} k^2-4\sum_{k=1}^{n} k$

$$=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\mathbf{\frac{4n(n-1)(n+1)}{3}}$$

4

목표| 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $1^2\cdot1+2^2\cdot3+3^2\cdot5+\cdots+n^2(2n-1)$

$$=\sum_{k=1}^{n} k^2(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n} k^3-\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$=2\cdot\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\mathbf{\frac{n(n+1)(3n^2+n-1)}{6}}$$

(2) $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{4\cdot6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

$$=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\mathbf{\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}}$$

5

목표| 일반항이 합으로 이루어진 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\sum_{k=1}^{n} (1+2+3+\cdots+k)$

$$=\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2+\sum_{k=1}^{n} k\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$=\mathbf{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$$

교과서 153 쪽

중단원 실력

[해답 p.229]

수준별 학습

1 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=1$, $a_{20}=7$일 때, (01 $\sum$의 뜻과 성질)

$$\sum_{k=1}^{19} a_{k+1}-\sum_{k=2}^{20} a_{k-1}$$

의 값을 구하여라.

2 다음 합을 구하여라. (02 여러 가지 수열의 합)

$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1$$

3 $f(a)=\sum_{k=1}^{5}(k^2+4ak-a^2)$일 때, $f(a)$의 최댓값을 구하여라. (02 여러 가지 수열의 합)

4 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 7이고 공차가 2인 등차수열일 때, 다음 합을 구하여라. (02 여러 가지 수열의 합)

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{109}}+\sqrt{a_{110}}}$$

5 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 (02 여러 가지 수열의 합)

$$\sum_{k=1}^{n} a_kb_k=\frac{n(4n^2+9n-1)}{6},\ \sum_{k=1}^{n} b_k=n^2$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값을 구하여라.

중/단/원 실력

1

목표| $\sum$의 정의를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\sum_{k=1}^{19} a_{k+1}=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{20}$,

$\sum_{k=2}^{20} a_{k-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19}$이므로

$\sum_{k=1}^{19} a_{k+1}-\sum_{k=2}^{20} a_{k-1}=a_{20}-a_1=\mathbf{6}$

2

목표| 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 수열의 일반항을 a_k라고 하면

$a_k=k(n-k+1)$이므로 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)=n\sum_{k=1}^{n} k-\sum_{k=1}^{n} k^2+\sum_{k=1}^{n} 1$$
$$=\frac{\boldsymbol{n(n+1)(n+2)}}{\mathbf{6}}$$

3

목표| 수열의 합으로 정의된 함수의 최댓값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(a)=\sum_{k=1}^{5} k^2+4a\sum_{k=1}^{5} k-\sum_{k=1}^{5} a^2$

$=-5a^2+60a+55$

$=-5(a-6)^2+235$

따라서 $f(a)$는 $a=6$일 때 최댓값 **235**를 갖는다.

4

목표| 복잡한 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=2n+5$

주어진 수열의 합을 $\sum$을 사용하여 나타내면

$$\sum_{k=1}^{109}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\sum_{k=1}^{109}\frac{1}{\sqrt{2k+5}+\sqrt{2k+7}}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{109}(\sqrt{2k+7}-\sqrt{2k+5})$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{225}-\sqrt{7})$$
$$=-\frac{\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}$$

5

목표| 조건을 만족시키는 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 수열 $\{b_n\}$의 일반항은

$b_n=n^2-(n-1)^2=2n-1$ ...... ①

수열 $\{a_nb_n\}$의 일반항은

$$a_nb_n=\frac{n(4n^2+9n-1)}{6}-\frac{(n-1)\{4(n-1)^2+9(n-1)-1\}}{6}$$
$$=2n^2+n-1 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a_n=n+1$

$$\sum_{k=1}^{5} a_k=\sum_{k=1}^{5}(k+1)=\frac{5\cdot 6}{2}+5=\mathbf{20}$$

3 수학적 귀납법

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 수열의 귀납적 정의를 이해하게 한다.

② 수학적 귀납법의 원리를 이해하게 한다.

③ 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 수열의 귀납적 정의	수열의 귀납적 정의
02 수학적 귀납법	수학적 귀납법
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 154 쪽

3 수학적 귀납법

어떤 도형이 될까?

큰 종이를 준비하여 다음과 같은 활동을 해 보자.

❶ 정삼각형을 크게 그리고 그 안을 색칠한다.

❷ 정삼각형의 세 변의 중점을 연결하는 선을 그으면 4개의 작은 정삼각형이 생긴다. 이 중에서 가운데 삼각형을 오려서 없앤다.

❸ 남은 3개의 정삼각형에서 ❷의 과정을 실행한다.

❹ 남은 9개의 정삼각형에서 ❷의 과정을 실행한다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 157쪽

색칠된 모든 삼각형의 넓이의 합을 수학적으로 표현할 수 있을까?

들어가면서 우리가 현실 세계에서 마주치는 문제는 대부분 귀납적인 사고 과정을 통해 해결하게 된다. 즉, 기존에 했던 경험, 관찰 결과 등을 이용하여 일반적인 해결 방법을 모색하는 것이다. 이러한 귀납적 사고 과정은 정삼각형을 잘라 남는 삼각형의 개수와 그 넓이를 추론하는 과정에서도 중요하게 활용된다.

이 단원에서는 수열을 이웃한 두 항 사이의 관계식으로 나타내고 이를 이용하여 특정한 항의 값을 추론하며, 자연수 n에 대한 여러 가지 명제를 수학적 귀납법으로 증명하는 과정을 통하여 학생들이 수학적 과정의 능력을 함양할 수 있도록 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준	성취 수준	
1. 수열의 귀납적 정의를 이해한다.	상	수열과 관련된 실생활 문제에서 인접한 항 사이의 관계를 파악하고, 이를 귀납적 정의를 이용하여 표현할 수 있다.
	중	등차수열, 등비수열을 귀납적으로 표현할 수 있다.
	하	귀납적으로 정의된 수열에서 특정한 항을 구할 수 있다.
2. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.	상	수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 수학적 귀납법을 이용하여 자연수 n에 관한 명제를 증명할 수 있다.
	중	수학적 귀납법에 의한 증명 과정을 완성할 수 있다.
	하	$n \geq k$인 자연수 n에 관한 명제 $p(n)$에 대해서 $p(k)$가 성립함을 확인할 수 있다.

교과서 155 쪽

01 수열의 귀납적 정의

● 수열의 귀납적 정의를 이해한다.

수열의 귀납적 정의란 무엇인가?

생각 열기

하노이의 탑

한 사원에 다음과 같은 전설이 전해지고 있다.

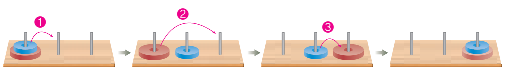
> 이 사원에는 커다란 구리판에 3개의 다이아몬드 막대가 서 있고 그중 하나에 순금으로 된 64개의 크기가 다른 원판이 큰 것부터 쌓여 있다. 원판은 하나씩 옮길 수 있으며 이때 큰 원판이 작은 원판 위에 놓이면 안 된다. 64개의 원판을 다른 막대 위에 모두 옮겨 놓으면 세상의 종말이 온다.

이 전설에서 유래되어 큰 원판이 작은 원판 위에 놓이지 않도록 원판을 하나씩 옮겨서 한 막대에서 다른 한 막대로 원판을 모두 옮기는 게임을 '하노이의 탑'이라고 한다.

탐구 활동

하노이의 탑에서 한 막대에 끼워진 n개의 원판을 다른 한 막대로 모두 옮기는 데 필요한 원판의 최소 이동 횟수를 a_n이라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 다음 그림을 보고 $a_2=3$임을 확인하여 보자.



2. a_3의 값을 구하여 보자.

3. a_3을 a_2를 이용하여 나타낼 수 있는지 말하여 보자.

생각 열기 참/고/자/료

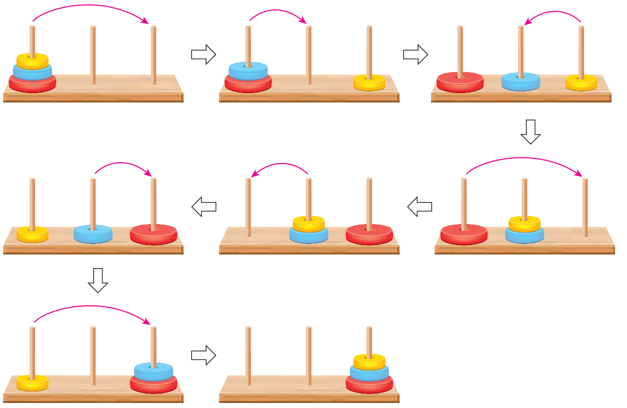
하노이의 탑은 일종의 퍼즐 문제로 이 문제를 푸는 과정이 컴퓨터 프로그래밍의 기본적인 예제로 많이 사용된다고 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 각 단계에서 옮기는 원판의 이동 횟수를 직접 구하고 규칙을 찾아 다음 단계에서 옮기는 원판의 이동 횟수를 추측해 보는 활동을 통하여 이웃하는 두 항 사이의 관계를 찾을 수 있음을 알게 하기 위한 것이다.

1. 2개의 원판을 다른 한 막대로 모두 옮기는 데 필요한 원판의 최소 이동 횟수는 3이므로 $a_2=3$이다.

2. 다음과 같이 옮길 수 있으므로 $\quad a_3=\mathbf{7}$



3. **2**에서 빨간색 원판을 제외한 2개의 원판을 다른 막대에 옮기는 데 필요한 횟수는 3번이고, 가장 큰 원판을 옮기는 데 필요한 횟수는 1번이다. 또 2개의 원판을 가장 큰 원판이 있는 곳으로 옮기는 데 필요한 횟수 역시 3번이다. 따라서 3개의 원판을 옮기는 것은 2개의 원판을 옮기는 것을 2번 반복하고, 가장 큰 원판을 한 번 옮기는 것과 같으므로 $\quad \boldsymbol{a_3=2a_2+1}$

01 수열의 귀납적 정의

소단원 지도 목표

① 수열의 이웃하는 두 항 사이의 관계식과 수열의 귀납적 정의를 알게 한다.
② 귀납적으로 정의된 수열의 특정한 항을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 귀납적으로 정의된 수열은 일반항을 추측한 후 실제로 이것이 일반항임을 수학적 귀납법을 사용하여 증명해야 하지만 보통 이를 생략한다.

새로 나온 용어와 기호

• 귀납적 정의(歸納的 定義, inductive definition)

1

목표| 귀납적으로 정의된 수열의 특정한 항을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$에 $n=1$, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$n=1$일 때, $a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\times 8=4$

$n=2$일 때, $a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}\times 4=2$

$n=3$일 때, $a_4=\frac{1}{2}a_3=\frac{1}{2}\times 2=1$

$n=4$일 때, $a_5=\frac{1}{2}a_4=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 제5항은 $\mathbf{\frac{1}{2}}$이다.

(2) $a_{n+1}=a_n+n$에 $n=1$, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$n=1$일 때, $a_2=a_1+1=2+1=3$

$n=2$일 때, $a_3=a_2+2=3+2=5$

$n=3$일 때, $a_4=a_3+3=5+3=8$

$n=4$일 때, $a_5=a_4+4=8+4=12$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 제5항은 **12**이다.

(3) $a_{n+1}=2a_n+n$에 $n=1$, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$n=1$일 때, $a_2=2a_1+1=2\times 3+1=7$

$n=2$일 때, $a_3=2a_2+2=2\times 7+2=16$

$n=3$일 때, $a_4=2a_3+3=2\times 16+3=35$

$n=4$일 때, $a_5=2a_4+4=2\times 35+4=74$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 제5항은 **74**이다.

(4) $a_{n+1}=a_n+2^n$에 $n=1$, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$n=1$일 때, $a_2=a_1+2^1=1+2=3$

$n=2$일 때, $a_3=a_2+2^2=3+4=7$

$n=3$일 때, $a_4=a_3+2^3=7+8=15$

$n=4$일 때, $a_5=a_4+2^4=15+16=31$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 제5항은 **31**이다.

교과서 156 쪽

수열은 일반항으로 정의하기도 하지만 첫째항과 임의의 이웃하는 두 항 사이의 관계식으로 정의하기도 한다.

이를테면

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

로 정의되는 수열은

$$a_1=1,\ a_2=a_1+2=3,\ a_3=a_2+2=5,\ \cdots$$

이므로 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서

$$\begin{cases} \text{첫째항 } a_1\text{의 값} \\ \text{이웃하는 두 항 } a_n\text{과 } a_{n+1} \text{ 사이의 관계식 } (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

이 주어질 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식에 $n=1$, 2, 3, $\cdots$을 차례로 대입하면 모든 항 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이 정해진다.

이와 같이 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라고 한다.

예제 01 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제5항을 구하여라.

풀이 $a_{n+1}=2a_n+1$에 $n=1$, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$n=1$일 때, $a_2=2a_1+1=2\times 1+1=3$

$n=2$일 때, $a_3=2a_2+1=2\times 3+1=7$

$n=3$일 때, $a_4=2a_3+1=2\times 7+1=15$

$n=4$일 때, $a_5=2a_4+1=2\times 15+1=31$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 제5항은 31이다.

답 31

문제 1 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제5항을 구하여라. (단, $n=1$, 2, 3, $\cdots$)

(1) $a_1=8$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$　　(2) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+n$

(3) $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n+n$　　(4) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2^n$

지/도/자/료

1, 2, 3, 4, $\cdots$와 같이 수를 배열할 때, 4 다음에 오는 수는 대부분 5라고 생각한다. 그러나 1씩 증가한다는 규칙이 아닌 다른 규칙을 찾는다면 다른 수도 답이 될 수가 있다.

예를 들어 $a_n=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+n$과 같은 규칙에 의하면 29도 가능한 답이다. 뿐만 아니라 $a_n=k(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+n$이라고 하면 4 다음에 어떤 수가 오더라도 그 규칙을 만족시키는 상수 k를 결정할 수 있다.

따라서 수열을 처음 배울 때에는 1, 3, 5, 7, $\cdots$과 같이 수를 나열하는 방식으로 수열을 나타내어 직관적으로 귀납적인 접근을 하지만 일반적으로는 귀납적 정의를 사용하여 수열을 나타내어야 한다.

교과서 157 쪽

예제 02 교내 줄넘기 대회에 참가할 예정인 진경이는 연습 첫째 날에 줄넘기를 20분 동안 하고, 둘째 날부터는 전날의 $\frac{5}{4}$배보다 1분 짧게 하여 대회를 준비하기로 하였다. 연습을 시작한 지 n일째 되는 날에 줄넘기를 한 시간을 a_n분이라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) a_2, a_3의 값　　(2) a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식

풀이 (1) 둘째 날에는 첫째 날 20분의 $\frac{5}{4}$배보다 1분 짧은 시간 동안 줄넘기를 하였으므로

$$a_2=20\times\frac{5}{4}-1=24(\text{분})$$

마찬가지로 셋째 날에 줄넘기를 한 시간은

$$a_3=24\times\frac{5}{4}-1=29(\text{분})$$

(2) $(n+1)$일째 날에는 n일째 날에 줄넘기를 한 시간의 $\frac{5}{4}$배보다 1분 짧게 하였으므로

$$a_{n+1}=a_n\times\frac{5}{4}-1=\frac{5}{4}a_n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

답 (1) $a_2=24$, $a_3=29$　(2) $a_{n+1}=\frac{5}{4}a_n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

문제 2 어느 도시에서 도서관을 개관하여 첫째 날에 20권의 도서가 대출되었다. 둘째 날부터는 매일 5권이 반납되고, 반납되지 않은 대출 도서의 수만큼 다시 추가로 대출되었다고 한다. 개관한 지 n일째 되는 날에 대출 중인 도서가 a_n권이라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) a_2의 값

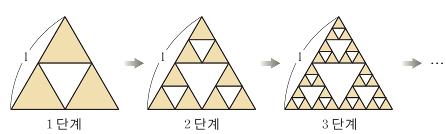
(2) a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식

(3) a_5의 값

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

다음 그림은 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 내부를 어떤 규칙에 따라 색칠하여 나열한 것이다. n단계에 색칠된 모든 정삼각형의 넓이의 합을 a_n이라고 할 때 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하고 a_3의 값을 구하여라.



단원 과제

목표 | 색칠된 삼각형의 넓이의 합을 항의 값으로 갖는 수열의 두 항 사이의 관계식을 찾고, 특정한 항을 구할 수 있게 한다.

풀이 | $a_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\right)\times\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$이고,

$(n+1)$단계에는 n단계에 색칠된 삼각형의 넓이의 $\frac{3}{4}$만큼씩 색칠되므로

$$\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)}$$

$n=1$일 때, $a_2=\frac{3}{4}a_1=\frac{3}{4}\times\frac{3\sqrt{3}}{16}=\frac{9\sqrt{3}}{64}$

$n=2$일 때, $a_3=\frac{3}{4}a_2=\frac{3}{4}\times\frac{9\sqrt{3}}{64}=\boldsymbol{\frac{27\sqrt{3}}{256}}$

2

목표 | 실생활에서 나타나는 두 항 사이의 관계식을 구하고 얻어진 수열의 귀납적 정의로부터 특정한 항을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) 둘째 날부터는 매일 5권이 반납되고, 반납되지 않는 대출 도서의 수만큼 다시 추가로 대출되므로

$a_2=20-5+(20-5)=\mathbf{30}$(권)

(2) $(n+1)$일째 되는 날에는 n일째 대출 중인 도서 중에서 5권이 반납되고, 반납되지 않은 대출 도서의 수만큼 다시 추가로 대출되므로

$a_{n+1}=a_n-5+(a_n-5)=2a_n-10$, 즉

$\boldsymbol{a_{n+1}=2a_n-10\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)}$

(3) $n=2$일 때, $a_3=2a_2-10=2\times30-10=50$(권)

$n=3$일 때, $a_4=2a_3-10=2\times50-10=90$(권)

$n=4$일 때, $a_5=2a_4-10=2\times90-10=170$(권)

따라서 구하는 a_5의 값은 $\mathbf{170}$이다.

지/도/자/료

귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하는 다음과 같은 문제는 다루지 않도록 유의한다.

(i) $a_{n+1}-a_n=d$일 때 $\{a_n\}$은 등차수열이므로

$a_n=a_1+(n-1)d$

(ii) $a_{n+1}\div a_n=r$일 때 $\{a_n\}$은 등비수열이므로　$a_n=a_1\cdot r^{n-1}$

(iii) $a_{n+1}-a_n=f(n)$의 꼴일 때 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 대입하여 변끼리 더하면 $a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$이므로

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

(iv) $a_{n+1}\div a_n=f(n)$의 꼴일 때 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 대입하여 변끼리 곱하면 $\frac{a_n}{a_1}=f(1)f(2)\cdots f(n-1)$이므로

$a_n=f(1)f(2)\cdots f(n-1)a_1$

(v) $a_{n+1}=pa_n+q$일 때 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$의 꼴로 고친 후 $\{a_n-\alpha\}$는 첫째항이 $a_1-\alpha$, 공비가 p인 등비수열임을 이용하면　$a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$

02 수학적 귀납법

소단원 지도 목표

① 수학적 귀납법에 의한 증명 방법을 이해하게 한다.
② 수학적 귀납법을 이용하여 자연수 n에 대한 등식, 부등식 등을 증명할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 자연수에 대한 명제가 특정한 몇 개의 자연수에 대하여 성립할지라도 모든 자연수에 대하여 성립한다고 주장하는 것은 잘못된 것임을 알도록 지도한다.

2. $n \geq m$인 모든 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 참임을 증명하려면 $p(1)$이 성립하는 것을 보이는 대신에 $p(m)$이 성립함을 보여야 한다는 것에 유의하도록 지도한다.

3. 수학적 귀납법은 자연수에 대한 증명에 국한되므로 자연수와 관계없는 증명에서는 이용할 수 없음을 알도록 한다.

교과서 158 쪽

02

수학적 귀납법

● 수학적 귀납법의 원리를 이해한다.
● 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.

수학적 귀납법이란 무엇인가?

탐구 활동

도미노 막대를 일렬로 세운 뒤, 하나만 쓰러뜨려서 모두 쓰러지도록 하는 게임을 하려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 게임에 성공하려면 몇 번째 막대를 쓰러뜨려야 하는가?
2. 게임에 성공하려면 k번째 막대가 쓰러진 다음에 바로 몇 번째 막대가 쓰러져야 하는가?

모든 자연수 n에 대하여

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

이 성립함을 등차수열의 합의 공식 이외의 방법으로 증명하여 보자.

❶ 등식 ①에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립함을 보이는 것은 불가능하므로 다음과 같이 증명하여 보자.

❷ (i) $n=1$일 때

$$(좌변)=1,\ (우변)=\frac{1\times2}{2}=1$$

이므로 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1+2+3+4+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

이다. ②의 양변에 $k+1$을 더하면

$$1+2+3+4+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 ①이 성립한다.

본문 해설

❶ $n=1$, 2, 3 등을 대입하여 귀납적으로 확인하는 것은 사실을 근거로 하여 명제를 추론해 내는 발견적 방법으로 몇 개의 경우에 대해서만 성립함을 보인 것이지 엄밀하게 수학적으로 증명했다고 할 수 없다. 한편 수학적 귀납법은 그 명제가 참임을 밝히는 증명의 한 방법으로 두 방법이 다르다는 것에 주의한다.

❷ $n=1$일 때, 좌변을 구하는 과정에서 $n=1$이라는 것은 좌변의 제1항까지의 합을 뜻하는 것이므로 (좌변)$=1+2+3+\cdots+1$과 같은 오류를 범하지 않도록 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 수학적 귀납법(數學的歸納法, mathematical induction)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 도미노 게임에서 처음 막대가 넘어지면 다음 막대가 연쇄적으로 넘어지면서 모든 막대가 넘어진다는 원리를 통해 수학적 귀납법의 원리를 직관적으로 이해하게 하기 위한 것이다.

1. 첫 번째 막대

2. $(k+1)$번째 막대

(i), (ii)가 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다고 할 수 있다. 왜냐하면 (i)에 의하여 $n=1$일 때 ①이 성립하고, (ii)에 의하여 $n=2, 3, 4, \cdots$일 때에도 다음과 같이 ①이 성립하기 때문이다.

$n=1$일 때 ①이 성립하므로 $n=2$일 때에도 ①이 성립한다.
$n=2$일 때 ①이 성립하므로 $n=3$일 때에도 ①이 성립한다.
$n=3$일 때 ①이 성립하므로 $n=4$일 때에도 ①이 성립한다.
$\vdots$

따라서 (i), (ii)가 성립하면 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립함을 알 수 있다.

이와 같은 방법으로 자연수에 대한 명제를 증명하는 방법을 **수학적 귀납법**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **수학적 귀납법**

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
(1) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
(2) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

예제 01 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \cdots\cdots ①$$

증명 (i) $n=1$일 때, (좌변)$=1=$(우변)
따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ①이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

본문 해설

❶ 수학적 귀납법은 1단계와 2단계로 크게 나눌 수 있는데 1단계에서는 하나의 구체적인 예, 즉 첫번째 자연수에 대하여 명제가 성립하는지를 알아보고, 2단계에서는 하나의 자연수에 대하여 명제가 성립한다고 가정하면 그 다음 자연수에 대하여 성립함을 보이는 과정이다.

지/도/자/료

1. 참인 명제를 증명하는 방법은 크게 연역적 방법과 귀납적 방법이 있다.
예를 들면 세 실수 a, b, c에 대하여

$a=b$이고 $b=c$이면 $a=c$이다.
$a>b$, $b>c$이면 $a>c$이다.

와 같이 증명하는 방법은 연역적 방법이다.
한편 귀납적 방법은 하나하나의 대상에 주목하여 접근하는 방법이다.

2. 자연수 전체의 집합은 다음과 같은 구조를 가지고 있다.
(i) 처음 수 1이 있다.
(ii) 자연수 n에 대하여 그다음 수 $n+1$이 있다.
이 두 가지 성질을 이용하는 증명법이 수학적 귀납법이다.

3. 잘못된 수학적 귀납법의 실례
명제 '모든 자연수 n에 대하여 $a+b=0$이면 $a^n+b^n=0$이다.'를 다음과 같이 증명하였다고 하자.

$n=1$이면 주어진 명제는 참이다.
$n=k-1$, k일 때 옳다고 가정하고 $n=k+1$일 때 명제가 성립함을 보이면 된다.
$a^{k+1}+b^{k+1}$
$=(a^k+b^k)(a+b)-ab(a^{k-1}+b^{k-1})$
$n=k-1$, k일 때, 성립함을 가정하였으므로 $a^{k+1}+b^{k+1}=0$
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a+b=0$이면 $a^n+b^n=0$이다.

$n=k-1$, k일 때 성립함을 가정한 후 $n=k+1$일 때 성립함을 보여 이 명제를 증명하려면 먼저 $n=1$일 때뿐만 아니라 $n=2$일 때 성립함을 보여야 한다. 또한 $k\geq 2$인 조건도 추가되어야 한다.

읽/기/자/료

파스칼의 삼각형은 ${}_nC_0={}_nC_n=1$과 점화식

$${}_{n+1}C_r={}_nC_r+{}_nC_{r-1}$$

에 의해서 귀납적으로 정의된다. 그러나 파스칼의 삼각형에서 n번째 열의 r번째 수는 이항계수 공식

$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

에 의해서도 구할 수 있다.
파스칼(Pascal, B. ; 1623~1662)은 이 공식이 모든 자연수에 대하여 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하였는데, 이러한 증명은 수학적 귀납법이란 증명 패턴을 수학에서 처음 사용하였다는 역사적 의미를 가진다. 그러나 자연수 개념에서의 그 중심적인 위치가 명확히 되어 그 정의에 사용되고, 산술 연산을 정의하고 그 성질을 증명하는 데 이용하게 된 것은 그 후 250년이 지난 다음의 일이다.

교과서 160 쪽

문제 1 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

(1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(2) $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+n(n+2)=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

일반적으로 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 $n\ge m$ (m은 자연수)인 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명할 때에는 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=m$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
(2) $n=k$ $(k\ge m)$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

예제 02 $h>0$일 때, $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$(1+h)^n>1+nh \quad \cdots\cdots ①$$

증명 (i) $n=2$일 때

$$(\text{좌변})=(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h=(\text{우변})$$

따라서 $n=2$일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\ge2)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k>1+kh$$

양변에 $1+h$를 곱하면 $1+h>0$이므로

$$(1+h)^k(1+h)=(1+h)^{k+1}>(1+kh)(1+h)$$

그런데 $(1+kh)(1+h)=1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$이므로

$$(1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ①이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

문제 2 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$$

1

목표| 수학적 귀납법을 이용하여 수열의 합에 대한 등식이 성립함을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (1) (i) $n=1$일 때, (좌변)$=1^3=1$,

(우변)$=\left\{\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}\right\}^2=1$

따라서 $n=1$일 때 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$$

양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$$
$$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3$$
$$=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

(2) (i) $n=1$일 때, (좌변)$=1\cdot3=3$,

(우변)$=\dfrac{1\cdot2\cdot9}{6}=3$

따라서 $n=1$일 때 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+k(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+7)}{6}$$

양변에 $(k+1)(k+3)$을 더하면

$$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+k(k+2)+(k+1)(k+3)$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+7)}{6}+(k+1)(k+3)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

2

목표| 수학적 귀납법을 이용하여 수열의 합에 대한 부등식이 성립함을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (i) $n=2$일 때

$$(\text{좌변})=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>\frac{4}{3}=\frac{2\times2}{2+1}=(\text{우변})$$

따라서 $n=2$일 때 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\ge2)$일 때 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$

양변에 $\dfrac{1}{k+1}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}$$
$$=\frac{2k+1}{k+1}$$

그런데 $\dfrac{2k+1}{k+1}-\dfrac{2(k+1)}{k+2}=\dfrac{k}{(k+1)(k+2)}>0$

이므로 $\dfrac{2k+1}{k+1}>\dfrac{2(k+1)}{k+2}$

따라서 $n=k+1$일 때에도 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

교과서 161 쪽

중단원 기초

[해답 p.230]

수준별 학습

1 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$을 제2항부터 제5항까지 나열하여라. 01 수열의 귀납적 정의

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=4\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1=1,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=3\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

2 다음은 수학적 귀납법을 설명한 것이다. $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라. 02 수학적 귀납법

> 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
> (ⅰ) $n=\square$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
> (ⅱ) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=\square$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

3 다음은 모든 자연수 n에 대하여 02 수학적 귀납법

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \cdots\cdots ①$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

> (ⅰ) $n=1$일 때
> (좌변)$=1=$(우변)
> 따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.
> (ⅱ) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면
> $1+3+5+7+\cdots+(2k-1)=k^2$
> 양변에 $2(k+1)-1=2k+1$을 더하면
> $1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=\square+(2k+1)$
> $=(\square)^2$
> 따라서 $n=k+1$일 때에도 ①이 성립한다.
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

중/단/원 기초

1

목표| 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $n=1$일 때, $a_2=a_1+4=3+4=7$

$n=2$일 때, $a_3=a_2+4=7+4=11$

$n=3$일 때, $a_4=a_3+4=11+4=15$

$n=4$일 때, $a_5=a_4+4=15+4=19$

따라서 수열 $\{a_n\}$을 제2항부터 제5항까지 나열하면

7, 11, 15, 19

(2) $n=1$일 때, $a_2=3a_1=3\times1=3$

$n=2$일 때, $a_3=3a_2=3\times3=9$

$n=3$일 때, $a_4=3a_3=3\times9=27$

$n=4$일 때, $a_5=3a_4=3\times27=81$

따라서 수열 $\{a_n\}$을 제2항부터 제5항까지 나열하면

3, 9, 27, 81

2

목표| 수학적 귀납법의 원리를 이해하게 한다.

풀이| 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(ⅰ) $n=\boxed{1}$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=\boxed{k+1}$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

3

목표| 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 등식을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (ⅰ) $n=1$일 때 (좌변)$=1=$(우변)

따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)=k^2$

양변에 $2(k+1)-1=2k+1$을 더하면

$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$

$=\boxed{k^2}+(2k+1)=(\boxed{k+1})^2$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ①이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

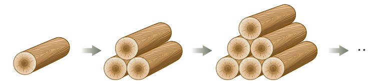
교과서 162 쪽

중단원 **기본**

[해답 p.**230**]

수준별 학습

1 다음 그림과 같이 통나무를 단계별로 쌓았다고 한다. n단계의 통나무의 총 개수를 a_n이라고 할 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라. 01 수열의 귀납적 정의



1 단계 2 단계 3 단계

2 다음은 모든 자연수 n에 대하여 n^3+5n이 6의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라. 02 수학적 귀납법

> $a_n=n^3+5n$이라고 하자.
> (i) $n=\square$일 때, $a_1=1+5=6$
> 따라서 a_1은 6의 배수이다.
> (ii) $n=k$일 때 a_k가 6의 배수라고 가정하면
> $$a_k=k^3+5k=6m\ (m\text{은 자연수})$$
> $n=k+1$일 때
> $$a_{k+1}=(k+1)^3+5(k+1)=\square+3k(k+1)$$
> 그런데 $\square$과 $3k(k+1)$은 모두 6의 배수이므로
> $n=\square$일 때에도 a_n은 6의 배수이다.
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 n^3+5n은 6의 배수이다.

3 다음을 수학적 귀납법으로 증명하여라. 02 수학적 귀납법

(1) 모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$이 성립한다.

(2) $n\ge5$인 모든 자연수 n에 대하여 $2^n>n^2+1$이 성립한다.

4 어느 수족관에 물 40 L가 들어 있다. 매일 수족관에 들어 있는 전날의 물의 반을 버리고 10 L의 물을 새로 넣는다. n일째 되는 날 수족관에 남아 있는 물의 양을 a_n L라고 할 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라. 02 수학적 귀납법

중/단/원 기본

1

목표| 이웃한 두 항 사이의 관계식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $(n+1)$단계에는 n단계의 가장 아래층에 $(n+1)$개의 통나무를 추가하므로

$\boldsymbol{a_{n+1}=a_n+n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)}$

2

목표| 수학적 귀납법을 이용하여 배수에 대한 명제를 증명할 수 있게 한다.

풀이| $a_n=n^3+5n$이라고 하자.

(i) $n=\boxed{\mathbf{1}}$일 때, $a_1=1+5=6$

따라서 a_1은 6의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때 a_k가 6의 배수라고 가정하면

$a_k=k^3+5k=6m$ (m은 자연수)

$n=k+1$일 때

$a_{k+1}=(k+1)^3+5(k+1)$

$=\boxed{\boldsymbol{k^3+5k+6}}+3k(k+1)$

그런데 $\boxed{\boldsymbol{k^3+5k+6}}$과 $3k(k+1)$은 모두 6의 배수이므로 $n=\boxed{\boldsymbol{k+1}}$일 때에도 a_n은 6의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 n^3+5n은 6의 배수이다.

3

목표| 수학적 귀납법을 이용하여 등식과 부등식을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (1) (i) $n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{1}{2}=$(우변)

따라서 $n=1$일 때 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

양변에 $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하면

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

(2) (i) $n=5$일 때, (좌변)$=32>26=$(우변)

따라서 $n=5$일 때 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge5)$일 때 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k>k^2+1$

양변에 2를 곱하면 $2^{k+1}>2k^2+2$

그런데 $(2k^2+2)-\{(k+1)^2+1\}=k^2-2k>0$이므로 $2k^2+2>(k+1)^2+1$

따라서 $n=k+1$일 때에도 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\ge5$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

교과서 163 쪽

중단원 실력

[해답 p.231]

수준별 학습

1 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 제15항을 구하여라. (01 수열의 귀납적 정의)

$$a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

2 다음은 명제 '$n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 다항식 $x^n-nx+n-1$은 $(x-1)^2$으로 나누어떨어진다.' …… ① 를 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어라. (02 수학적 귀납법)

(i) $n=\square$일 때, $x^2-2x+2-1=(x-1)^2$
따라서 ①이 성립한다.
(ii) $n=k\ (k\geq\square)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면
$x^k-kx+k-1=(x-1)^2Q(x)$
$n=k+1$일 때
$x^{k+1}-(k+1)x+(k+1)-1=x(x^k-kx+k-1)+\square$
$=(x-1)^2(\square)$
따라서 $n=k+1$일 때에도 ①이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 다항식 $x^n-nx+n-1$은 $(x-1)^2$으로 나누어떨어진다.

3 다음을 수학적 귀납법으로 증명하여라. (02 수학적 귀납법)

모든 자연수 n에 대하여 n^3+3n^2+2n은 3의 배수이다.

4 20 %의 소금물 100 g과 10 %의 소금물 100 g을 섞은 소금물의 농도를 a_1 %, a_1 %의 소금물 100 g과 10 %의 소금물 100 g을 섞은 소금물의 농도를 a_2 %라고 하자. 이와 같은 시행을 n번 반복한 소금물의 농도를 a_n %라고 할 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라. (02 수학적 귀납법)

4

목표| 실생활에서 나타나는 수열의 두 항 사이의 관계식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $(n+1)$일째 수족관에 남아 있는 물의 양은 n일째 남아 있는 물의 반을 버리고 10 L의 물을 새로 넣은 양과 같으므로 $\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+10\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)}$

중/단/원 실력

1

목표| 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a_2=\frac{2}{1}a_1,\ a_3=\frac{3}{2}a_2,\ a_4=\frac{4}{3}a_3,\ \cdots,\ a_{15}=\frac{15}{14}a_{14}$
를 변끼리 곱하면
$a_2a_3a_4\cdots a_{15}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{15}{14}\times a_1a_2a_3\cdots a_{14}$
따라서 $a_{15}=15a_1=15\times2=\mathbf{30}$이다.

2

목표| 수학적 귀납법을 이용하여 다항식에 대한 명제를 증명할 수 있게 한다.

풀이| (i) $n=\boxed{2}$일 때,
$x^2-2x+2-1=(x-1)^2$
따라서 ①이 성립한다.
(ii) $n=k\ (k\geq\boxed{2})$일 때 ①이 성립한다고 가정하면 $x^k-kx+k-1=(x-1)^2Q(x)$
$n=k+1$일 때
$x^{k+1}-(k+1)x+(k+1)-1$
$=x(x^k-kx+k-1)+\boxed{\boldsymbol{kx^2-2kx+k}}$
$=(x-1)^2(\boxed{\boldsymbol{xQ(x)+k}})$
따라서 $n=k+1$일 때에도 ①이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 다항식 $x^n-nx+n-1$은 $(x-1)^2$으로 나누어떨어진다.

3

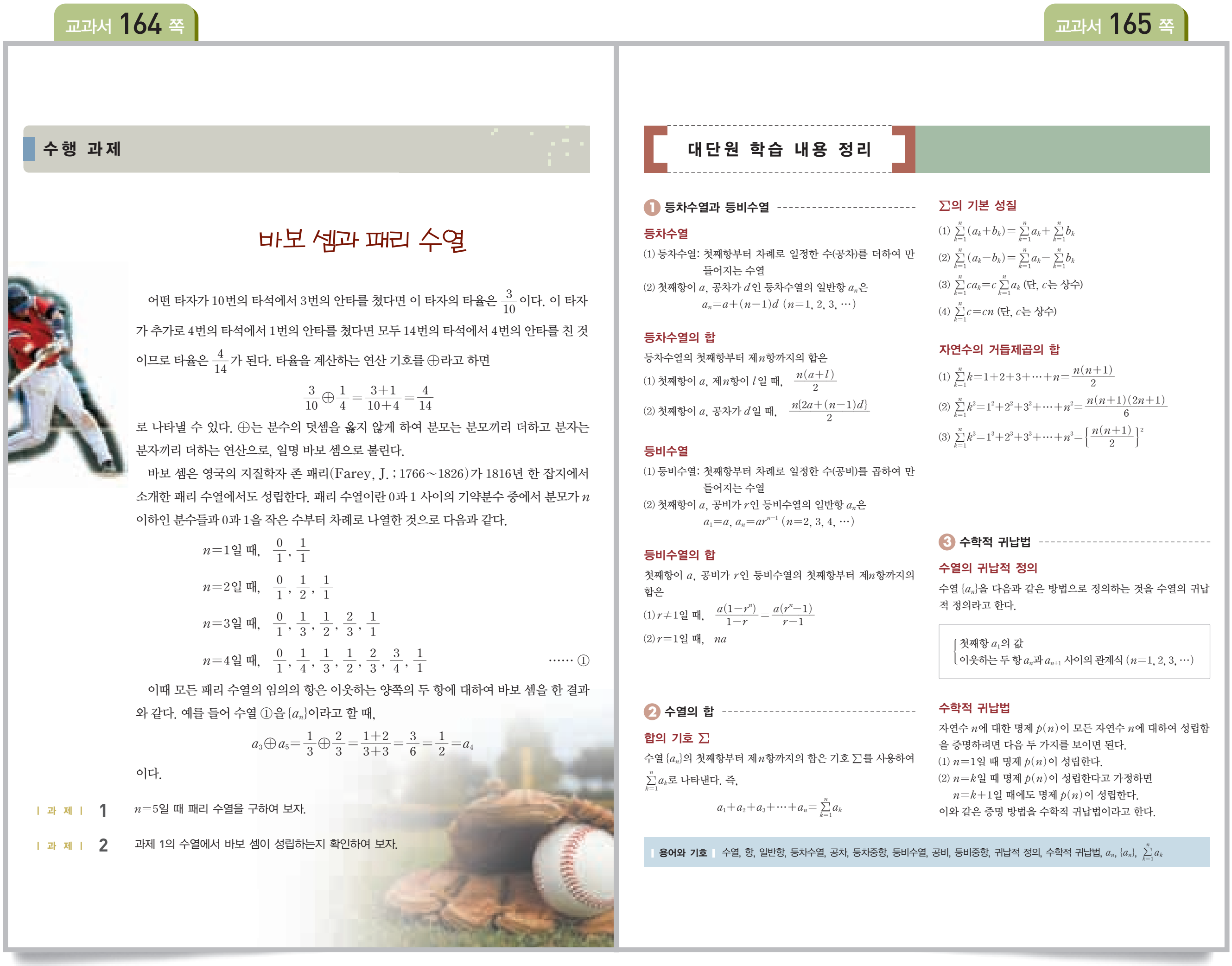
목표| 수학적 귀납법을 이용하여 배수에 대한 명제를 증명할 수 있게 한다.

풀이| $a_n=n^3+3n^2+2n$이라고 하자.
(i) $n=1$일 때, $a_1=1^3+3\cdot1^2+2\cdot1=6$
따라서 a_1은 3의 배수이다.
(ii) $n=k$일 때 a_k가 3의 배수라고 가정하면
$a_k=k^3+3k^2+2k=3m$ (m은 자연수)
$n=k+1$일 때
$(k+1)^3+3(k+1)^2+2(k+1)=3(m+k^2+3k+2)$
따라서 $n=k+1$일 때에도 a_n은 3의 배수이다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 n^3+3n^2+2n은 3의 배수이다.

4

목표| 실생활에서 나타나는 수열의 두 항 사이의 관계식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 시행을 $(n+1)$번 반복한 소금물에서 소금물의 양은 200 g, 소금의 양은
$\frac{a_n}{100}\times100+\frac{10}{100}\times100=a_n+10$(g)이므로
$a_{n+1}=\frac{a_n+10}{200}\times100$에서
$\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+5\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)}$



교과서 164 쪽

수행 과제

바보 셈과 패리 수열

어떤 타자가 10번의 타석에서 3번의 안타를 쳤다면 이 타자의 타율은 $\frac{3}{10}$이다. 이 타자가 추가로 4번의 타석에서 1번의 안타를 쳤다면 모두 14번의 타석에서 4번의 안타를 친 것이므로 타율은 $\frac{4}{14}$가 된다. 타율을 계산하는 연산 기호를 ⊕라고 하면

$$\frac{3}{10}\oplus\frac{1}{4}=\frac{3+1}{10+4}=\frac{4}{14}$$

로 나타낼 수 있다. ⊕는 분수의 덧셈을 옳지 않게 하여 분모는 분모끼리 더하고 분자는 분자끼리 더하는 연산으로, 일명 바보 셈으로 불린다.

바보 셈은 영국의 지질학자 존 패리(Farey, J. ; 1766~1826)가 1816년 한 잡지에서 소개한 패리 수열에서도 성립한다. 패리 수열이란 0과 1 사이의 기약분수 중에서 분모가 n 이하인 분수들과 0과 1을 작은 수부터 차례로 나열한 것으로 다음과 같다.

$n=1$일 때, $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$

$n=2$일 때, $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$

$n=3$일 때, $\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$

$n=4$일 때, $\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$ …… ①

이때 모든 패리 수열의 임의의 항은 이웃하는 양쪽의 두 항에 대하여 바보 셈을 한 결과와 같다. 예를 들어 수열 ①을 $\{a_n\}$이라고 할 때,

$$a_3\oplus a_5=\frac{1}{3}\oplus\frac{2}{3}=\frac{1+2}{3+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=a_4$$

이다.

| 과 제 | 1 $n=5$일 때 패리 수열을 구하여 보자.

| 과 제 | 2 과제 1의 수열에서 바보 셈이 성립하는지 확인하여 보자.

교과서 165 쪽

대단원 학습 내용 정리

1 등차수열과 등비수열

등차수열

(1) 등차수열: 첫째항부터 차례로 일정한 수(공차)를 더하여 만들어지는 수열

(2) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n=a+(n-1)d$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때, $\frac{n(a+l)}{2}$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

등비수열

(1) 등비수열: 첫째항부터 차례로 일정한 수(공비)를 곱하여 만들어지는 수열

(2) 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은
$a_1=a$, $a_n=ar^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

(1) $r\neq1$일 때, $\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, na

2 수열의 합

합의 기호 Σ

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은 기호 Σ를 사용하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k$로 나타낸다. 즉,

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

Σ의 기본 성질

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

(4) $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

3 수학적 귀납법

수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같은 방법으로 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다.

$\begin{cases} \text{첫째항 } a_1\text{의 값} \\ \text{이웃하는 두 항 } a_n\text{과 } a_{n+1} \text{ 사이의 관계식 } (n=1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$

수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

이와 같은 증명 방법을 수학적 귀납법이라고 한다.

| 용어와 기호 | 수열, 항, 일반항, 등차수열, 공차, 등차중항, 등비수열, 공비, 등비중항, 귀납적 정의, 수학적 귀납법, a_n, $\{a_n\}$, $\sum_{k=1}^{n}a_k$

수행 과제

● 수행 과제 의도

패리 수열을 구성하는 원리와 바보 셈의 성립 여부를 확인하는 과정을 통해 새로운 수열을 구성하고 그 특징을 관찰하는 능력을 개발하기 위한 것이다.

과제 1 _풀이

$n=5$일 때,

$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$

과제 2 _풀이

$$a_1\oplus a_3=\frac{0}{1}\oplus\frac{1}{4}=\frac{0+1}{1+4}=\frac{1}{5}=a_2$$

$$a_2\oplus a_4=\frac{1}{5}\oplus\frac{1}{3}=\frac{1+1}{5+3}=\frac{1}{4}=a_3$$

$$a_3\oplus a_5=\frac{1}{4}\oplus\frac{2}{5}=\frac{1+2}{4+5}=\frac{1}{3}=a_4$$

$$a_4\oplus a_6=\frac{1}{3}\oplus\frac{1}{2}=\frac{1+1}{3+2}=\frac{2}{5}=a_5$$

$$a_5\oplus a_7=\frac{2}{5}\oplus\frac{3}{5}=\frac{2+3}{5+5}=\frac{1}{2}=a_6$$

$$a_6\oplus a_8=\frac{1}{2}\oplus\frac{2}{3}=\frac{1+2}{2+3}=\frac{3}{5}=a_7$$

$$a_7\oplus a_9=\frac{3}{5}\oplus\frac{3}{4}=\frac{3+3}{5+4}=\frac{2}{3}=a_8$$

$$a_8\oplus a_{10}=\frac{2}{3}\oplus\frac{4}{5}=\frac{2+4}{3+5}=\frac{3}{4}=a_9$$

$$a_9\oplus a_{11}=\frac{3}{4}\oplus\frac{1}{1}=\frac{3+1}{4+1}=\frac{4}{5}=a_{10}$$

교과서 166 쪽

대 / 단 / 원 평가 문제

Ⅲ. 수열

선택형

1 다음 중 값이 가장 큰 것은?

① 첫째항이 -10, 공차가 7인 등차수열 $\{a_n\}$의 a_5

② 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 a_5

③ $a_2=10$, $a_{10}=90$인 등차수열 $\{a_n\}$의 a_5

④ $a_3=16$, $a_6=128$인 등비수열 $\{a_n\}$의 a_5

⑤ $a_1=1$, $a_2=3$, $a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$ 인 수열 $\{a_n\}$의 a_5

2 첫째항이 -20, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{20}|$의 값은?

① 0　② 17　③ 34　④ 170　⑤ 324

3 일반항이 $a_n=-4n+55$인 수열에서 첫째항부터 제n항까지의 합이 최대가 되도록 하는 n의 값과 그때의 합을 구하면?

① 12, 350　② 12, 351　③ 12, 356　④ 13, 351　⑤ 13, 356

4 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_{11}}{a_1}+\frac{a_{12}}{a_2}+\frac{a_{13}}{a_3}+\cdots+\frac{a_{30}}{a_{20}}=40$$

일 때, $\frac{a_{150}}{a_{100}}$의 값은?

① 16　② 32　③ 48　④ 64　⑤ 81

5 함수 $f(x)=x^{30}+x^{29}+x^{28}+\cdots+x+2$에 대하여 $(f\circ f)(0)$의 값은?

① $2^{30}-2$　② 2^{30}　③ $2^{31}-2$　④ 2^{31}　⑤ $2^{31}+2$

6 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k=2n^2-n$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$의 값은?

① 410　② 420　③ 430　④ 440　⑤ 450

7 $\sum_{k=2}^{n}(k^3+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^3+1)$의 값은?

① n^3-2　② n^3-1　③ n^3　④ n^3+1　⑤ n^3+2

8 x에 대한 이차방정식

$$nx^2+x-n(n+1)=0 \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

의 두 근을 α_n, β_n이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\beta_k}\right)$의 값은?

① $\frac{19}{20}$　② $\frac{20}{21}$　③ $\frac{22}{21}$　④ $\frac{21}{20}$　⑤ $\frac{20}{19}$

대 / 단 / 원 평가 문제

1

목표| 수열의 일반항을 이용하여 항을 구할 수 있게 한다.

풀이| ① $a_n=7n-17$이므로

$a_5=7\cdot5-17=18$

② $a_1=\frac{1}{2}$, $a_n=\frac{1}{2}\cdot3^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$이므로

$a_5=\frac{1}{2}\cdot3^4=\frac{81}{2}$

③ $a_n=10n-10$이므로

$a_5=10\cdot5-10=40$

④ $a_1=4$, $a_n=4\cdot2^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$이므로

$a_5=4\cdot2^4=64$

⑤ $a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$에 $n=2, 3, 4$를 대입하면

$a_3=a_2+2^1=5$, $a_4=a_3+2^2=9$, $a_5=a_4+2^3=17$

답 ④

2

목표| 등차수열의 일반항을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 $a_n=3n-23$

$3n-23>0$에서 $n>\frac{23}{3}=7.666\cdots$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제7항까지는 음수이고, 제8항부터는 양수인 항으로 이루어져 있다.

따라서

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$

$=-(a_1+a_2+\cdots+a_7)+(a_8+a_9+\cdots+a_{20})$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{20})-2(a_1+a_2+\cdots+a_7)$

$=\frac{20\{2\cdot(-20)+19\cdot3\}}{2}$

$\quad-2\cdot\frac{7\{2\cdot(-20)+6\cdot3\}}{2}$

$=324$

답 ⑤

3

목표| 수열의 합의 최댓값과 그때의 항수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $-4n+55<0$에서 $n>13.75$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제14항부터 음수인 항이 나타나므로 첫째항부터 제13항까지의 합이 최대가 된다.

$a_1=51$, $a_{13}=3$이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제13항까지의 합은 $\frac{13(51+3)}{2}=351$

답 ④

4

목표| 등비수열의 일반항을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$\frac{a_{11}}{a_1}+\frac{a_{12}}{a_2}+\frac{a_{13}}{a_3}+\cdots+\frac{a_{30}}{a_{20}}$

$=\frac{ar^{10}}{a}+\frac{ar^{11}}{ar}+\frac{ar^{12}}{ar^2}+\cdots+\frac{ar^{29}}{ar^{19}}$

$=r^{10}+r^{10}+r^{10}+\cdots+r^{10}$

$=20r^{10}=40$

$r^{10}=2$

따라서 $\frac{a_{150}}{a_{100}}=\frac{ar^{149}}{ar^{99}}=r^{50}=(r^{10})^5=2^5=32$

답 ②

교과서 167 쪽

[해답 p.231]

9 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n-3b_n \\ b_{n+1}=-3a_n+2b_n \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{99}(a_k+b_{k+1})$의 값과 같은 것은?

① $b_{100}-a_1$ ② a_1-b_{100} ③ a_1+b_{100}
④ $-a_1-b_{100}$ ⑤ $b_{100}-b_1$

10 모든 자연수 k에 대하여 $a_k\in\{0, 1, 3\}$이고 $\sum_{k=1}^{n}a_k=22$, $\sum_{k=1}^{n}a_k^{\,2}=52$일 때, $\sum_{k=1}^{n}a_k^{\,3}$의 값은?

① 140 ② 142 ③ 144
④ 146 ⑤ 148

서답형

11 어떤 직각삼각형의 세 변의 길이가 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 이 직각삼각형의 세 변의 길이를 구하여라.

12 $S_n=1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^{n-1}$ …… ①
일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $2S_n$을 ①과 같이 합의 꼴로 나타내어라.
(2) $2S_n$에서 ①을 뺀 값을 이용하여 S_n을 구하여라.

13 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 세 항 a_2, a_4, a_9가 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이룰 때, $4r$의 값을 구하여라.

14 길이가 2인 선분 A_1A_2가 있다. 선분 A_1A_2를 $2:1$로 내분하는 점을 A_3이라 하고 선분 A_2A_3을 $2:1$로 내분하는 점을 A_4라고 하자. 이와 같은 방법으로 선분 A_nA_{n+1}을 $2:1$로 내분하는 점을 A_{n+2}라 하고 선분 A_nA_{n+1}의 길이를 a_n이라고 할 때, a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식을 구하여라.

|서|술|형|

15 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2-2n$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{a_ka_{k+1}}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 p가 음이 아닌 정수일 때, 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$\sum_{l=1}^{n}l(l+1)\cdots(l+p)$$
$$=\frac{n}{p+2}(n+1)\cdots(n+p+1)$$

5

목표| 합성함수로 정의된 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(0)=2$

$$(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(2)$$
$$=2^{30}+2^{29}+2^{28}+\cdots+2^2+2^1+2$$
$$=\frac{2(2^{30}-1)}{2-1}+2=2^{31}$$

답 ④

6

목표| 수열의 합을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 $S_n=2n^2-n$

$a_1=S_1=1$, $a_n=S_n-S_{n-1}=4n-3$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=4n-3$

$a_{2k}=4(2k)-3=8k-3$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=8\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}3=8\cdot\frac{10\cdot11}{2}-3\cdot10=410$$

답 ①

7

목표| Σ의 기본 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\sum_{k=2}^{n}(k^3+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^3+1)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k^3+1)-(1^3+1)$$
$$-\left\{\sum_{k=1}^{n}(k^3+1)-(n^3+1)\right\}$$
$$=-2+n^3+1=n^3-1$$

답 ②

8

목표| 분수 꼴의 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-\frac{1}{n}$, $\alpha_n\beta_n=-n-1$

$$\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\beta_k}\right)=\sum_{k=1}^{20}\frac{\alpha_k+\beta_k}{\alpha_k\beta_k}=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$$

답 ②

9

목표| 두 수열 사이의 관계식을 이용하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a_{n+1}=2a_n-3b_n$과 $b_{n+1}=-3a_n+2b_n$을 변끼리 더하면 $a_{n+1}+b_{n+1}=-(a_n+b_n)$이므로

$$\sum_{k=1}^{99}(a_k+b_{k+1})=(a_1+b_{100})+\{(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots$$
$$+(a_{98}+b_{98})+(a_{99}+b_{99})\}$$
$$=a_1+b_{100}$$

답 ③

10

목표| 수열이 만족시키는 조건을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| a_k $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$는 0, 1, 3 중 하나이므로 0이 x개, 1이 y개, 2가 z개라고 하면

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=0\cdot x+1\cdot y+3\cdot z=22 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^{\,2}=0\cdot x+1\cdot y+9\cdot z=52 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $y=7$, $z=5$이므로

$\sum_{k=1}^{n} a_k^3=0\cdot x+1\cdot y+27\cdot z=142$ 답 ②

11

목표| 등차수열의 성질을 이용하여 삼각형의 세 변의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 직각삼각형의 가장 짧은 변의 길이를 a라고 하면 삼각형의 세 변의 길이는 각각 a, $a+3$, $a+6$이다.
빗변의 길이가 가장 크므로 피타고라스 정리에 의하여
$(a+6)^2=a^2+(a+3)^2$, $a=-3$ 또는 $a=9$
$a>0$이므로 $a=9$
따라서 직각삼각형의 세 변의 길이는 9, 12, 15이다.

답 9, 12, 15

12

목표| 복잡한 수열의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2S_n=2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^n$

(2)
$$\begin{array}{rl} 2S_n= & 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^n \\ -)\ S_n= & 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^{n-1} \\ \hline S_n= & -1-2-2^2-2^3-\cdots-2^{n-1}+n\cdot 2^n \end{array}$$
$$=-(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})+n\cdot 2^n$$
$$=-\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}+n\cdot 2^n$$
$$=n\cdot 2^n-2^n+1$$
답 풀이 참조

13

목표| 등차수열과 등비수열의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d(d\neq 0)$라고 하면 세 수 $a+d$, $a+3d$, $a+8d$가 등비수열을 이루므로
$(a+3d)^2=(a+d)(a+8d)$에서
$d(d-3a)=0$, $d=3a$
이 등비수열의 공비 r는 $r=\frac{a+3d}{a+d}=\frac{a+9a}{a+3a}=\frac{10}{4}$이므로 $4r=10$ 답 10

14

목표| 이웃하는 두 항 사이의 관계식을 찾을 수 있게 한다.

풀이| 선분 $A_{n+1}A_{n+2}$의 길이는 A_nA_{n+1}의 길이의 $\frac{1}{2+1}$이므로 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$ 답 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$

15

목표| 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $n=1$일 때, $a_1=S_1=-1$ …… ①
$n\geq 2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}=2n-3$ …… ②
②에 $n=1$을 대입하면 ①과 같으므로 이 수열의 일반항 a_n은 $a_n=2n-3$이다.
$$\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{(2k-3)(2k-1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2k-1}\right)$$
$$=-\frac{1}{1}-\frac{1}{19}=-\frac{20}{19}$$
답 $-\frac{20}{19}$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	a_1의 값 구하기	10%
	$n\geq 2$일 때 a_n 구하기	40%
	일반항 a_n 구하기	20%
답 구하기	$\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{a_ka_{k+1}}$의 값 구하기	30%

16

목표| 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 등식을 증명할 수 있게 한다.

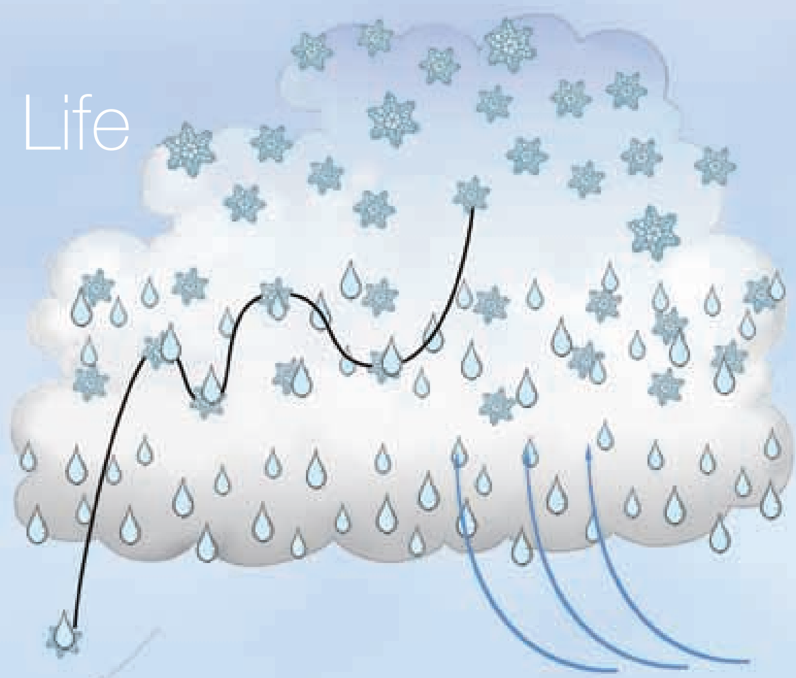
풀이| (i) $n=1$일 때
(좌변)$=1\times 2\times 3\times\cdots\times(1+p)=$(우변)
(ii) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하면
$$\sum_{l=1}^{k} l(l+1)(l+2)\cdots(l+p)$$
$$=\frac{k}{p+2}(k+1)\cdots(k+p+1)$$
양변에 $(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+1+p)$를 더하면
$$\sum_{l=1}^{k+1} l(l+1)(l+2)\cdots(l+p)$$
$$=\frac{k+1}{p+2}(k+2)\cdots(k+1+p+1)$$
따라서 $n=k+1$일 때에도 등식이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다. 답 풀이 참조

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	$n=1$일 때, 등식이 성립함을 보이기	20%
	$n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때 등식이 성립함을 보이기	60%
답 구하기	모든 자연수 n에 대하여 등식이 성립함을 보이기	20%

M+ Real Life

수학 + 실생활



우박수

1937년, 박사 학위를 받은 지 겨우 2년 남짓 된 독일의 수학자 콜라츠(Collatz, L. ; 1910～1990)는 아주 단순하면서도 재미있는 문제를 제시하였다. 그의 이름을 따서 콜라츠의 추측이라고 불리는 이 문제는 다음과 같다.

> 자연수를 하나 고른다. 이 수가 짝수이면 2로 나누고, 홀수이면 3을 곱한 다음 1을 더한다. 다시 그 수가 짝수이면 2로 나누고, 홀수이면 3을 곱한 다음 1을 더한다. 이 과정을 반복하면 그 수는 항상 1이 될까?

이 추측은 3을 곱하고 1을 더하는 과정 때문에 '$(3n+1)$ 문제'로 불리기도 한다. 처음에 고른 수가 3이면 3은 홀수이므로 다음 수는 $3\times3+1=10$이고, 10은 짝수이므로 다음 수는 5이다. 이 과정을 반복하면 다음과 같다.

$$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

수가 잠깐 커지기는 하지만 짝수가 될 때마다 절반씩 줄어들기 때문에 이 추측은 어느 정도는 당연해 보이기도 한다. 이번에는 7로 시작하여 보자. 이 경우 그 결과는 다음과 같다.

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5$$
$$\to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

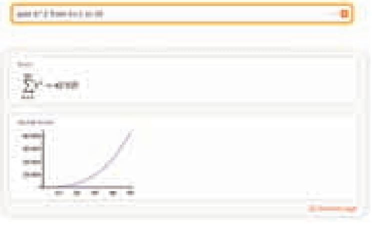
줄어들 듯하면서 중간중간 커지더니 16단계에서야 겨우 1이 된다. 이처럼 수가 커졌다 작아졌다를 반복하다가 어느 순간 계속 작아져 1이 되는 모습이 마치 우박이 구름 속에서 오르내리며 자라다가 지상으로 떨어지는 것과 비슷하다는 뜻에서 이 수들을 '우박수(hailstone number)'라고 부르기도 한다.

컴퓨터로 수열에 대하여 알아보자.

컴퓨터를 이용하면 수열의 일반항과 합을 쉽게 구할 수 있고, 수열을 함수로 나타내어 그래프를 그릴 수 있다. 적절한 소프트웨어를 이용하여 수열에 대한 다양한 학습 활동과 흥미 있는 경험을 해 보자.

1 \ 수열의 일반항을 구하여 보자.

수열 1, 4, 9, 16, 25, …의 일반항을 구하기 위하여 검색창에 '1, 4, 9, 16, ...'을 입력하면 왼쪽 그림과 같이 수열의 일반항은 $a_n=n^2$임을 알 수 있다.



2 \ 수열의 합을 구하여 보자.

$\sum_{k=1}^{50} k^2$을 구하기 위하여 입력창에 'sum k^2 from k=1 to 50'을 입력하면 왼쪽 그림과 같이 $\sum_{k=1}^{50} k^2=42925$임을 알 수 있다.

수 학 공 학

M+ Engineering

프랑스의 수학자 라플라스는 다음과 같이 말하였다.

“로그의 발명으로 천문학자의 수명이 두 배로 연장되었다.”

지수와 로그

| 준 | 비 | 학 | 습 |

중② 지수법칙

1 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $3^2\times3^5$ 3^7

(2) $(2^3)^2$ 2^6

(3) $5^6\div5^3$ 5^3

(4) $\dfrac{6^3}{2^3}$ 3^3

중③ 제곱근

2 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 4 ±2

(2) 5 $\pm\sqrt{5}$

(3) $(-3)^2$ ±3

(4) $\sqrt{(-7)^2}$ $\pm\sqrt{7}$

중③ 제곱근의 곱셈과 나눗셈

3 다음을 계산하여라.

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$ 4

(2) $\sqrt{24}\div\sqrt{3}$ $2\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{3}\times\sqrt{30}\div\sqrt{5}$ $3\sqrt{2}$

(4) $\sqrt{6}\div\sqrt{8}\times2\sqrt{5}$ $\sqrt{15}$

단원의 지도 목표

1. 지수

① 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.
② 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해하게 한다.
③ 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있게 한다.

2. 로그

① 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.
② 상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 지수가 실수인 경우는 직관적으로 다룬다.
② 로그의 성질은 지수의 성질과 관련지어 이해하게 한다.
③ 지수나 로그에 관련된 문제를 다룰 때 공학적 도구를 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습	본 단원	후속 학습
[중1~3학년군] 소인수분해 제곱근과 실수 근호를 포함한 식의 계산	1. 지수 거듭제곱과 거듭제곱근 지수의 확장과 지수법칙 2. 로그 로그의 뜻과 성질 상용로그	[미적분 Ⅱ] 지수함수 로그함수

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~3	170~171	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 지수	중단원 도입		172	• 매우 크거나 작은 수	
	01 거듭제곱과 거듭제곱근		173~177	• 거듭제곱과 거듭제곱근 • 거듭제곱근의 성질	거듭제곱근, $\sqrt[n]{a}$
	02 지수의 확장과 지수법칙	4~6	178~184	• 0 또는 음의 정수인 지수 • 유리수인 지수 • 실수인 지수	
	수준별 학습	7	185~187	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 로그	중단원 도입	8~11	188	• 별의 밝기	
	01 로그의 뜻과 성질		189~195	• 로그의 뜻 • 로그의 성질 • 로그의 밑의 변환	(로그의) 밑, 로그, 진수, $\log_a N$
	02 상용로그	12~13	196~198	• 상용로그의 뜻과 활용	상용로그, $\log N$
	수준별 학습	14	199~201	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		15~16	202~207	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 역사적 배경

16세기를 대표하는 수학, 즉 대수는 중세 후기에 있어서의 상업의 발달, 기술, 건축, 회화, 항해, 지리학, 천문학 등의 여러 요인에 의해서 주로 수학의 실용적인 면으로서의 복잡한 계산을 간단하게 처리해야 할 필요성 때문에 탄생한 것이다.

계산의 필요성을 매우 절감하고 있었던 시기에 네이피어(Napier, J. ; 1550～1617)가 곱셈, 나눗셈의 번거로운 수고를 덜어 주는 로그(logarithm)를 창안하였고, 또한 같은 시대에 뷔르기(Bürgi, J. ; 1552～1632)에 의해서도 로그가 발견되어 천문학자들의 계산 능력을 크게 향상시키는 결과를 가져왔다. 그 후 브리그스(Briggs, H. ; 1561～1630)가 상용로그를, 한편에서는 스파이델(Speidell, J. : 1619경)이 삼각함수의 자연로그를 계산하는 등 새로운 발견 중에서도 로그만큼 급속히 퍼져 나갔던 것은 거의 없었으며, 넘칠 정도로 완벽한 로그표들이 만들어졌다.


네이피어

2. 지수 기호

정수 지수와 소수 지수에 대한 지수법칙이 슈티펠(Stifel, M. ; 1487～1567)의 저서 “Arithmetica Integra”에서 처음 등장한다.

한편 근세의 지수 기호는 스테빈(Stevin, S. ; 1548～1620)이 사용한 기호에서 찾아볼 수 있다.

그는 x, x^2, x^3을 각각

$$(1),\ (2),\ (3)$$


스테빈

으로 나타내었으며 $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$은 각각

$$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}\right)$$

로 나타내었다.

오늘날의 a^4과 같은 밑과 지수 기호는 데카르트(Descartes, R. ; 1596～1650)에 따른 것이다. 그는 a^n과 같은 일반적인 꼴의 지수와 분수 지수에 대해서는 생각하지 못하였으나 C를 써서 $\sqrt{C+\frac{1}{2}q}$는 세제곱근 $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$을 나타내었다.

3. 로그의 발견

로그의 이론적인 기초는 고대 그리스의 수학자 아르키메데스(Archimedes ; ?B.C. 287～B.C. 212)의 “모래의 계산자” 속에서 살펴볼 수 있다. 그는 여기서 a^0, a^1, a^2, a^3, …에 관하여 설명하고 있으며, 현재의 지수법칙인 $a^m a^n = a^{m+n}$과 같은 내용도 다루었다. 그 후 오렘(Oresme, N. ; ?1320～1382)은 등비급수와 등차급수의 비교로부터 출발하여, 자연수와 자연수 사이에 분수를 삽입하여 분수 지수의 개념을 일반화하였다. 또 슈티펠은 두 수열

$$\cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

$$\cdots,\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \cdots$$

의 항을 대비시키고, 등비수열의 항에 대한 등차수열의 항을 ‘지수’라고 불렀으며 분수 지수와 음의 지수를 도입하였다.

뷔르기는 스테빈식의 수표 $a(1+r)^n$을 바탕으로 독자적인 로그표를 작성하였다. 그는 수표에 나타나는 값의 차이를 아주 작게 하기 위해서 $r=10^{-2}$으로 잡았다. 또 되도록 소수가 나오지 않도록 하기 위하여 $a=10^8$을 곱하고 거기서 생긴 등비수열

$$g_k=10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^k \ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

의 각 항에 다음 표와 같이 등차수열

$$0,\ 10,\ 20,\ 30,\ \cdots$$

을 대응시켰다.

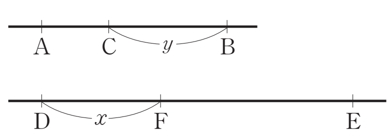
10^8	$10^8(1+10^{-4})$	$10^8(1+10^{-4})^2$	$10^8(1+10^{-4})^3$	$\cdots$
0	10	20	30	$\cdots$

이 수표를 사용하면 계산이 극히 편리해지는데도 뷔르기는 오랫동안 이것을 발표하지 않고 있었다. 마침내 그가 프라그의 천문대에서 관측과 계산을 도왔던 케플러의 간청에 못 이겨 '등차 및 등비수열의 표(Arithmetische und geometrische Progress－Tabulen, 1620년)'라는 이름의 논문을 발표했는데, 그때는 이미 네이피어의 저술이 발간된 지 6년이 지난 뒤의 일이었다.

4. 네이피어의 로그

하나의 계산 도구로서 로그는 곱셈과 나눗셈을 좀 더 간단한 연산인 덧셈과 뺄셈으로 전환시킬 수 있다는 장점이 있다.

네이피어는 속도의 개념으로부터 로그의 개념에 도달하여 천문학에서의 큰 숫자를 간단히 하는 데 착안하여 로그를 만들었는데, 그의 로그에 대한 정의는 다음과 같다.



두 선분 AB와 DE에 대하여 점 C와 점 F는 각각 점 A와 점 D에서 동시에 출발하며 그것들의 초기 속도는 서로 같다고 하자. 또 점 C가 선분 CB의 길이와 같은 크기의 속도로 움직이고 점 F는 균일한 속도로 움직인다고 가정하자. 이때 선분 DF를 선분 CB의 로그라고 한다.

위의 그림에서 $\overline{DF}=x$, $\overline{CB}=y$라고 하면

$$x=\text{Log}\ y \qquad \cdots\cdots ①$$

가 성립한다(여기서 'Log'는 네이피어 로그를 나타내며, 지금의 'log'와는 차이가 있다.).

앞의 정의에서 네이피어는 소수를 피하기 위하여 선분 AB의 길이를 10^7으로 택하였는데, 그것은 그가 접할 수 있었던 가장 좋은 사인표는 소수점 아래 일곱째 자리까지 전개되어 있었기 때문이었다.

식 ①은

$$\text{Log}\ y=10^7\log_{\frac{1}{e}}\frac{y}{10^7}$$

와 같이 다시 표현할 수 있다.

네이피어 로그가 자연로그(밑이 e인 로그)와 엄밀하게 같지 않은데도 자연로그라고 자주 인용되고 있는데, 그 이유는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\text{Log}\ 2x&=10^7\log_{\frac{1}{e}}\frac{2x}{10^7}\\&=10^7\log_{\frac{1}{e}}\frac{x}{10^7}+10^7\log_{\frac{1}{e}}2\\&=\text{Log}\ x-10^7\log_e 2\end{aligned}$$

따라서

$$\text{Log}\ 2x=\text{Log}\ x-10^7\log_e 2$$

로 되며 마찬가지로

$$\text{Log}\ 10x=\text{Log}\ x-10^7\log_e 10$$

이 된다.

네이피어는 위의 식을 유도하지는 않았다. 그러나 'x가 2배로 될 때 로그의 차는 6931469.22가 되며, x가 10배로 될 때의 로그의 차는 23025842.34가 된다.'라고 기술한 내용을 보면

$$\log_e 2=0.693146922,\ \log_e 10=2.302584234$$

라는 값이 됨을 알고 있었던 것으로 추정된다.

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

<table>
<tr><td colspan="2">대단원</td><td>Ⅳ. 지수와 로그</td><td>쪽수</td><td>교과서 170~174쪽</td></tr>
<tr><td colspan="2">소단원</td><td>1. 지수 1-1 거듭제곱과 거듭제곱근</td><td>차시</td><td>1/16</td></tr>
<tr><td colspan="2">학습 목표</td><td colspan="3">지수법칙을 이용하여 간단한 계산을 할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td>학습 과정</td><td colspan="2">교수 · 학습 활동</td><td>교수 · 학습상의 유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>선수 학습 확인
동기 유발
학습 목표 제시</td><td colspan="2">● 준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다.
● 중단원 도입 글을 읽고, 단원 과제를 발문하여 이번 단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다.
● 이번 차시의 학습 목표를 제시한다.
• 지수법칙을 이용하여 간단한 계산을 할 수 있다.</td><td></td></tr>
<tr><td>전개</td><td>탐구 활동
개념 학습
문제 해결</td><td colspan="2">● 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 해결하도록 한다.
● 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다.
● 학습 내용 설명
• **지수법칙**
a, b가 실수이고, m, n이 자연수 일 때
(1) $a^m b^n = a^{m+n}$ (2) $(a^m)^n = a^{mn}$
(3) $(ab)^n = a^n b^n$ (4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$
(5) $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$
● 문제 1번을 풀게 한다.
• 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.</td><td></td></tr>
<tr><td>정리</td><td>학습 내용 정리
차시 예고</td><td colspan="2">● 본시의 학습 내용을 정리한다.
● 다음 차시를 예고한다.
• 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻에 대하여 알아본다.</td><td></td></tr>
</table>

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

<table>
<tr><td colspan="2">대단원</td><td>Ⅳ. 지수와 로그</td><td>쪽수</td><td>교과서 174~175쪽</td></tr>
<tr><td colspan="2">소단원</td><td>1. 지수　1-1 거듭제곱과 거듭제곱근</td><td>차시</td><td>2/16</td></tr>
<tr><td colspan="2">학습 목표</td><td colspan="3">거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알 수 있다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td>학습 과정</td><td colspan="2">교수 · 학습 활동</td><td>교수 · 학습상의 유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>선수 학습 확인
동기 유발

학습 목표 제시</td><td colspan="2">이전 차시에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다.
학습 동기 유발을 위한 발문을 한다.
예 $x^2=1$, $x^3=1$의 해를 말하여 보자.
이번 차시의 학습 목표를 제시한다.
• 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알 수 있다.</td><td></td></tr>
<tr><td>전개</td><td>개념 학습

문제 해결</td><td colspan="2">학습 내용 설명
• 거듭제곱근
(1) n이 2 이상의 자연수일 때 n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 $x^n=a$를 만족시키는 수 x를 a의 n제곱근이라고 한다. 이때 a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 거듭제곱근이라고 한다.
(2) a의 실수인 n제곱근: n이 2 이상의 자연수일 때
<table>
<tr><td></td><td>$a>0$</td><td>$a=0$</td><td>$a<0$</td></tr>
<tr><td>n이 홀수</td><td>$\sqrt[n]{a}$</td><td>0</td><td>$\sqrt[n]{a}$</td></tr>
<tr><td>n이 짝수</td><td>$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$</td><td>0</td><td>없다.</td></tr>
</table>
예제 01을 설명한다.
문제 2, 3번을 풀게 한다.
• 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.</td><td></td></tr>
<tr><td>정리</td><td>학습 내용 정리
차시 예고</td><td colspan="2">본시의 학습 내용을 정리한다.
다음 차시를 예고한다.
• 거듭제곱근의 성질에 대하여 알아본다.</td><td></td></tr>
</table>

1 지수

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.

② 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해하게 한다.

③ 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있게 한다.

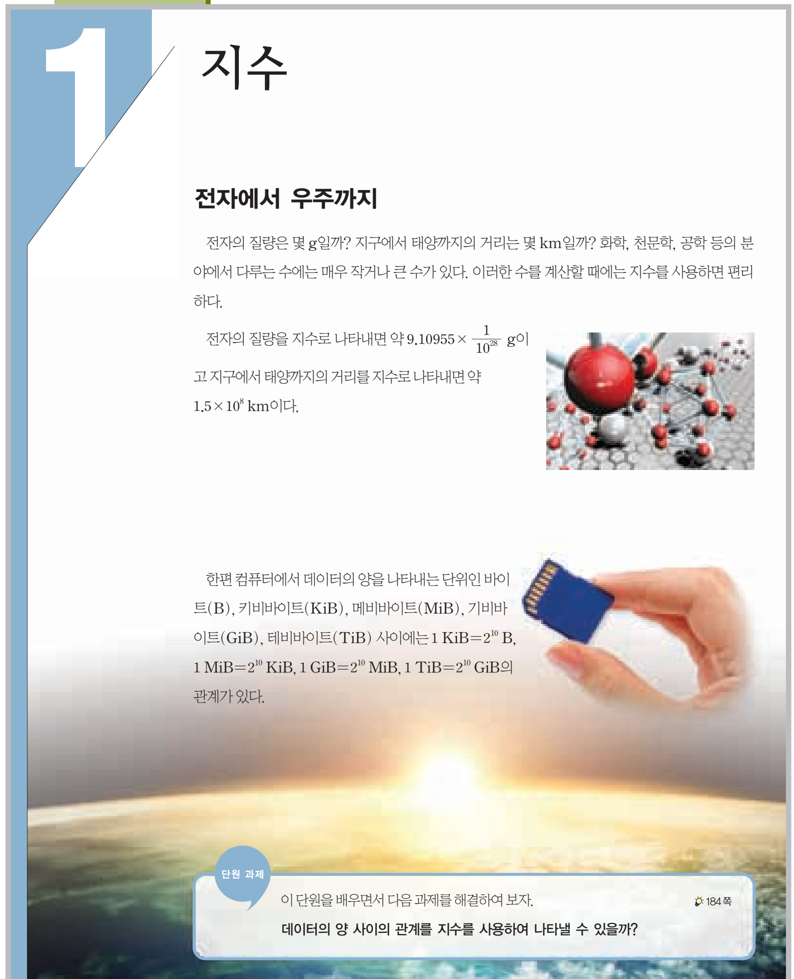
중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 거듭제곱과 거듭제곱근	거듭제곱과 거듭제곱근
	거듭제곱근의 성질
02 지수의 확장과 지수법칙	0 또는 음의 정수인 지수
	유리수인 지수
	실수인 지수
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

들어가면서 컴퓨터와 같은 공학적인 도구가 없었던 과거에는 엄청나게 큰 수나 극히 작은 수를 계산하는 일은 무척 어려운 일이었다. 그러나 실수인 지수를 정의하고 지수법칙이 발견되면서 그러한 어려움은 해결되었다.

이 단원에서는 이러한 지수와 로그의 성질을 통해 큰 수와 작은 수의 표현 방법을 익히고, 실생활에서 당면하는 문제를 해결해 봄으로써 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 지도한다.

교과서 172 쪽



1 지수

전자에서 우주까지

전자의 질량은 몇 g일까? 지구에서 태양까지의 거리는 몇 km일까? 화학, 천문학, 공학 등의 분야에서 다루는 수에는 매우 작거나 큰 수가 있다. 이러한 수를 계산할 때에는 지수를 사용하면 편리하다.

전자의 질량을 지수로 나타내면 약 $9.10955\times\frac{1}{10^{28}}$ g이고 지구에서 태양까지의 거리를 지수로 나타내면 약 1.5×10^{8} km이다.

한편 컴퓨터에서 데이터의 양을 나타내는 단위인 바이트(B), 키비바이트(KiB), 메비바이트(MiB), 기비바이트(GiB), 테비바이트(TiB) 사이에는 1 KiB$=2^{10}$ B, 1 MiB$=2^{10}$ KiB, 1 GiB$=2^{10}$ MiB, 1 TiB$=2^{10}$ GiB의 관계가 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 184쪽

데이터의 양 사이의 관계를 지수를 사용하여 나타낼 수 있을까?

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻과 그 성질을 설명할 수 있다.	상	$y=x^{n}$의 그래프를 통해 거듭제곱근 중 실수인 것이 한 개, 또는 두 개뿐임을 이해하고, 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.
	중	거듭제곱근의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 나타낼 수 있다.
	하	실수의 거듭제곱근 중 실수인 것의 개수를 구할 수 있으며, 거듭제곱근 기호를 사용하여 표현할 수 있다.
2. 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해하고, 식을 간단히 나타낼 수 있다.	상	지수가 실수까지 확장될 수 있음을 이해하고 식을 간단히 나타낼 수 있다.
	중	$a\neq0$이고, m, n이 자연수일 때, $a^{0}=1$, $a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$ 임을 이해하고 식을 간단히 나타낼 수 있다.
	하	$a\neq0$이고, n이 양의 정수일 때, $a^{0}=1$, $a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$ 임을 이해하고 식을 간단히 나타낼 수 있다.
3. 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.	상	지수법칙을 설명할 수 있고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.
	중	지수가 유리수인 식을 간단히 나타낼 수 있다.
	하	밑이 같고 지수가 정수인 식을 간단히 나타낼 수 있다.

교과서 173 쪽

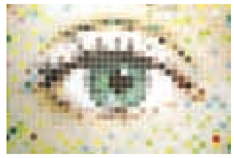
01 거듭제곱과 거듭제곱근

● 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

거듭제곱과 거듭제곱근이란 무엇인가?

생각 열기 픽셀

컴퓨터 모니터의 화면은 더 이상 쪼개지지 않는 작은 점들이 모여 전체를 이룬 것으로 이 작은 점을 픽셀(pixel)이라고 한다. 해상도가 640×480이라는 것은 $640\times480=307200$개의 픽셀이 화면에 들어 있다는 뜻이며 픽셀이 많을수록 화질이 좋다.



탐구 활동 생각 열기를 보고, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 해상도가 1024×512인 화면에 들어 있는 픽셀은 몇 개인가?
2. 1에서 구한 픽셀의 개수를 2의 거듭제곱으로 표현하여 보자.

a^n ← n: 지수, a: 밑

실수 a를 n번 곱한 a^n을 a의 n제곱이라 하고, a, a^2, a^3, $\cdots$을 통틀어 a의 거듭제곱이라고 한다. 이때 a^n에서 a는 거듭제곱의 밑, n은 거듭제곱의 지수이다.

중학교에서 배운 다음과 같은 지수법칙을 이용하면 거듭제곱을 포함한 복잡한 식을 간단히 할 수 있다.

지수법칙

a, b가 실수이고 m, n이 자연수일 때

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$

(4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $(b\neq0)$

(5) $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$ $(a\neq0)$

보기 (1) $a^2b^3\times ab^4 = a^{2+1}b^{3+4} = a^3b^7$

(2) $a\neq0$, $b\neq0$일 때, $a^4b^2\div(ab)^3 = a^4b^2\div a^3b^3 = \dfrac{a^{4-3}}{b^{3-2}} = \dfrac{a}{b}$

01 거듭제곱과 거듭제곱근

소단원 지도 목표

① 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그래프를 이용하여 그 존재성을 이해하게 한다.

② 거듭제곱근을 정확하게 표현하고, 실수인 거듭제곱근을 구할 수 있게 한다.

③ 제곱근의 성질을 바탕으로 거듭제곱근의 성질을 유도하고, 이를 이용하여 여러 가지 계산을 할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 제곱과 제곱근의 관계 및 제곱근의 성질을 바탕으로 자연수 n에 대하여 n제곱과 n제곱근의 관계를 이해하고 거듭제곱근의 성질을 유도하도록 한다.

2. 방정식 $x^n=a$의 해는 복소수의 범위에서는 n개가 있으나 여기에서는 복소수까지 생각하지 않고 실수인 것만을 다룬다.

3. 실수인 거듭제곱근의 개수는 그래프를 이용하여 직관적으로 이해하게 하고, 실수인 거듭제곱근을 구할 때에는 방정식을 만들어서 실수인 해를 구하도록 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

• 거듭제곱근(radical root)

• $\sqrt[n]{a}$

생각 열기 참/고/자/료

컴퓨터 모니터에서 볼 수 있는 디지털 이미지들을 아주 크게 확대하면, 그림의 경계선들이 연속된 곡선이 아니라 작은 사각형들이 붙어서 늘어서 있는 것을 알 수 있다. 이처럼 디지털 이미지들은 더 이상 쪼개지지 않는(주로) 네모 모양의 작은 점들이 모여서 전체 그림을 만든다. 이때 이미지를 이루는 가장 작은 단위인 이 네모 모양의 작은 점들을 픽셀(Pixel)이라고 한다. 픽셀은 영어로 그림(picture)의 원소(element)라는 뜻을 갖도록 만들어진 합성어로 우리말로는 화소(畵素)라고 번역한다.

따라서 화소의 수가 많을수록 해상도가 높은 영상을 얻을 수가 있다. 같은 면적 안에 픽셀, 즉 화소가 더 조밀하게 많이 들어 있을수록 그림이 더 선명하고 정교하기 때문이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 해상도를 나타내는 픽셀의 개수를 거듭제곱으로 표현해 봄으로써 큰 수를 나타낼 때 거듭제곱의 편리함과 필요성을 느낄 수 있도록 하기 위한 것이다.

1. $1024\times512=\mathbf{524288}$

2. $1024=2^{10}$, $512=2^9$이므로

$1024\times512=2^{10}\times2^9=2^{10+9}=\mathbf{2^{19}}$

1

목표| 지수법칙을 이용하여 거듭제곱을 포함한 식을 간단하게 표현할 수 있게 한다.

풀이 (1) $(ab^2)^3 \div \left(\dfrac{a}{b^2}\right)^2 = a^3b^6 \div \dfrac{a^2}{b^4}$

$= a^{3-2}b^{6+4}$

$= \boldsymbol{ab^{10}}$

(2) $ab^3 \div \left(\dfrac{b}{a^2}\right)^3 \times \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = ab^3 \div \dfrac{b^3}{a^6} \times \dfrac{a^3}{b^3}$

$= \dfrac{a^{1+6+3}b^3}{b^{3+3}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{a^{10}}{b^3}}$

교과서 174 쪽

문제 1 $a \neq 0$, $b \neq 0$일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $(ab^2)^3 \div \left(\dfrac{a}{b^2}\right)^2$ (2) $ab^3 \div \left(\dfrac{b}{a^2}\right)^3 \times \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$

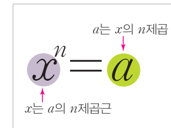
제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 $x^2=a$인 x를 a의 제곱근이라 하고, 세제곱하여 a가 되는 수, 즉 $x^3=a$인 x를 a의 세제곱근이라고 한다.

일반적으로 n이 2 이상의 자연수일 때 n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉

$$x^n=a$$

를 만족시키는 수 x를 a의 n제곱근이라고 한다.

이때 a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라고 한다.



● $(-2)^3=-8$에서 -2는 -8의 세제곱근이다.

● x는 a의 n제곱근 $\iff x^n=a$

예제 01 8의 세제곱근 중에서 실수인 것을 모두 구하여라.

풀이 8의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=8$이므로

$$x^3-8=0,\ (x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$x=2 \text{ 또는 } x=-1\pm\sqrt{3}i$$

따라서 8의 세제곱근 중에서 실수인 것은 2이다.

답 2

● 실수 a의 n제곱근은 복소수의 범위에서 n개가 있으나, 여기에서는 a의 n제곱근 중에서 실수인 것만을 생각하기로 한다.

문제 2 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 모두 구하여라.

(1) -1의 세제곱근 (2) 81의 네제곱근

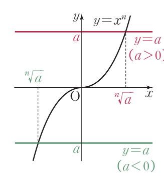
실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

❶ [1] n이 홀수인 경우

$x \geq 0$일 때 $x^n \geq 0$이고, $(-x)^n=-x^n$이므로 $y=x^n$의 그래프는 원점에 대하여 대칭인 오른쪽 그림과 같은 모양이다. 따라서 임의의 실수 a에 대하여 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 오직 하나뿐이고, 이것을

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$$

와 같이 나타낸다.



❷ ● $\sqrt[n]{a}$는 'n제곱근 a'라고 읽는다.

2

목표| 실수인 거듭제곱근을 구할 수 있게 한다.

풀이 (1) -1의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=-1$이므로

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -1의 세제곱근 중에서 실수인 것은 $\boldsymbol{-1}$이다.

(2) 81의 네제곱근을 x라고 하면

$x^4=81$이므로

$x^4-81=0$, $(x^2-9)(x^2+9)=0$

$(x+3)(x-3)(x^2+9)=0$

$x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$

따라서 81의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $\boldsymbol{-3,\ 3}$이다.

본문 해설

❶ n이 홀수일 때 함수 $y=x^n$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $x \geq 0$일 때에는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 따라서 곡선 $y=x^n$과 직선 $y=a$는 언제나 한 점에서 만나므로 a의 실수인 n제곱근은 다음과 같다.

(i) $a>0$이면 $\sqrt[n]{a}$ (양수)

(ii) $a=0$이면 0

(iii) $a<0$이면 $\sqrt[n]{a}$ (음수)

예 2의 실수인 세제곱근은 $\sqrt[3]{2}$이고, -2의 실수인 세제곱근은 $\sqrt[3]{-2}$이다.

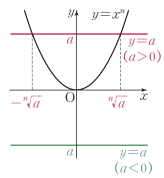
이때 $\sqrt[3]{2}$는 양수이고 $\sqrt[3]{-2}$는 음수이다.

❷ a의 n제곱근은 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 $x^n=a$를 만족시키는 x를 나타내고, n제곱근 a는 $\sqrt[n]{a}$를 나타낸다.

예를 들어 4의 제곱근은 제곱하여 4가 되는 수이므로 -2와 2이고, 제곱근 4는 $\sqrt{4}$, 즉 2이다.

1 [2] n이 짝수인 경우

$x^n \geq 0$이고, $(-x)^n = x^n$이므로 $y=x^n$의 그래프는 y축에 대하여 대칭인 오른쪽 그림과 같은 모양이다.



(i) $a>0$일 때, a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 양수와 음수 두 개가 있고, 이것을 각각

$$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$$

와 같이 나타낸다.

(ii) $a=0$일 때, a의 n제곱근은 0 하나뿐이다. 즉, $\sqrt[n]{0}=0$이다.

(iii) $a<0$일 때, a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

$\sqrt[2]{a}$는 간단히 $\sqrt{a}$로 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

2 **a의 실수인 n제곱근**

n이 2 이상의 자연수일 때

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$	0	없다.

보기 (1) 27의 세제곱근 중에서 실수인 것은 3이므로 $\sqrt[3]{27}=3$이다.
(2) -27의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -3이므로 $\sqrt[3]{-27}=-3$이다.
(3) 16의 네제곱근 중 실수인 것은 2 또는 -2이므로 $\sqrt[4]{16}=2$, $-\sqrt[4]{16}=-2$이다.

문제 3 다음 값을 구하여라.

(1) $\sqrt[3]{64}$ (2) $\sqrt[3]{-1}$

(3) $\sqrt[4]{256}$ (4) $-\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}$

거듭제곱근에는 어떤 성질이 있는가?

탐구 활동 다음 물음에 답하여 보자.

1. $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{125}$의 값을 구하여 보자.
2. $\sqrt[3]{8 \times 125}$의 값을 구하고, 1의 결과와 비교하여 보자.

3

목표| $\pm\sqrt[n]{a}$의 꼴로 나타낸 실수의 거듭제곱근을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 64의 세제곱근 중에서 실수인 것은 4이므로 $\sqrt[3]{64}=\mathbf{4}$이다.

(2) -1의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -1이므로 $\sqrt[3]{-1}=\mathbf{-1}$이다.

(3) 256의 네제곱근 중에서 실수인 것은 4 또는 -4이고, $\sqrt[4]{256}>0$이므로 $\sqrt[4]{256}=\mathbf{4}$이다.

(4) $\dfrac{1}{81}$의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $\dfrac{1}{3}$ 또는 $-\dfrac{1}{3}$이고, $-\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}<0$이므로 $-\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}=\mathbf{-\dfrac{1}{3}}$이다.

본문 해설

1 n이 짝수일 때 함수 $y=x^n$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $x \geq 0$일 때에는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 a의 실수인 n제곱근은 다음과 같다.

(i) $a>0$이면 곡선 $y=x^n$과 직선 $y=a$는 두 점에서 만나므로 $\sqrt[n]{a}$ (양수), $-\sqrt[n]{a}$ (음수)이다.

(ii) $a=0$이면 곡선 $y=x^n$과 직선 $y=a$는 원점에서 만나므로 0이다.

(iii) $a<0$이면 곡선 $y=x^n$과 직선 $y=a$는 만나지 않으므로 없다.

예 2의 실수인 제곱근은 $\pm\sqrt{2}$이지만 -2의 실수인 제곱근은 없다.

2 a의 n제곱근을 정의할 때 $a<0$이면 n이 홀수인 경우에는 $\sqrt[n]{a}$가 실수이지만 n이 짝수이면 $\sqrt[n]{a}$가 실수가 아니다.

지/도/자/료

$f(-x)=-f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, n이 홀수일 때, $(-x)^n=-x^n$이므로 함수 $y=x^n$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
한편 $f(-x)=f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 즉, n이 짝수일 때, $(-x)^n=x^n$이므로 함수 $y=x^n$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{125}$와 $\sqrt[3]{8 \times 125}$의 값을 비교하여 봄으로써 거듭제곱근의 성질을 알 수 있도록 하기 위한 것이다.

1. $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{125} = 2 \times 5 = \mathbf{10}$

2. $\sqrt[3]{8 \times 125} = \sqrt[3]{1000} = \mathbf{10}$

1의 결과와 같으므로 $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{1000}$이다.

교과서 176 쪽

$a<0$이고 n이 2 이상의 홀수일 때에도

$$(\sqrt[n]{a})^n=a$$

가 성립한다.

$a>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때, a의 양의 n제곱근 $\sqrt[n]{a}$는 n제곱하여 a가 되는 양수이므로

$$(\sqrt[n]{a})^n=a$$

임을 알 수 있다.

이제 지수법칙을 이용하여 거듭제곱근의 성질을 알아보자.

$a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때, 지수법칙에 의하여

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$$

이다. 이때 $a>0$, $b>0$이므로 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이고 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$이다.

따라서 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$는 ab의 양의 n제곱근이므로

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

가 성립한다.

한편 $a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때, 지수법칙에 의하여

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}$$

이다. 이때 $a>0$, $b>0$이므로 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이고 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}>0$이다.

따라서 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$는 $\frac{a}{b}$의 양의 n제곱근이므로

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

가 성립한다.

예제 02 $a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때, $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$이 성립함을 증명하여라.

1 **증명** 지수법칙에 의하여

$$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n=(\sqrt[n]{a})^{mn}=(\sqrt[n]{a})^{nm}=\{(\sqrt[n]{a})^n\}^m=a^m$$

이때 $a>0$이므로 $(\sqrt[n]{a})^m>0$이다.

따라서 $(\sqrt[n]{a})^m$은 a^m의 양의 n제곱근이므로

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

가 성립한다.

문제 4 $a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$가 성립함을 증명하여라.

본문 해설

1 본문에서 증명한 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$를 이용하여 증명할 수도 있다.

$$(\sqrt[n]{a})^m=\underbrace{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\cdots\sqrt[n]{a}}_{m\text{개}}$$

$$=\sqrt[n]{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{m\text{개}}}=\sqrt[n]{a^m}$$

4

목표| 거듭제곱의 성질이 성립함을 증명할 수 있게 한다.

풀이| 지수법칙에 의하여

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=\{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n=(\sqrt[n]{a})^n=a$$

이때 $a>0$이므로 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}>0$이다.

따라서 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$는 a의 양의 mn제곱근이므로

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$가 성립한다.

지/도/자/료

중학교에서 다루었던 제곱근에 대한 내용은 다음과 같다.

1. 제곱근

(1) 음이 아닌 수 a에 대하여 제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라고 한다.

(2) 양수 a의 양의 제곱근은 $\sqrt{a}$, 음의 제곱근은 $-\sqrt{a}$로 나타낸다.

2. 제곱근의 성질

$a>0$일 때,

(1) $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$

(2) $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$

3. 제곱근의 대소 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

(1) $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$

(2) $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$

4. 제곱근의 곱셈과 나눗셈

$a>0$, $b>0$일 때,

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

(2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

5. 제곱근의 덧셈과 뺄셈

근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈은 근호가 있는 수를 문자로 생각하여 다항식의 덧셈과 뺄셈에서 동류항끼리 계산하는 것과 같은 방법으로 한다.

읽/기/자/료 제곱근 기호 $\sqrt{\ }$ 의 역사

제곱근 기호 $\sqrt{\ }$ 는 1637년 프랑스의 데카르트(Descartes, R. ; 1596~1650)가 처음 사용하였다. 그러나 근(根)이란 뜻의 독일어 'radix'의 소문자 r를 변형한 기호 √가 1525년에 루돌프(Rudolff, C.)가 쓴 대수학 책에서 소개되었다. 간단한 수의 제곱근을 나타낼 때에는 루돌프의 기호 √만으로도 충분하였으나 $2x^2+4x$와 같은 다항식의 제곱근을 나타내기 위하여 데카르트는 루돌프의 기호를 변형시켰다.

거듭제곱근 기호 $\sqrt[n]{\ }$ 는 1690년 롤(Rolle, M. ; 1652~1719)이 시도하여 18세기에 점차로 확대되었으나 그 이전에 이미 제안되었다고 한다.

교과서 177 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **거듭제곱근의 성질**

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　(2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　　(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

예제 03 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}$　(2) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{243}}$　(3) $(\sqrt[6]{125})^2$　(4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

풀이 (1) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{243}}=\sqrt[4]{\dfrac{3}{243}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^4}=\dfrac{1}{3}$

(3) $(\sqrt[6]{125})^2=(\sqrt[6]{5^3})^2=\{(\sqrt[6]{5})^3\}^2=(\sqrt[6]{5})^6=5$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

답 (1) 2 (2) $\dfrac{1}{3}$ (3) 5 (4) 2

문제 5 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16}$　　(2) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$

(3) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{8}}\right)^2$　　(4) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

발전 **문제 6** $a>0$이고 m, n, p가 자연수일 때, $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$이 성립함을 증명하여라. (단, $n\geq 2$)

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

다음 중에서 옳지 않은 것을 모두 찾아 바르게 고쳐 보자.

(1) $\sqrt[4]{(-6)^4}=-6$　　(2) $\sqrt[5]{(-4)^5}=-4$

(3) $\sqrt[5]{-7}=-\sqrt[5]{7}$　　(4) $\sqrt[3]{-2^6}=4$

본문 해설

❶ 제곱근의 성질 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$는 $a>0$, $b>0$일 때에만 성립한다.

예를 들어 다음의 경우에는 성립하지 않는다.

(i) $\sqrt{-4}\sqrt{-9}=2i\cdot 3i=6i^2=-6$이고

$\sqrt{(-4)\times(-9)}=\sqrt{36}=6$이므로

$\sqrt{-4}\sqrt{-9}\neq\sqrt{(-4)\times(-9)}$

(ii) $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}}=-\dfrac{2}{3}i$이고 $\sqrt{\dfrac{4}{-9}}=\sqrt{\dfrac{4}{9}}i=\dfrac{2}{3}i$이므로

$\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}}\neq\sqrt{\dfrac{4}{-9}}$

실제로

$a<0$, $b<0$일 때에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

$a>0$, $b<0$일 때에는 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

가 성립한다.

따라서 제곱근의 성질을 일반화하여 거듭제곱근의 성질을 유도할 때에도 $a>0$, $b>0$인 경우로 제한하고 있다.

5

목표| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=\mathbf{4}$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{54}{2}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=\mathbf{3}$

(3) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{8}}\right)^2=\dfrac{\sqrt[4]{4^2}}{\sqrt[3]{8^2}}=\dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[3]{64}}=\dfrac{\sqrt[4]{2^4}}{\sqrt[3]{4^3}}=\dfrac{2}{4}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(4) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}=\sqrt[6]{729}=\sqrt[6]{3^6}=\mathbf{3}$

6

목표| 거듭제곱근의 성질이 성립함을 증명할 수 있게 한다.

풀이| $p=1$이면 (좌변)$=\sqrt[n]{a^m}=$(우변)

$p\geq 2$이면

$(\sqrt[np]{a^{mp}})^n=(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{mp}}})^n=\sqrt[p]{a^{mp}}=(\sqrt[p]{a^m})^p=a^m$

이때 $a>0$이므로 $\sqrt[np]{a^{mp}}>0$이다.

따라서 $\sqrt[np]{a^{mp}}$는 a^m의 양의 n제곱근이므로

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$이 성립한다.

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 거듭제곱근에 대한 등식의 옳고 그름을 생각해 봄으로써 거듭제곱근의 정의와 성질을 정확히 이해하게 하기 위한 문제이다.

풀이| (1) $\sqrt[4]{(-6)^4}=\sqrt[4]{6^4}=\mathbf{6}$이므로

$\sqrt[4]{(-6)^4}==-6$은 **옳지 않다.**

(2) $(-4)^5=-4^5$의 다섯제곱근 중에서 실수인 것은 -4이므로 $\sqrt[5]{(-4)^5}=-4$는 옳다.

(3) $(-\sqrt[5]{7})^5=-(\sqrt[5]{7})^5=-7$이므로 $-\sqrt[5]{7}$은 -7의 다섯제곱근이다. 따라서 $\sqrt[5]{-7}=-\sqrt[5]{7}$은 옳다.

(4) $\sqrt[3]{-2^6}=\sqrt[3]{(-2^2)^3}=\sqrt[3]{-4^3}=\mathbf{-4}$이므로

$\sqrt[3]{-2^6}=4$는 **옳지 않다.**

02 지수의 확장과 지수법칙

소단원 지도 목표

① 지수가 정수, 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해하게 한다.
② 지수가 정수, 유리수, 실수인 경우에도 지수법칙이 성립함을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 정수인 지수 a^n의 정의에서는 $a \neq 0$인 조건이 반드시 필요함을 강조한다.

2. 정수인 지수의 지수법칙이 지수가 유리수일 때에도 성립하도록 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ 을 정의함을 강조한다.

3. 유리수 지수를 이용하면 거듭제곱근의 성질은 유리수인 지수의 지수법칙이 됨을 알게 한다.

4. 무리수에 가까워지는 유리수들을 선택하고, 유리수인 지수의 정의를 이용하여 무리수인 지수를 정의할 수 있음을 직관적으로 이해하게 한다.

5. 3^{π}, $3^{\sqrt{2}}$과 같이 무리수 지수의 표현이 익숙해지도록 지도하고 $3\cdot3^{\sqrt{2}}=3^{1+\sqrt{2}}$과 같이 실수인 지수에서도 지수법칙을 활용하는 데 어색하지 않도록 지도한다.

생각 열기 참/고/자/료

세균은 다른 말로 박테리아라고 하는데, 생명체들 중에 가장 많이 번성하였다. 흙, 물속과 같이 외부 환경에서도 살지만, 동물의 위나 장과 같이 다른 생물의 안에서 살기도 하며 대부분의 박테리아는 병원성 균이다. 크기는 0.5 nm부터 0.5 μm까지 다양하며, 그들은 식물 세포나 곰팡이 세포와 마찬가지로 세포벽을 가지고 있으나, 그 주 성분이 서로 다르다.

교과서 178 쪽

02 지수의 확장과 지수법칙

● 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해한다.
● 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.

0 또는 음의 정수인 지수는 어떻게 정의하는가?

생각 열기 세균의 크기와 무게

● $1\text{ nm}=\frac{1}{10^9}\text{ m}$
$1\text{ μm}=\frac{1}{10^6}\text{ m}$
$1\text{ mg}=\frac{1}{1000}\text{ g}$

세균의 크기는 0.5 nm(나노미터)부터 0.5 μm(마이크로미터)에 이르기까지 다양하다.
세균을 사람의 크기만큼 확대하면 같은 비율로 확대할 때 사람은 지구 정도의 크기가 된다. 또 약 10억 개의 세균이 모여야 그 무게가 약 1 mg(밀리그램)이 된다.

탐구 활동 생각 열기를 보고, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 약 몇 개의 세균이 모여야 그 무게가 1 g이 되는지 말하여 보자.
2. 미코플라스마라는 세균은 그 크기가 약 0.2 μm에 불과하다고 한다. 미코플라스마의 크기를 m 단위로 나타내어 보자.

지금까지는 지수가 양의 정수인 경우만을 다루었다.
이제 지수가 0 또는 음의 정수인 경우까지 확장하여 보자.
1 $a \neq 0$이고 m, n이 양의 정수일 때, 지수법칙

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad \cdots\cdots ①$$

이 성립한다.
그런데 $m=0$일 때 ①이 성립한다고 하면

$$a^0 a^n = a^{0+n} = a^n$$

이므로

$$a^0 = 1$$

이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 1 g이 되는 세균의 개체수를 구하고, 세균의 크기를 m 단위로 나타내는 활동을 통하여 양의 정수인 지수에 대한 지수법칙을 확인하고, 지수로 사용되는 수의 확장의 필요성을 알도록 하기 위한 것이다.

1. 약 10억 개의 세균이 모여야 그 무게가 약 1 mg이 되고, 1 g=1000 mg이므로 10억×1000=1조에서
약 1조 개의 세균이 모여야 그 무게가 1 g이 된다.

2. $1\text{ μm}=\frac{1}{10^6}\text{ m}$이므로

$$0.2\text{ μm}=0.2\times1\text{ μm}=0.2\times\frac{1}{10^6}\text{ m}=\frac{2}{10^7}\text{ m}$$

에서 미코플라스마의 크기는 약 $\boldsymbol{\frac{2}{10^7}}$ **m이다.**

교과서 179 쪽

또 $m=-n$일 때에도 ①이 성립한다고 하면

$$a^{-n}a^{n}=a^{-n+n}=a^{0}=1$$

이므로

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$$

이다.

따라서 지수가 0 또는 음의 정수인 경우는 다음과 같이 정의한다.

0 또는 음의 정수인 지수의 정의

$a\neq0$이고 n이 양의 정수일 때

$$a^{0}=1,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$$

보기 (1) $(-2)^{0}=1$ (2) $3^{-2}=\frac{1}{3^{2}}=\frac{1}{9}$

문제 1 다음 값을 구하여라.

(1) $(\sqrt{5})^{0}$ (2) $(-3)^{-4}$

(3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$ (4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

❷ 지수가 0 또는 음의 정수인 경우에도 지수법칙이 성립하는지 알아보자.

$a\neq0$이고 m, n이 음의 정수일 때, 두 양의 정수 p, q에 대하여 $m=-p$, $n=-q$라고 하면

$$a^{m}a^{n}=a^{-p}a^{-q}=\frac{1}{a^{p}}\cdot\frac{1}{a^{q}}=\frac{1}{a^{p+q}}$$
$$=a^{-(p+q)}=a^{(-p)+(-q)}=a^{m+n}$$

이므로

$$a^{m}a^{n}=a^{m+n}$$

이 성립한다.

m 또는 n이 0일 때에도 $a^{m}a^{n}=a^{m+n}$이 성립한다.

❷ 지수를 양의 정수에서 0 또는 음의 정수로 확장하는 것은 같은 수를 거듭 곱한 횟수라는 자연수 지수에 대한 거듭제곱의 정의를 확장한 것이 아니라 자연수에 대한 지수법칙이 정수인 지수에서도 그대로 성립할 수 있도록 하기 위한 것이다.

1

목표| 0 또는 음의 정수인 지수의 정의를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(\sqrt{5})^{0}=\mathbf{1}$

(2) $(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^{4}}=\mathbf{\frac{1}{81}}$

(3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{2}}=\frac{1}{\frac{4}{25}}=\mathbf{\frac{25}{4}}$

(4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}}=\frac{1}{-\frac{1}{8}}=\mathbf{-8}$

본문 해설

❶ 양의 정수인 지수에서 성립하는 지수법칙 $a^{m}\div a^{n}=a^{m-n}$ $(m>n)$이 $m=n$ 또는 $m<n$일 때에도 성립한다고 가정하고 양의 정수에서 0 또는 음의 정수까지 지수의 확장 과정을 예를 들어 살펴보면 다음과 같다.

양의 정수가 지수인 두 수 10^{3}, 10^{5}에 대하여

$10^{3}\div10^{3}=1$ …… ①

$10^{3}\div10^{3}=10^{3-3}=10^{0}$ …… ②

①, ②에서 $10^{0}=1$

$10^{3}\div10^{5}=\frac{1}{10^{2}}$ …… ③

$10^{3}\div10^{5}=10^{3-5}=10^{-2}$ …… ④

③, ④에서 $10^{-2}=\frac{1}{10^{2}}$

읽/기/자/료

지수는 역사적으로 고대 그리스의 수학자 아르키메데스(Archimedes ; ?B.C. 287~B.C. 212)의 “모래의 계산자” 속에서 살펴볼 수 있다. 그는 여기서 a^{0}, a^{1}, a^{2}, a^{3}, …에 관하여 설명하고 있으며, 현재의 지수법칙인 $a^{m}a^{n}=a^{m+n}$과 같은 내용도 다루었다. 그 후, 오렘(Oresme, N. ; ?1320~1382)은 등비급수와 등차급수의 비교로부터 출발하여, 자연수와 자연수 사이에 분수를 삽입하여 분수 지수의 개념을 일반화하였다.

또 슈티펠(Stifel, M. ; 1487~1567)은 두 수열

$$\cdots,\ -3,\ -2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

$$\cdots,\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \cdots$$

의 항을 대비시키고, 등비수열의 항에 대한 등차수열의 항을 ‘지수’라고 불렀으며 분수 지수와 음의 지수를 도입하였다.

2

목표| 0 또는 음의 정수인 지수에 대한 지수법칙이 성립함을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (1) $n=0$이면 (좌변)$=(ab)^0=1$, (우변)$=a^0b^0=1$이므로 등식이 성립한다.

$n=-p$ (p는 양의 정수)라고 하면

$$(ab)^n=(ab)^{-p}=\frac{1}{(ab)^p}=\frac{1}{a^pb^p}=\frac{1}{a^p}\cdot\frac{1}{b^p}$$
$$=a^{-p}\cdot b^{-p}=a^nb^n$$

따라서 $a\neq0$, $b\neq0$이고 n이 0 또는 음의 정수일 때, $(ab)^n=a^nb^n$이 성립한다.

(2) $m=0$이면 (좌변)$=a^0\div a^n=1\div a^n=\dfrac{1}{a^n}$, (우변)$=a^{0-n}=a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$이므로 등식이 성립한다.

$n=0$이면 $a^m\div a^0=a^m\div1=a^m$, $a^{m-0}=a^m$이므로 등식이 성립한다.

$m=-p$, $n=-q$ (p, q는 양의 정수)라고 하면

$$a^m\div a^n=a^{-p}\div a^{-q}=a^{-p}\div\frac{1}{a^q}=a^{-p}\times a^q$$
$$=a^{-p+q}=a^{m+n}$$

따라서 $a\neq0$, $b\neq0$이고 m, n이 0 또는 음의 정수일 때, $a^m\div a^n=a^{m-n}$이 성립한다.

3

목표| 지수가 정수일 때의 지수법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a^4\times a^{-3}=a^{4+(-3)}=a^1=\boldsymbol{a}$

(2) $(a^3)^{-2}\div a^{-4}=a^{-6}\div a^{-4}=a^{-6-(-4)}=\boldsymbol{a^{-2}}$

(3) $(a^3b^{-1})^2=(a^3)^2(b^{-1})^2=a^{3\times2}b^{-1\times2}=\boldsymbol{a^6b^{-2}}$

(4) $(ab)^6\div(a^{-2}b^3)^2=a^6b^6\div(a^{-2\times2}b^{3\times2})=a^6b^6\div a^{-4}b^6$
$=a^{6-(-4)}b^{6-6}=a^{10}b^0=\boldsymbol{a^{10}}$

교과서 180 쪽

예제 01 $a\neq0$이고 m, n이 음의 정수일 때, $(a^m)^n=a^{mn}$이 성립함을 증명하여라.

증명 $m=-p$, $n=-q$ (p, q는 양의 정수)라고 하면

$$(a^m)^n=(a^{-p})^{-q}=\left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^q}=\frac{1}{\frac{1}{a^{pq}}}$$
$$=a^{pq}=a^{(-m)(-n)}=a^{mn}$$

● m 또는 n이 0일 때에도 $(a^m)^n=a^{mn}$이 성립한다.

문제 2 $a\neq0$, $b\neq0$이고 m, n이 0 또는 음의 정수일 때, 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) $(ab)^n=a^nb^n$ (2) $a^m\div a^n=a^{m-n}$

일반적으로 지수가 정수일 때 다음과 같은 지수법칙이 성립한다.

지수가 정수일 때의 지수법칙

$a\neq0$, $b\neq0$이고 m, n이 정수일 때

(1) $a^ma^n=a^{m+n}$ (2) $(a^m)^n=a^{mn}$

(3) $(ab)^n=a^nb^n$ (4) $a^m\div a^n=a^{m-n}$

● $\left(\frac{a}{b}\right)^n=(ab^{-1})^n=a^nb^{-n}=\frac{a^n}{b^n}$

보기 (1) $2^2\times2^{-3}=2^{2+(-3)}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

(2) $(3^{-3})^2=3^{-3\times2}=3^{-6}=\frac{1}{3^6}=\frac{1}{729}$

(3) $a\neq0$, $b\neq0$일 때, $a^{-1}\times b^{-1}=(ab)^{-1}=\frac{1}{ab}$

(4) $a\neq0$일 때, $a^{-3}\div a^{-7}=a^{-3-(-7)}=a^4$

문제 3 $a\neq0$, $b\neq0$일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $a^4\times a^{-3}$ (2) $(a^3)^{-2}\div a^{-4}$

(3) $(a^3b^{-1})^2$ (4) $(ab)^6\div(a^{-2}b^3)^2$

읽/기/자/료 생활 속 지수

생활 주변에는 매우 크거나 매우 작은 양이 수로 나타나는 것들이 있는데 이 값들을 간단하게 표현하기 위해 지수로 나타내면 편리하다. 다음은 우리 주변에서 자주 접하는 지수이다.

① 지구의 질량은 약 5.98×10^{24} kg이다.
② 지구에서 태양까지의 거리는 약 1.5×10^8 km이다.
③ 지구 상에 있는 육지의 전체 넓이는 1.4894×10^8 km^{2}이다.
④ 대장균의 DNA 분자량은 약 2.56×10^{-9}이고, 3.8×10^6개의 염기쌍을 포함한다.
⑤ ^{12}C(탄소 12) 원자 6.02×10^{23}개의 질량은 약 12 g이다.
⑥ 전자의 질량은 9.10955×10^{-28} g이다.

이처럼 현대 정보 사회에서 핵심을 이루고 있는 정보 기술(IT), 나노 기술(NT), 생명 기술(BT) 등에서 정보량을 나타낼 때나 미세한 재료의 크기를 나타낼 때 거듭제곱을 사용하지 않을 수 없다. 그리고 이러한 수들을 이용하여 계산할 때에는 지수법칙이 유용하게 사용된다.

유리수인 지수는 어떻게 정의하는가?

탐구 활동 다음 물음에 답하여 보자.

1. 2의 세제곱근 중에서 실수인 것을 구하여 보자.
2. 지수가 유리수인 경우에도 지수법칙 $(a^m)^n=a^{mn}$이 성립한다고 할 때,

$$(2^p)^3=2$$

를 만족시키는 p의 값을 생각하여 보자.

이제 지수를 유리수의 범위까지 확장하여 보자.

$a>0$이고 p, q가 정수일 때, 지수법칙

$$(a^p)^q=a^{pq} \quad \cdots\cdots ①$$

이 성립한다.

그런데 p, q가 유리수일 때에도 ①이 성립한다고 하면 두 정수 m, n $(n\geq 2)$에 대하여

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$$

이다. 이때 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이므로

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

이다.

따라서 지수가 유리수인 경우는 다음과 같이 정의한다.

❶ 유리수인 지수의 정의

$a>0$이고 m, n $(n\geq 2)$이 정수일 때

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ \text{특히}\ a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

보기 (1) $27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=\sqrt[3]{(3^3)^2}=\sqrt[3]{(3^2)^3}=3^2=9$

(2) $9^{-\frac{1}{2}}=9^{\frac{-1}{2}}=\sqrt{9^{-1}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$

문제 4 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $4^{\frac{3}{2}}$　(2) $27^{-\frac{1}{3}}$　(3) $81^{0.75}$　(4) $16^{-1.5}$

본문 해설

❶ 유리수 집합은 보통

$$Q=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\,m,\ n\text{은 정수},\ n\neq 0\right\}$$

으로 나타내지만 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$Q=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\,n\text{은 자연수},\ m\text{은 정수}\right\}$$

마찬가지로 음의 유리수 지수에서는 지수의 분모를 자연수로 하여 다음과 같이 나타낸다.

$$a^{-\frac{3}{4}}=a^{\frac{-3}{4}}=\sqrt[4]{a^{-3}}$$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$은 $a>0$이고 m, n이 정수이며 $n\geq 2$인 경우에만 정의한다.

예를 들어 다음과 같이 정의되지는 않는다.

$$(-4)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{(-4)^3}=\sqrt{-64}$$

$$a>0\text{일 때},\quad a^{-\frac{3}{2}}=a^{\frac{2}{-3}}=\sqrt[-3]{a^2}$$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 지수가 유리수일 때 지수법칙이 성립함을 가정하여 미지수의 값을 구하여 봄으로써 지수를 유리수로 확장하기 위해서는 새로운 정의가 필요함을 알게 하기 위한 것이다.

1. $\sqrt[3]{2}$

2. 유리수 m, n에 대하여 $(a^m)^n=a^{mn}$이 성립한다고 하면 $(2^p)^3=2^{3p}$, $2=2^1$에서 $2^{3p}=2^1$, $3p=1$

따라서 $p=\mathbf{\frac{1}{3}}$이다.

4

목표 | 유리수인 지수의 정의를 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $4^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{4^3}=\sqrt[2]{(2^2)^3}=\sqrt[2]{(2^3)^2}=2^3=\mathbf{8}$

(2) $27^{-\frac{1}{3}}=27^{\frac{-1}{3}}=\sqrt[3]{27^{-1}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

(3) $81^{0.75}=81^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{81^3}=\sqrt[4]{(3^4)^3}=\sqrt[4]{(3^3)^4}=3^3=\mathbf{27}$

(4) $16^{-1.5}=16^{-\frac{3}{2}}=16^{\frac{-3}{2}}=\sqrt{16^{-3}}=\sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^3}$

$$=\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}^3}=\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^3\right\}^2}=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\mathbf{\frac{1}{64}}$$

5

목표| 주어진 식을 유리수인 지수를 사용하여 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt[3]{a^2}=\boldsymbol{a^{\frac{2}{3}}}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}=\dfrac{1}{a^{\frac{3}{4}}}=\boldsymbol{a^{-\frac{3}{4}}}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{a^{-2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}}=\boldsymbol{a}$

6

목표| 유리수인 지수에 대한 지수법칙이 성립함을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (1) $r=\dfrac{m}{n}$ (m, n은 정수, $n>0$)이라 고 하면

$$(ab)^r=(ab)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(ab)^m}=\sqrt[n]{a^mb^m}$$
$$=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{b^m}$$
$$=a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}=a^rb^r$$

따라서 $a>0$, $b>0$이고 r가 유리수일 때, $(ab)^r=a^rb^r$이 성립한다.

(2) $r=\dfrac{m}{n}$, $s=\dfrac{p}{q}$ (m, n, p, q는 정수, $n>0$, $q>0$)라 고 하면

$$a^r\div a^s=a^{\frac{m}{n}}\div a^{\frac{p}{q}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}}=\frac{a^{\frac{mq}{nq}}}{a^{\frac{np}{nq}}}$$
$$=\frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}}=\sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}}=\sqrt[nq]{a^{mq-np}}$$
$$=a^{\frac{mq-np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}=a^{r-s}$$

따라서 $a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때, $a^r\div a^s=a^{r-s}$이 성립한다.

교과서 182 쪽

문제 5 $a>0$일 때, 다음 식을 지수를 사용하여 나타내어라.

(1) $\sqrt[3]{a^2}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{a^{-2}}}$

지수가 유리수인 경우에도 지수법칙이 성립하는지 알아보자.

$a>0$이고 r, s가 유리수일 때, 정수 m, n, p, q $(n\geq2,\ q\geq2)$에 대하여 $r=\dfrac{m}{n}$, $s=\dfrac{p}{q}$라고 하면

$$a^ra^s=a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq}{nq}}a^{\frac{np}{nq}}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}}$$
$$=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{r+s}$$

이므로

$$a^ra^s=a^{r+s}$$

이 성립한다.

예제 02 $a>0$이고 r, s가 유리수일 때, $(a^r)^s=a^{rs}$이 성립함을 증명하여라.

증명 $r=\dfrac{m}{n}$, $s=\dfrac{p}{q}$ (m, n, p, q는 정수, $n\geq2$, $q\geq2$)라고 하면

$$(a^r)^s=(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}}=(\sqrt[n]{a^m})^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p}=\sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^m)^p}}$$
$$=\sqrt[nq]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{nq}}=a^{rs}$$

문제 6 $a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때, 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) $(ab)^r=a^rb^r$ (2) $a^r\div a^s=a^{r-s}$

일반적으로 지수가 유리수일 때 다음과 같은 지수법칙이 성립한다.

지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때

(1) $a^ra^s=a^{r+s}$ (2) $(a^r)^s=a^{rs}$

(3) $(ab)^r=a^rb^r$ (4) $a^r\div a^s=a^{r-s}$

지/도/자/료

1. 지수가 유리수일 때의 지수법칙은 밑이 음수일 때에는 사용할 수 없다. 예를 들어

$\{(-2)^2\}^{\frac{1}{2}}=(-2)^{2\times\frac{1}{2}}=(-2)^1=-2$

는 잘못된 계산이다.

올바른 계산은 다음과 같다.

$\{(-2)^2\}^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^1=2$

2. 지수를 이용하여 나타낸 수의 대소 관계

(1) $a>0$, $b>0$이고 n이 자연수일 때

$a^n<b^n \Longrightarrow a<b$

(2) $a>0$, $b>0$이고 n이 자연수일 때

$a<b \Longrightarrow a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$

〈증명〉

$a<b$이면 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n<\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n$이므로 $a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$이 성립한다.

교과서 183 쪽

보기 (1) $2^2\times2^{-\frac{1}{3}}=2^{2+\left(-\frac{1}{3}\right)}=2^{2-\frac{1}{3}}=2^{\frac{5}{3}}$

(2) $(3^{\frac{1}{2}})^4=3^{\frac{1}{2}\times4}=3^2=9$

(3) $a>0$, $b>0$일 때, $(a^{\frac{2}{3}}\times b^{\frac{1}{2}})^6=(a^{\frac{2}{3}})^6\times(b^{\frac{1}{2}})^6=a^4b^3$

(4) $a>0$일 때, $a^{\frac{1}{4}}\div a^{-\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)}=a$

문제 7 $a>0$, $b>0$일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $a^{\frac{3}{4}}\times a^{-\frac{1}{2}}$　(2) $(a^3b^{-6})^{-\frac{2}{3}}$

(3) $a^{\frac{1}{3}}\div(a^{-\frac{1}{3}})^6$　(4) $(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}$

실생활

문제 8 어떤 호수의 수면에 빛의 세기가 I_0인 빛을 비추면 수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기 I_d는

$$I_d=I_0\cdot2^{-\frac{d}{4}}$$

이라고 하자. 이때 수심이 5 m인 곳에서의 빛의 세기는 수심이 13 m인 곳에서의 빛의 세기의 몇 배인지 구하여라.

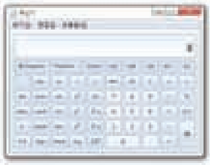
실수인 지수는 어떻게 정의하는가?

탐구 활동

컴퓨터에서 오른쪽 그림과 같은 계산기 프로그램을 실행하여 [보기]–[공학용]을 선택한 후

$\boxed{2}$, $\boxed{x^y}$, $\boxed{3}$, $\boxed{=}$

를 차례로 누르면 2^3을 구할 수 있다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. $2^{1.4}$, $2^{1.41}$, $2^{1.414}$의 값을 반올림하여 소수 넷째 자리까지 구하여 보자.

2. $\boxed{2}$, $\boxed{x^y}$, $\boxed{2}$, $\boxed{\sqrt{\ }}$, $\boxed{=}$를 차례로 누르고 화면에 표시된 값을 반올림하여 소수 넷째 자리까지 말하여 보자.

3. **1**, **2**의 결과를 비교하여 보자.

8

목표| 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 수심이 5 m인 곳에서의 빛의 세기 I_5는

$I_5=I_0\cdot2^{-\frac{5}{4}}$

수심이 13 m인 곳에서의 빛의 세기 I_{13}은

$I_{13}=I_0\cdot2^{-\frac{13}{4}}$

따라서 $\dfrac{I_5}{I_{13}}$의 값을 구하면

$$\frac{I_5}{I_{13}}=\frac{I_0\cdot2^{-\frac{5}{4}}}{I_0\cdot2^{-\frac{13}{4}}}=2^{-\frac{5}{4}}\div2^{-\frac{13}{4}}=2^{-\frac{5}{4}-\left(-\frac{13}{4}\right)}$$
$$=2^{-\frac{5}{4}+\frac{13}{4}}=2^2=4$$

이므로 수심이 5 m인 곳에서의 빛의 세기는 수심이 13 m인 곳에서의 빛의 세기의 **4배**이다.

7

목표| 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a^{\frac{3}{4}}\times a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)}=a^{\frac{3}{4}-\frac{2}{4}}=\boldsymbol{a^{\frac{1}{4}}}$

(2) $(a^3b^{-6})^{-\frac{2}{3}}=(a^3)^{-\frac{2}{3}}\times(b^{-6})^{-\frac{2}{3}}=a^{-2}b^4=\boldsymbol{\dfrac{b^4}{a^2}}$

(3) $a^{\frac{1}{3}}\div\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^6=a^{\frac{1}{3}}\div a^{-2}=a^{\frac{1}{3}-(-2)}=a^{\frac{1}{3}+2}=\boldsymbol{a^{\frac{7}{3}}}$

(4) $\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}=\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}$

$=a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}\times a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}$

$=a^{-\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)}b^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$

$=a^{-1}b^1=\boldsymbol{\dfrac{b}{a}}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • $\sqrt{2}$에 가까워지는 유한소수를 지수로 가지는 수를 이용하여 $2^{\sqrt{2}}$이 어떤 일정한 수에 가까워지는지 공학용 계산기로 확인함으로써 실수인 지수를 정의할 수 있음을 알게 하기 위한 것이다.

1. $2^{1.4}=\mathbf{2.6390}$, $2^{1.41}=\mathbf{2.6574}$, $2^{1.414}=\mathbf{2.6647}$

2. **2.6651**

3. $2^{1.4}$, $2^{1.41}$, $2^{1.414}$의 값은 차례로 점점 커지며 **2**의 결과에 가까워진다.

9

목표| 지수가 실수일 때의 지수법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a^{2\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{2}} = a^{2\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \boldsymbol{a^{3\sqrt{2}}}$

(2) $(a^{\sqrt{2}+1})^{\sqrt{2}-1} = a^{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = a^{2-1} = a^1 = \boldsymbol{a}$

(3) $(a^{2\sqrt{3}} b^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = a^{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} b^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \boldsymbol{a^6 b^3}$

(4) $a^{\sqrt{3}+1} \div a^{\sqrt{3}-1} = a^{(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)} = \boldsymbol{a^2}$

단원 과제

목표| 컴퓨터에서 사용되는 데이터의 양을 나타내는 단위 사이의 관계와 지수법칙을 활용하여 1메비바이트는 몇 테비바이트인지 구할 수 있게 한다.

풀이| $1\ \mathrm{GiB} = 2^{10}\ \mathrm{MiB}$, $1\ \mathrm{TiB} = 2^{10}\ \mathrm{GiB}$ 이므로

$$1\ \mathrm{MiB} = \frac{1}{2^{10}}\ \mathrm{GiB} = 2^{-10}\ \mathrm{GiB}$$

$$1\ \mathrm{GiB} = \frac{1}{2^{10}}\ \mathrm{TiB} = 2^{-10}\ \mathrm{TiB}$$

가 성립한다. 따라서

$$1\ \mathrm{MiB} = 2^{-10}\ \mathrm{GiB} = 2^{-10}\cdot 2^{-10}\ \mathrm{TiB} = \boldsymbol{2^{-20}\ \mathrm{TiB}}$$

지/도/자/료 실수 체계와 지수법칙의 지도

모든 실수의 집합 R는 유리수의 집합 Q에서 완비성 공리(axiom of completeness)를 만족시키도록 만든 것이다. 따라서 임의의 실수 $r \in R$에 대하여 r에 다가가는(수렴하는) 유리수들 r_1, r_2, r_3, $\cdots$이 존재한다.

이것을 수열의 극한을 이용하여 나타내면 $r_n \to r$ 또는 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$가 된다. 이때 $a^{r_n} \to a^r$, 즉 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r$이 되므로 실수 지수의 정의가 타당하게 된다.

그러나 이와 같이 정의한 실수 지수에 대하여 지수법칙이 성립한다는 것은 고등학교 교육과정에서는 증명할 수 없으므로 증명 없이 받아드릴 수 있도록 지도한다.

교과서 184 쪽

이제 지수를 실수의 범위까지 확장하기 위하여 지수가 무리수인 경우에는 어떤 의미를 가지는지 $2^{\sqrt{2}}$을 예로 들어 생각하여 보자.

무리수 $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$이므로 $\sqrt{2}$에 가까워지는 유리수 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, $\cdots$를 지수로 가지는 수 2^1, $2^{1.4}$, $2^{1.41}$, $2^{1.414}$, $2^{1.4142}$, $\cdots$은 오른쪽 표와 같이 일정한 수에 한없이 가까워진다는 사실이 알려져 있다.

x	2^x
1	2
1.4	2.639015$\cdots$
1.41	2.657371$\cdots$
1.414	2.664749$\cdots$
1.4142	2.665119$\cdots$
1.41421	2.665137$\cdots$
1.414213	2.665143$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\sqrt{2}$	$2^{\sqrt{2}}$

이 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$으로 정의한다.

이와 같은 방법으로 $a>0$이고 x가 실수일 때 a^x을 정의할 수 있다.

일반적으로 지수가 실수일 때 다음과 같은 지수법칙이 성립한다.

지수가 실수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

(1) $a^x a^y = a^{x+y}$　　(2) $(a^x)^y = a^{xy}$

(3) $(ab)^x = a^x b^x$　　(4) $a^x \div a^y = a^{x-y}$

보기 (1) $3^{\sqrt{2}} \times 3^{2\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}+2\sqrt{2}} = 3^{3\sqrt{2}}$

(2) $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = 2^3 = 8$

(3) $a>0$, $b>0$일 때, $(a^{\sqrt{5}}b)^{\sqrt{5}} = a^{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} \times b^{\sqrt{5}} = a^5 b^{\sqrt{5}}$

(4) $a>0$일 때, $a^{1+\sqrt{3}} \div a^{\sqrt{3}} = a^{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}} = a$

문제 9 $a>0$, $b>0$일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $a^{2\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{2}}$　　(2) $(a^{\sqrt{2}+1})^{\sqrt{2}-1}$

(3) $(a^{2\sqrt{3}} b^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$　　(4) $a^{\sqrt{3}+1} \div a^{\sqrt{3}-1}$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

데이터의 양을 나타내는 단위 메비바이트(MiB), 기비바이트(GiB), 테비바이트(TiB)에 대하여 $1\ \mathrm{GiB} = 2^{10}\ \mathrm{MiB}$, $1\ \mathrm{TiB} = 2^{10}\ \mathrm{GiB}$일 때, 정수인 지수를 사용하여 $1\ \mathrm{MiB}$는 몇 TiB인지 말하여라.

읽/기/자/료 데이터의 용량 표기 단위

키비바이트(KiB), 즉 킬로 이진 바이트(Kilo binary byte)는 정보나 컴퓨터 저장 장치의 단위로 1키비바이트$=2^{10}$바이트$=1024$바이트이다. 키비바이트와 비슷한 단위인 킬로바이트에 대하여 1킬로바이트$=10^3$바이트$=1000$바이트인데, 제조사는 10의 거듭제곱을 사용하지만 고객은 2의 거듭제곱을 사용하면서 일어나는 혼란을 막고자 키비바이트 단위가 탄생하였다.

용량이 커질수록 두 단위 사이의 값의 차이가 커짐을 알 수 있는데, 이러한 이유로 실제 컴퓨터 하드 드라이브에 표기된 용량과 우리가 사용하는 용량에는 차이가 있다.

기호(이름)	값(바이트)	기호(이름)	값(바이트)
KB(킬로바이트)	$1000^1=10^3$	KiB(키비바이트)	$1024^1=2^{10}$
MB(메가바이트)	$1000^2=10^6$	MiB(메비바이트)	$1024^2=2^{20}$
GB(기가바이트)	$1000^3=10^9$	GiB(기비바이트)	$1024^3=2^{30}$
TB(테라바이트)	$1000^4=10^{12}$	TiB(테비바이트)	$1024^4=2^{40}$

교과서 185 쪽

중단원 기초

[해답 p.233]

수준별 학습

1 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 모두 구하여라.

(1) 49의 제곱근 (2) 125의 세제곱근

(3) -64의 세제곱근 (4) 1의 네제곱근

01 거듭제곱과 거듭제곱근
거듭제곱근

2 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}$ (2) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{162}}$

(3) $(\sqrt[3]{27})^4$ (4) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}$

01 거듭제곱과 거듭제곱근
거듭제곱근의 성질

3 다음 값을 구하여라.

(1) $(-3)^0$ (2) 4^{-2}

(3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$ (4) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$

02 지수의 확장과 지수법칙
0 또는 음의 정수인 지수

4 다음 식을 근호를 사용하여 나타내어라.

(1) $2^{\frac{4}{3}}$ (2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$

(3) $5^{0.25}$ (4) $7^{-0.5}$

02 지수의 확장과 지수법칙
유리수인 지수

5 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $2^{\sqrt{3}}\times2^{\sqrt{12}}$ (2) $3^{\sqrt{18}}\div3^{\sqrt{2}}\times3^{\sqrt{8}}$

(3) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{27}}$ (4) $\left(2^{\frac{1}{\sqrt{6}}}\times3^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)^{\sqrt{6}}$

02 지수의 확장과 지수법칙
실수인 지수

중/단/원 기초

1

목표| 실수인 거듭제곱근을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2=49$에서 $x=\pm7$

따라서 49의 제곱근 중에서 실수인 것은 **±7**이다.

(2) $x^3=125$에서 $x^3-125=0$, $(x-5)(x^2+5x+25)=0$

$x=5$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm5\sqrt{3}i}{2}$

따라서 125의 세제곱근 중에서 실수인 것은 **5**이다.

(3) $x^3=-64$에서 $x^3+64=0$, $(x+4)(x^2-4x+16)=0$

$x=-4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}i$

따라서 -64의 세제곱근 중에서 실수인 것은 **−4**이다.

(4) $x^4=1$에서 $(x+1)(x-1)(x^2+1)=0$

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm i$

따라서 1의 네제곱근 중에서 실수인 것은 **±1**이다.

2

목표| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3\cdot27}=\sqrt[4]{3^4}=\mathbf{3}$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{162}}=\sqrt[4]{\dfrac{2}{162}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^4}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(3) $(\sqrt[3]{27})^4=\sqrt[3]{27^4}=\sqrt[3]{(3^3)^4}=\sqrt[3]{(3^4)^3}$

$=3^4=\mathbf{81}$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}=\sqrt[9]{512}=\sqrt[9]{2^9}=\mathbf{2}$

3

목표| 0 또는 음의 정수인 지수의 정의를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(-3)^0=\mathbf{1}$

(2) $4^{-2}=\dfrac{1}{4^2}=\mathbf{\dfrac{1}{16}}$

(3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=3^2=\mathbf{9}$

(4) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3}=\dfrac{1}{\dfrac{27}{8}}=\mathbf{\dfrac{8}{27}}$

4

목표| 유리수인 지수의 정의를 이용하여 주어진 식을 근호를 사용한 식으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $2^{\frac{4}{3}}=\mathbf{\sqrt[3]{2^4}}$

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{-2}{3}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}}=\mathbf{\sqrt[3]{3^2}}$

(3) $5^{0.25}=5^{\frac{1}{4}}=\mathbf{\sqrt[4]{5}}$

(4) $7^{-0.5}=7^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{7^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{7}}{7}}$

5

목표| 지수가 실수일 때의 지수법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2^{\sqrt{3}}\times2^{\sqrt{12}}=2^{\sqrt{3}}\times2^{2\sqrt{3}}=2^{\sqrt{3}+2\sqrt{3}}=\mathbf{2^{3\sqrt{3}}}$

(2) $3^{\sqrt{18}}\div3^{\sqrt{2}}\times2^{\sqrt{8}}=3^{3\sqrt{2}}\div3^{\sqrt{2}}\times3^{2\sqrt{2}}$

$=3^{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}\times3^{2\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=\mathbf{3^{4\sqrt{2}}}$

(3) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{27}}=(5^{\sqrt{3}})^{3\sqrt{3}}=5^{\sqrt{3}\times3\sqrt{3}}=\mathbf{5^9}$

(4) $\left(2^{\frac{1}{\sqrt{6}}}\times3^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)^{\sqrt{6}}=\left(2^{\frac{1}{\sqrt{6}}}\times3^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right)^{\sqrt{6}}$

$=2^{\frac{1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{6}}\times3^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\sqrt{6}}=2^1\times3^2=\mathbf{18}$

중/단/원 기본

1

목표| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 하고 거듭제곱근의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt[3]{(-8)^4}=\sqrt[3]{(-2)^{3\cdot 4}}=(-2)^4=16$의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=16$, $x^4-16=0$
$(x+2)(x-2)(x^2+4)=0$
$x=\pm 2$ 또는 $x=\pm 2i$
따라서 $\sqrt[3]{(-8)^4}$의 네제곱근은 모두 4개이고, 그중 실수인 것은 2개이므로 $a=4$, $b=2$
따라서 $a+b$의 값은 **6**이다.

2

목표| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{\sqrt{81}}=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3\times 9}$
$=\sqrt[3]{3\times 3^2}=\sqrt[3]{3^3}=\mathbf{3}$

(2) $\sqrt[3]{-8}\times\dfrac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4}}=\sqrt[3]{(-2)^3}\times\sqrt[4]{\dfrac{64}{4}}$
$=-2\times\sqrt[4]{16}=-2\times\sqrt[4]{2^4}$
$=-2\times 2=\mathbf{-4}$

(3) $(\sqrt[6]{9})^3\times(\sqrt[8]{16})^2=\sqrt[6]{9^3}\times\sqrt[8]{16^2}$
$=\sqrt[6]{(3^2)^3}\times\sqrt[8]{(2^4)^2}$
$=\sqrt[6]{3^6}\times\sqrt[8]{2^8}=3\times 2=\mathbf{6}$

(4) $\sqrt[4]{16^2}\times(\sqrt[3]{3})^6\div\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[4]{(2^4)^2}\times\sqrt[3]{3^6}\div\sqrt{\sqrt[3]{2^6}}$
$=\sqrt[4]{(2^2)^4}\times\sqrt[3]{3^{2\times 3}}\div\sqrt[6]{2^6}$
$=2^2\times 3^2\div 2=\mathbf{18}$

3

목표| 유리수인 지수의 정의와 지수법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(\sqrt[3]{a}\times\sqrt{a^3})^{-3}=\left(a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{2}}\right)^{-3}=\left(a^{\frac{11}{6}}\right)^{-3}=\mathbf{a^{-\frac{11}{2}}}$

(2) $\sqrt[3]{8a\sqrt{a\sqrt{a}}}=\sqrt[3]{2^3a}\times\sqrt[3]{\sqrt{a}}\times\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}=(2^3a)^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{1}{12}}$
$=2a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{1}{12}}=2a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}=\mathbf{2a^{\frac{7}{12}}}$

(3) $\sqrt[3]{a^4}\times\sqrt[6]{a}\div\sqrt{a^3}=a^{\frac{4}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}\div a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{4}{3}+\frac{1}{6}-\frac{3}{2}}=a^0=\mathbf{1}$

(4) $\sqrt[4]{a^2b}\times\sqrt[12]{a^4b^5}\div\sqrt[6]{ab^3}=a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{4}{12}}b^{\frac{5}{12}}\div a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{6}}$
$=a^{\frac{2}{4}+\frac{4}{12}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}+\frac{5}{12}-\frac{3}{6}}$
$=a^{\frac{8}{12}}b^{\frac{2}{12}}=\mathbf{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}}}$

교과서 186 쪽

중단원 기본

[해답 p.233]

수준별 학습

1 $\sqrt[3]{(-8)^4}$의 네제곱근은 모두 a개이고, 그중에서 실수인 것은 b개이다. 이때 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

01 거듭제곱과 거듭제곱근
거듭제곱근

2 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{\sqrt{81}}$　　(2) $\sqrt[3]{-8}\times\dfrac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4}}$

(3) $(\sqrt[6]{9})^3\times(\sqrt[8]{16})^2$　　(4) $\sqrt[4]{16^2}\times(\sqrt[3]{3})^6\div\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

01 거듭제곱과 거듭제곱근
거듭제곱근의 성질

3 $a>0$, $b>0$일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $(\sqrt[3]{a}\times\sqrt{a^3})^{-3}$　　(2) $\sqrt[3]{8a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

(3) $\sqrt[3]{a^4}\times\sqrt[6]{a}\div\sqrt{a^3}$　　(4) $\sqrt[4]{a^2b}\times\sqrt[12]{a^4b^5}\div\sqrt[6]{ab^3}$

02 지수의 확장과 지수법칙
유리수인 지수

4 $(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}})(2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}})$을 간단히 하여라.

02 지수의 확장과 지수법칙
유리수인 지수

5 $a>0$이고 x, y, z가 실수일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

$$(a^x)^{y-z}\times(a^y)^{z-x}\times(a^z)^{x-y}$$

02 지수의 확장과 지수법칙
실수인 지수

4

목표| 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| $\left(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}\right)\left(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}\right)\left(2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}\right)$
$=\left\{\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(2^{-\frac{1}{4}}\right)^2\right\}\left(2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}\right)$
$=\left(2^{\frac{1}{2}}-2^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^2$
$=2^1-2^{-1}=2-\dfrac{1}{2}=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

5

목표| 지수가 실수일 때의 지수법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| $(a^x)^{y-z}\times(a^y)^{z-x}\times(a^z)^{x-y}$
$=a^{xy-xz}\times a^{yz-yx}\times a^{zx-zy}$
$=a^{(xy-xz)+(yz-yx)+(zx-zy)}$
$=a^0=\mathbf{1}$

중단원 실력

[해답 p.233]

수준별 학습

1 다음 세 수의 크기를 비교하여라.

(1) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{9}$

(2) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{4^2\sqrt{2}}$

01 거듭제곱과 거듭제곱근
거듭제곱근의 성질

2 $x=4^{\frac{1}{3}}-4^{-\frac{1}{3}}$일 때, $4x^3+12x$의 값을 구하여라.

02 지수의 확장과 지수법칙
유리수인 지수

3 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $2^{\frac{\beta}{\alpha}}\times 2^{\frac{\alpha}{\beta}}$의 값을 구하여라.

02 지수의 확장과 지수법칙
지수법칙

4 실수 a가 $\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$를 만족시킬 때, 4^a+4^{-a}의 값을 구하여라.

02 지수의 확장과 지수법칙
지수법칙

5 어떤 박테리아가 매시간 일정한 비율로 증식하여 처음 p_0만 마리가 t시간 후에 p만 마리가 될 때 다음과 같은 관계식이 성립한다고 하자.

$$p=p_0\cdot a^{kt}\ (a>0,\ a\neq 1,\ k>0)$$

처음 1만 마리의 박테리아를 배양하여 6시간 후 4만 마리가 되었다면 배양 후 15시간이 되었을 때 박테리아의 개체 수를 구하여라.

02 지수의 확장과 지수법칙
지수법칙의 활용

중/단/원 실력

1

목표| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 수의 크기를 비교할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{3}=\sqrt[12]{3^6}=\mathbf{\sqrt[12]{729}}$

$\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^4}=\mathbf{\sqrt[12]{256}}$

$\sqrt[4]{9}=\sqrt[12]{9^3}=\mathbf{\sqrt[12]{729}}$

이므로 $\mathbf{\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}=\sqrt[4]{9}}$

(2) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{2}}=\sqrt[12]{3^3\times 2}=\sqrt[12]{54}$

$\sqrt[3]{2\sqrt{3}}=\sqrt[6]{2^2\times 3}=\sqrt[6]{12}=\sqrt[12]{144}$

$\sqrt[3]{4^2\sqrt{2}}==\sqrt[6]{4^4\times 2}=\sqrt[6]{512}=\sqrt[12]{512^2}$

이므로

$\mathbf{\sqrt[4]{3\sqrt[3]{2}}<\sqrt[3]{2\sqrt{3}}<\sqrt[3]{4^2\sqrt{2}}}$

2

목표| 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^3=\left(4^{\frac{1}{3}}-4^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

$=4-4^{-1}-3\left(4^{\frac{1}{3}}-4^{-\frac{1}{3}}\right)$

$=\dfrac{15}{4}-3x$

이므로 $4x^3=15-12x$

따라서 $4x^3+12x=\mathbf{15}$이다.

3

목표| 지수법칙을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$이므로

$2^{\frac{\beta}{\alpha}}\times 2^{\frac{\alpha}{\beta}}=2^{\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}}=2^{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}}=2^{\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}}$

$=2^{\frac{4+4}{-2}}=2^{-4}=\mathbf{\dfrac{1}{16}}$

4

목표| 지수가 실수일 때의 지수법칙을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{(2^a+2^{-a})\times 2^a}{(2^a-2^{-a})\times 2^a}=\dfrac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1}=-2$에서

$2^{2a}+1=-2\times 2^{2a}+2$, $3\times 2^{2a}=1$, $2^{2a}=\dfrac{1}{3}$

이므로 $4^a+4^{-a}=\dfrac{1}{3}+3=\mathbf{\dfrac{10}{3}}$

5

목표| 지수법칙을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 처음 1만 마리의 박테리아를 배양하여 6시간 후 4만 마리가 되었으므로

$4=1\cdot a^{6k}$에서 $a^{6k}=4$

따라서 배양 후 15시간이 되었을 때 박테리아의 개체 수는

$1\cdot a^{15k}=(a^{6k})^{\frac{5}{2}}=(2^2)^{\frac{5}{2}}=2^5=$**32(만 마리)**

2 로그

중단원을 시작하며

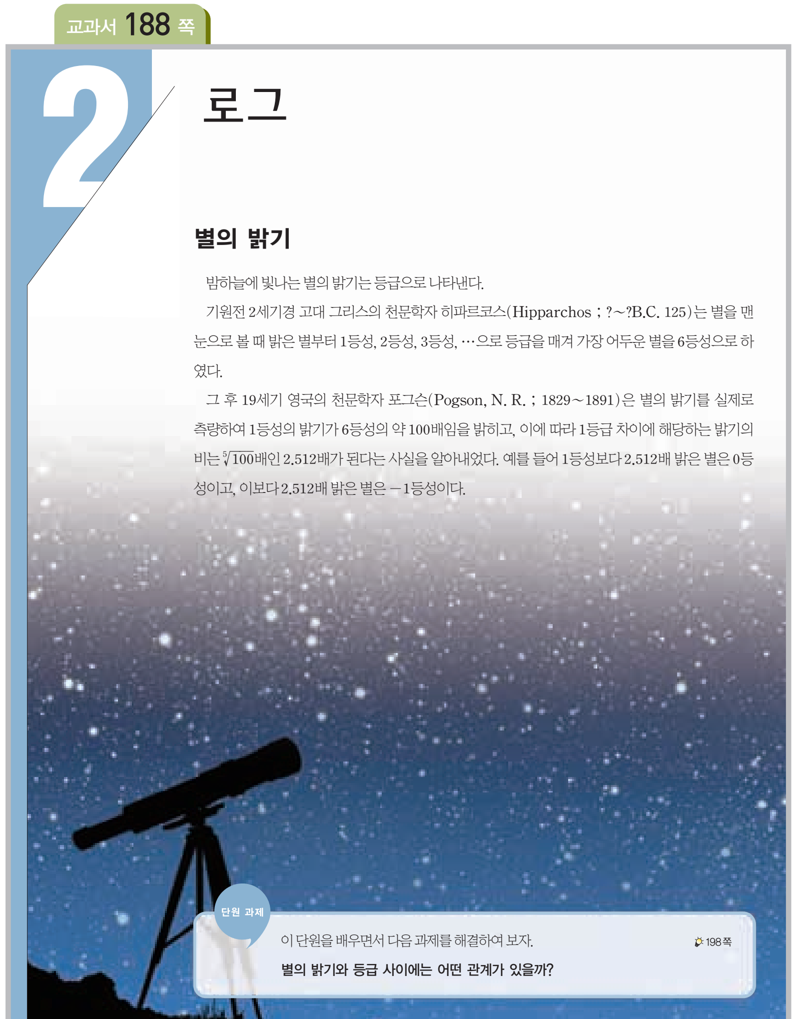
이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.

② 상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 로그의 뜻과 성질	로그의 뜻
	로그의 성질
	로그의 밑의 변환
02 상용로그	상용로그의 뜻과 활용
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제


교과서 188 쪽

2 로그

별의 밝기

밤하늘에 빛나는 별의 밝기는 등급으로 나타낸다.

기원전 2세기경 고대 그리스의 천문학자 히파르코스(Hipparchos ; ?~?B.C. 125)는 별을 맨눈으로 볼 때 밝은 별부터 1등성, 2등성, 3등성, …으로 등급을 매겨 가장 어두운 별을 6등성으로 하였다.

그 후 19세기 영국의 천문학자 포그슨(Pogson, N. R. ; 1829~1891)은 별의 밝기를 실제로 측량하여 1등성의 밝기가 6등성의 약 100배임을 밝히고, 이에 따라 1등급 차이에 해당하는 밝기의 비는 $\sqrt[5]{100}$배인 2.512배가 된다는 사실을 알아내었다. 예를 들어 1등성보다 2.512배 밝은 별은 0등성이고, 이보다 2.512배 밝은 별은 -1등성이다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 198쪽

별의 밝기와 등급 사이에는 어떤 관계가 있을까?

들어가면서

무한한 공간을 연구하는 천문학에서 다루는 수는 아주 큰 수이고 복잡한 계산이 필요하다. 컴퓨터와 같은 도구가 없었던 과거에는 이러한 큰 수를 계산하는 것이 무척 어려운 일이었다. 그러나 네이피어가 창안한 로그의 성질을 이용하면 곱셈을 덧셈으로, 나눗셈을 뺄셈으로 바꿔 주기 때문에 큰 수도 간편하게 계산할 수 있는 계기가 되었다.

이 단원에서는 로그의 뜻과 성질, 상용로그의 뜻을 알고, 이를 활용한 여러 분야의 문제를 해결하는 과정을 통하여 로그의 유용성을 느끼고, 문제 해결력을 향상시킬 수 있도록 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 로그의 뜻을 설명할 수 있다.	상	로그의 정의로부터 밑과 진수의 조건을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	로그의 정의를 이용하여 정수로 나타나는 로그의 값을 구할 수 있다.
	하	로그의 뜻을 말할 수 있다.
2. 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있다.	상	로그의 뜻과 지수법칙을 이용하여 로그의 성질을 이끌어내고, 이를 이용하여 식을 간단히 할 수 있다.
	중	로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있다.
	하	로그의 성질을 말할 수 있다.
3. 상용로그를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	상	로그의 성질과 상용로그를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	로그의 성질과 상용로그표를 이용하여 간단한 상용로그의 값을 구할 수 있다.
	하	10의 거듭제곱에 대한 상용로그의 값을 구할 수 있다.

교과서 189 쪽

01 로그의 뜻과 성질

● 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

로그란 무엇인가?

생각 열기　**예방 주사**

독감은 바이러스의 특성 때문에 전파 속도가 빠르다. 특히 독감의 원인인 인플루엔자 바이러스에 대하여 특효약이 없으므로 백신에 의한 예방이 필수이다. 연구에 따르면 백신을 맞은 대부분의 연령군에서 접종 12개월째에 면역 지속력이 줄어들었지만, 65세 이상 고령자들은 접종 후 6개월째부터 줄어들었다.

탐구 활동　**어떤 예방 주사를 접종한 직후의 면역력 수치 ω는 t시간 후에 $\omega\left(\frac{2}{3}\right)^t$이 된다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자. (단, ω는 상수이다.)**

1. 접종한 지 4시간이 지난 후의 면역력 수치를 계산하여 보자.
2. 접종한 후 면역력 수치가 절반이 되는 시간을 구하는 식을 써 보자.

탐구 활동에서 면역력 수치가 절반이 되는 시간은 $\omega\left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{1}{2}\omega$, 즉 $\left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{1}{2}$을 만족시키는 t의 값이다. 이때 t를 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{2}$로 나타내는 방법을 생각하여 보자.

일반적으로 $a>0$, $a\neq1$일 때, 양수 N에 대하여 $a^x=N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재한다.

이때 x를

$$x=\log_a N$$

과 같이 나타내고, a를 **밑**으로 하는 N의 **로그**라고 한다.

또 N을 $\log_a N$의 **진수**라고 한다.

진수

$\log_a N$

밑

● log는 logarithm을 줄인 말로 그리스 어인 비(logos)와 수(arithmos)가 결합된 것이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **로그의 정의**
> $a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때
> $$a^x=N \iff x=\log_a N$$

01 로그의 뜻과 성질

소단원 지도 목표

① 로그의 뜻을 이해하게 한다.

② 로그의 정의를 이용하여 간단한 로그의 값을 구할 수 있게 한다.

③ 로그의 정의와 지수법칙을 이용하여 로그의 성질을 유도할 수 있게 한다.

④ 로그의 성질을 이해하고, 이를 활용하여 로그의 식을 간단히 할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 로그의 값을 구할 때, 처음에는 지수를 사용하여 나타내게 한 후, $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$과 같은 특별한 로그의 값은 기억할 수 있도록 한다.

2. 로그의 밑은 반드시 1이 아닌 양수이고, 로그의 진수는 양수임을 강조하고 로그의 밑의 변환은 로그의 계산에서 매우 중요함을 구체적인 예를 통하여 인식하게 한다.

3. 로그는 복잡한 수의 곱셈과 나눗셈을 덧셈과 뺄셈으로 바꾸어서 계산을 간편하게 하기 위해 만든 것임을 알게 한다.

새로 나온 용어와 기호

- (로그의) 밑(base)
- 로그(logarithm)
- 진수(眞數, antilogarithm)
- $\log_a N$

생각 열기 참/고/자/료

면역은 자기 자신의 물질과 외부 물질을 구별하여 외부 물질에 대항함으로써 이를 제거하는 인체의 능력을 일컫는다. 대부분의 병원체는 면역 체계에 의해 외부 물질로 인식되므로 면역은 감염 질환으로부터 인체를 보호하는 역할을 수행한다.

면역은 획득하는 방법에 따라 크게 능동면역과 수동면역의 두 가지로 나뉜다. 능동면역은 자기 자신의 면역체계에 의해서 만들어지며 대부분 영구적이다. 한편 수동면역은 동물 또는 사람에 의해서 만들어진 면역 물질의 투여에 의해서 획득되는 면역력으로, 대개 수주에서 수개월이 지나면 소실된다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 예방 주사 접종 후 면역력 수치가 일정한 비율로 감소되는 관계식을 통해 로그의 필요성을 알게 한다.

1. $\omega\left(\frac{2}{3}\right)^4$

2. 접종한 후 면역력 수치가 절반이 되는 때를 t시간 후라고 하면　$\omega\left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{1}{2}\omega$, 즉 $\left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{1}{2}$

교과서 190 쪽

보기 (1) $3^2=9 \iff 2=\log_3 9$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2 \iff -1=\log_{\frac{1}{2}} 2$

문제 1 다음 등식을 로그를 사용하여 나타내어라.

(1) $2^0=1$ (2) $10^2=100$ (3) $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ (4) $3^{-2}=\frac{1}{9}$

문제 2 다음 등식을 지수를 사용하여 나타내어라.

(1) $\log_2 8=3$ (2) $\log_{27} 3=\frac{1}{3}$ (3) $\log_{\frac{1}{5}} 25=-2$ (4) $\log_2 \sqrt[3]{2}=\frac{1}{3}$

예제 01 다음 값을 구하여라.

(1) $\log_3 27$ (2) $\log_4 \frac{1}{16}$

풀이 (1) $\log_3 27=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여

$$3^x=27$$

$27=3^3$이므로 $3^x=3^3$에서 $x=3$

따라서 $\log_3 27=3$이다.

(2) $\log_4 \frac{1}{16}=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여

$$4^x=\frac{1}{16}$$

$\frac{1}{16}=4^{-2}$이므로 $4^x=4^{-2}$에서 $x=-2$

따라서 $\log_4 \frac{1}{16}=-2$이다.

답 (1) 3 (2) -2

문제 3 다음 값을 구하여라.

(1) $\log_2 64$ (2) $\log_3 \frac{1}{27}$ (3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$ (4) $\log_5 \sqrt{125}$

문제 4 다음 등식을 만족시키는 N의 값을 구하여라.

(1) $\log_5 N=\frac{1}{2}$ (2) $\log_{\frac{1}{3}} N=2$

1

목표| 로그의 정의를 이용하여 등식을 로그를 사용하여 나타낼 수 있게 한다.

풀이| 로그의 정의에 의하여

(1) $\mathbf{0=\log_2 1}$

(2) $\mathbf{2=\log_{10} 100}$

(3) $\mathbf{\frac{1}{2}=\log_5 \sqrt{5}}$

(4) $\mathbf{-2=\log_3 \frac{1}{9}}$

2

목표| 로그의 정의를 이용하여 등식을 지수를 사용하여 나타낼 수 있게 한다.

풀이| 로그의 정의에 의하여

(1) $\mathbf{2^3=8}$

(2) $\mathbf{27^{\frac{1}{3}}=3}$

(3) $\mathbf{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=25}$

(4) $\mathbf{2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}}$

3

목표| 로그의 정의를 이용하여 주어진 로그의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\log_2 64=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여

$2^x=64$

$64=2^6$이므로 $2^x=2^6$에서 $x=6$

따라서 $\log_2 64=\mathbf{6}$이다.

(2) $\log_3 \frac{1}{27}=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여

$3^x=\frac{1}{27}$

$\frac{1}{27}=3^{-3}$이므로 $3^x=3^{-3}$에서 $x=-3$

따라서 $\log_3 \frac{1}{27}=\mathbf{-3}$이다.

(3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{32}$

$\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^5$에서 $x=5$

따라서 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}=\mathbf{5}$이다.

(4) $\log_5 \sqrt{125}=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여

$5^x=\sqrt{125}$

$\sqrt{125}=5^{\frac{3}{2}}$이므로 $5^x=5^{\frac{3}{2}}$에서 $x=\frac{3}{2}$

따라서 $\log_5 \sqrt{125}=\mathbf{\frac{3}{2}}$이다.

4

목표| 로그의 정의를 이용하여 등식을 만족시키는 미지수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 로그의 정의에 의하여

(1) $N=5^{\frac{1}{2}}=\mathbf{\sqrt{5}}$

(2) $N=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\mathbf{\frac{1}{9}}$

교과서 191 쪽

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

다음 그림을 보고, $(-2)^2=4 \Longleftrightarrow \log_{-2} 4=2$가 옳은지를 판단하고 그 이유를 말하여 보자.

로그에는 어떤 성질이 있는가?

탐구 활동 실수 m, n에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. $2^m=3$, $2^n=5$를 로그를 사용하여 나타내어 보자.
2. 1의 결과를 이용하여 $m+n$의 값을 구하여 보자.
3. 지수법칙에 의하여 $2^m \times 2^n=2^{m+n}=15$이다. $2^{m+n}=15$를 로그를 사용하여 나타내고 2의 결과와 비교하여 보자.

로그의 정의와 지수법칙을 이용하여 로그의 성질을 알아보자.

$a>0$, $a\neq1$일 때, $a^0=1$, $a^1=a$이므로 로그의 정의에 의하여

$$\log_a 1=0,\ \log_a a=1$$

이다.

또 $M>0$, $N>0$일 때, $\log_a M=m$, $\log_a N=n$이라고 하면 로그의 정의에 의하여

$$M=a^m,\ N=a^n$$

이고, 지수법칙에 의하여 $MN=a^m a^n=a^{m+n}$이므로

$$\log_a MN=m+n=\log_a M+\log_a N$$

이 성립한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 지수로 표현된 식을 로그를 사용하여 나타내고, 지수법칙을 이용하여 로그의 성질을 유도한다는 것을 알게 하기 위한 것이다.

1. $2^m=3$에서 로그의 정의에 의하여

$\boldsymbol{m=\log_2 3}$

$2^n=5$에서 로그의 정의에 의하여

$\boldsymbol{n=\log_2 5}$

2. $m+n=\boldsymbol{\log_2 3+\log_2 5}$

3. $2^{m+n}=15$에서 로그의 정의에 의하여

$m+n=\log_2 15$

$\boldsymbol{\log_2 3+\log_2 5=m+n=\log_2 15}$

즉, $\log_2 3+\log_2 5=\log_2(3\times5)$임을 알 수 있다.

사고력 기르기 의사소통

출제 의도 | 로그가 잘못 사용된 예를 찾아봄으로써 로그의 밑과 진수의 조건을 이해할 수 있도록 하기 위한 문제이다.

풀이 | $\log_a N$에서 밑 a는 $a>0$, $a\neq1$이고, 진수 N은 $N>0$이다.
$(-2)^2=4$는 옳지만 이것을 $\log_{-2} 4=2$와 같이 나타내면 밑이 음수가 되므로 로그의 정의에 위배된다.
따라서 $a^x=N$의 꼴을 모두 $x=\log_a N$의 꼴로 나타낼 수 있는 것이 아님을 알 수 있다.

참고 | $\log_1 3=x$에서 $1^x=3$이고, $\log_0 3=x$에서 $0^x=3$이지만 $1^x=3$ 또는 $0^x=3$인 실수 x는 존재하지 않는다. 따라서 로그는 밑이 1이 아닌 양수일 때만 정의한다.
한편 $3^x=-4$에서 $x=\log_3(-4)$와 같이 고칠 수 있을 것 같지만 모든 실수 x에 대하여 $3^x>0$이므로 $3^x=4$인 실수 x는 존재하지 않으므로 로그는 진수가 양수일 때만 정의한다.

지/도/자/료

로그의 정의는 지수를 이용하므로 로그의 성질은 지수법칙에서 유도된다.

지수법칙(성질)	로그의 성질
$a^0=1$	$\log_a 1=0$
$a^1=a$	$\log_a a=1$
$a^p\times a^q=a^{p+q}$	$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$
$a^p\div a^q=a^{p-q}$	$\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
$(a^p)^k=a^{kp}$	$\log_a x^k=k\log_a x$

특히 두 수의 곱, 몫의 로그가 각각의 수의 로그의 합, 차가 된다는 성질을 이용하면 두 수의 곱셈과 나눗셈을 계산할 때, 로그를 취하여 덧셈과 뺄셈으로 계산한 다음, 다시 로그의 역을 취하면 간편하게 계산할 수 있다. 이것이 로그가 계산법에서 위력을 갖게 된 이유이다. 이러한 기본적인 생각을 학생들이 분명하게 이해하도록 지도한다.

교과서 192 쪽

예제 02 $a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때, $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$이 성립함을 증명하여라.

증명 $\log_a M=m$, $\log_a N=n$이라고 하면 로그의 정의에 의하여

$$M=a^m,\ N=a^n$$

지수법칙에 의하여 $\frac{M}{N}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$이므로

$$\log_a \frac{M}{N}=m-n=\log_a M-\log_a N$$

❶ **문제 5** $a>0$, $a\neq1$, $N>0$이고 k는 실수일 때, $\log_a N^k=k\log_a N$이 성립함을 증명하여라.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **로그의 성질**
> $a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때
> (1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$
> (2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
> (3) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
> (4) $\log_a N^k=k\log_a N$ (k는 실수)

보기 (1) $\log_{\frac{1}{2}} 1=0$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}=1$

(2) $\log_2 6=\log_2 (2\times3)=\log_2 2+\log_2 3=1+\log_2 3$

(3) $\log_7 \frac{2}{7}=\log_7 2-\log_7 7=\log_7 2-1$

(4) $\log_3 \sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_3 3=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

문제 6 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\log_5 1+\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$　　(2) $\log_8 2+\log_8 4$

(3) $\log_2 48-\log_2 3$　　(4) $\log_{10} 1000$

본문 해설

❶ 일반적으로 $\log_a x^2\neq2\log_a x$이다.

예를 들어 $a=3$, $x=-3$일 때

$\log_3(-3)^2=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2$

이다. 그러나 $2\log_3(-3)$은 진수가 음수이므로 정의되지 않는다.

일반적으로 $x<0$일 때 $x^2>0$이므로 $\log_a x^2$은 정의되지만 $2\log_a x$는 정의되지 않는다.

이때 $\log_3(-3)^2=2\log_3 3=2\log_2|-3|$에서와 같이 $\log_a x^2=2\log_a |x|$가 성립한다.

5

목표| 지수법칙을 이용하여 로그의 성질이 성립함을 증명할 수 있게 한다.

풀이| $\log_a N=n$이라고 하면 로그의 정의에 의하여　$N=a^n$

임의의 실수 k에 대하여 지수법칙을 이용하면

$N^k=(a^n)^k=a^{nk}$

로그의 정의에 의하여

$\log_a N^k=nk=kn=k\log_a N$

6

목표| 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\log_5 1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}=0+1=\mathbf{1}$

(2) $\log_8 2+\log_8 4=\log_8(2\times4)=\log_8 8=\mathbf{1}$

(3) $\log_2 48-\log_2 3=\log_2 \frac{48}{3}=\log_2 16=\log_2 2^4=\mathbf{4}$

(4) $\log_{10} 1000=\log_{10} 10^3=\mathbf{3}$

지/도/자/료　로그의 성질에 대한 오개념

학생들이 로그의 성질을 착각하여 잘못된 계산을 하는 경우가 많이 있다. 다음은 로그를 잘못 계산하는 대표적인 사례이다.

- $\log_1 1=1$, $\log_1 1=0$
- $\log_a(M+N)=\log_a M+\log_a N$
- $\log_a M\cdot\log_a N=\log_a M+\log_a N$
- $\log_a(M-N)=\log_a M-\log_a N$
- $\frac{\log_a M}{\log_a N}=\log_a M-\log_a N$
- $(\log_a M)^n=n\log_a M$

교과서 193 쪽

예제 03 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\log_2 \frac{2}{3} + 2\log_2 \sqrt{24}$　　(2) $\frac{1}{2}\log_3 \frac{3}{2} - \log_3 5\sqrt{2} + 2\log_3 \sqrt{10}$

풀이 (1) $\log_2 \frac{2}{3} + 2\log_2 \sqrt{24} = \log_2 \frac{2}{3} + \log_2(\sqrt{24})^2 = \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 24$

$= \log_2\left(\frac{2}{3} \times 24\right) = \log_2 16$

$= \log_2 2^4 = 4$

(2) $\frac{1}{2}\log_3 \frac{3}{2} - \log_3 5\sqrt{2} + 2\log_3 \sqrt{10} = \log_3 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \log_3 5\sqrt{2} + \log_3 10$

$= \log_3 \frac{\sqrt{3} \times 10}{\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}} = \log_3 \sqrt{3}$

$= \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

답 (1) 4 (2) $\frac{1}{2}$

문제 7 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\log_3 \frac{9}{2} + 3\log_3 \sqrt[3]{18}$　　(2) $\log_3 \sqrt{2} + \log_3 \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\log_3 6$

예제 04 $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_2 45$　　(2) $\log_2 \frac{5}{3}$

풀이 (1) $\log_2 45 = \log_2(3^2 \times 5) = \log_2 3^2 + \log_2 5 = 2\log_2 3 + \log_2 5 = 2a + b$

(2) $\log_2 \frac{5}{3} = \log_2 5 - \log_2 3 = b - a$

답 (1) $2a+b$ (2) $b-a$

문제 8 $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_3 10$　　(2) $\log_3 100$

(3) $\log_3 \frac{3}{10}$　　(4) $\log_3 \sqrt{40}$

7

목표| 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\log_3 \frac{9}{2} + 3\log_3 \sqrt[3]{18}$

$= \log_3 \frac{9}{2} + \log_3(\sqrt[3]{18})^3$

$= \log_3 \frac{9}{2} + \log_3 18$

$= \log_3\left(\frac{9}{2} \times 18\right)$

$= \log_3 81 = \log_3 3^4 = \mathbf{4}$

(2) $\log_3 \sqrt{2} + \log_3 \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\log_3 6$

$= \log_3 \sqrt{2} + \log_3 \frac{\sqrt{3}}{3} - \log_3 \sqrt{6}$

$= \log_3\left(\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{3\sqrt{6}}\right)$

$= \log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = \mathbf{-1}$

8

목표| 로그의 성질을 이용하여 주어진 문자로 식을 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\log_3 10 = \log_3(2 \times 5)$

$= \log_3 2 + \log_3 5 = \boldsymbol{a+b}$

(2) $\log_3 100 = \log_3(2^2 \times 5^2)$

$= \log_3 2^2 + \log_3 5^2$

$= 2\log_3 2 + 2\log_3 5 = \boldsymbol{2a+2b}$

(3) $\log_3 \frac{3}{10} = \log_3 3 - \log_3 10$

$= 1 - \log_3(2 \times 5)$

$= 1 - (\log_3 2 + \log_3 5)$

$= 1 - (a+b) = \boldsymbol{-a-b+1}$

(4) $\log_3 \sqrt{40} = \log_3 40^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_3 40$

$= \frac{1}{2}\log_3(2^3 \times 5)$

$= \frac{1}{2}(\log_3 2^3 + \log_3 5)$

$= \frac{1}{2}(3\log_3 2 + \log_3 5)$

$= \frac{1}{2}(3a+b) = \boldsymbol{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b}$

읽/기/자/료

자연수 지수로부터 시작하여 실수의 범위까지 지수를 확장해 나가는 과정은 수학적으로 여러 가지 자연스럽지 못한 점이 있다. 우선 a^x에서 a는 양수라는 것을 가정해야 한다.

만약 a가 음수라면 정수 x에 대하여 $y=a^x$은 양수와 음수의 값을 교대로 가질 것이다. x가 유리수인 경우에는 여러 개의 허수의 값을 가질 수도 있다. 따라서 (x, y)의 집합은 연속인 곡선이 되지 못한다.

또 x가 무리수인 경우에는 유리수 지수의 극한으로 정의해야 한다. 이러한 부자연스러운 점들 때문에 고차원적인 수학에서는 일반적으로 로그함수를 쌍곡선의 넓이의 함수, 즉

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt \quad (x>0)$$

로 정의하고, 지수함수 $y=e^x$은 $y=\ln x$의 역함수로 정의하여 이로부터 $y=a^x$을 정의한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 로그의 정의와 성질을 이용하여 로그의 밑을 다른 수로 변환하여 나타낼 수 있음을 알게 하기 위한 것이다.

1. $2=\log_2 4$

2. 등식 $\log_c 2^2=\log_c 4$에서

$2\log_c 2=\log_c 4$

$\log_c 2\neq 0$이므로 양변을 $\log_c 2$로 나누면

$\dfrac{\log_c 4}{\log_c 2}=2$

3. $\log_2 4=\dfrac{\log_c 4}{\log_c 2}$

즉, 원래의 로그의 밑은 분모의 로그의 진수로, 원래의 로그의 진수는 분자의 로그의 진수가 된다.

교과서 194 쪽

로그의 밑을 다른 수로 어떻게 바꾸는가?

탐구 활동 다음 물음에 답하여 보자.

1. 등식 $2^2=4$를 로그를 사용하여 나타내어 보자.

2. $c>0$, $c\neq 1$일 때, 등식 $\log_c 2^2=\log_c 4$를 이용하여 $\dfrac{\log_c 4}{\log_c 2}$의 값을 구하여 보자.

3. **1**과 **2**의 결과를 비교하여 보자.

❶ $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$일 때, $\log_a b$를 양수 c $(c\neq 1)$를 밑으로 하는 로그로 바꾸는 방법을 알아보자.

$\log_a b=x$, $\log_c a=y$라고 하면 $b=a^x$, $a=c^y$이므로

$$b=a^x=(c^y)^x=c^{xy}$$

이다. 로그의 정의에 의하여 $xy=\log_c b$이므로

$$\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b$$

이다. 그런데 $\log_c a\neq 0$이므로 양변을 $\log_c a$로 나누면

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

이다.

● $a\neq 1$일 때, $\log_c a\neq 0$

이상을 정리하면 다음과 같다.

로그의 밑의 변환

a, b, c는 양수이고 $a\neq 1$, $c\neq 1$일 때

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

보기 (1) $\log_2 5=\dfrac{\log_5 5}{\log_5 2}=\dfrac{1}{\log_5 2}$

(2) $\log_4 8=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2}=\dfrac{3\log_2 2}{2\log_2 2}=\dfrac{3}{2}$

(3) $\log_9 25=\dfrac{\log_3 25}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 5^2}{\log_3 3^2}=\dfrac{2\log_3 5}{2\log_3 3}=\log_3 5$

본문 해설

❶ 로그의 밑의 변환 공식은 다음과 같이 다른 방법으로 증명할 수 있다.

$\log_a b=x$라고 하면 $a^x=b$

양변에 양수 $c(c\neq 1)$를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_c a^x=\log_c b$

로그의 성질에 의하여

$x\log_c a=\log_c b$

그런데 $a\neq 1$에서 $\log_c a\neq 0$이므로

$x=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

따라서 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$이다.

지/도/자/료 로그의 여러 가지 공식

1. $\log_a b\cdot\log_b a=1$

〈증명〉 $\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$이므로

$\log_a b\cdot\log_b a=\dfrac{1}{\log_b a}\cdot\log_b a=1$

2. $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$

〈증명〉 $e>0$, $e\neq 1$이라고 하면

$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\dfrac{\log_e b}{\log_e a}\cdot\dfrac{\log_e c}{\log_e b}\cdot\dfrac{\log_e a}{\log_e c}=1$

3. $a^{\log_a b}=b$

〈증명〉 $a^{\log_a b}=x$라고 하면

$\log_a b=\log_a x$, $x=b$

따라서 $a^{\log_a b}=b$이다.

4. $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

〈증명〉 $\log_c a^{\log_c b}=\log_c b\cdot\log_c a$

$=\log_c a\cdot\log_c b=\log_c b^{\log_c a}$

따라서 $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$이다.

교과서 195 쪽

문제 9 다음 값을 구하여라.

(1) $\log_8 16$ (2) $\log_{\sqrt{3}} 9$

(3) $\log_2 3\cdot\log_3 2$ (4) $\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 9$

예제 05 $\log_{10} 2=a$, $\log_{10} 3=b$라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_3 8$ (2) $\log_5 10$

풀이 (1) $\log_3 8=\dfrac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3}=\dfrac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 3}=\dfrac{3\log_{10} 2}{\log_{10} 3}=\dfrac{3a}{b}$

(2) $\log_5 10=\dfrac{\log_{10} 10}{\log_{10} 5}=\dfrac{1}{\log_{10} 5}$이고,

$\log_{10} 5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-\log_{10} 2=1-a$이므로

$\log_5 10=\dfrac{1}{\log_{10} 5}=\dfrac{1}{1-a}$

답 (1) $\dfrac{3a}{b}$ (2) $\dfrac{1}{1-a}$

문제 10 $\log_5 2=a$, $\log_5 3=b$라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_2 18$ (2) $\log_{10}\sqrt{6}$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

$a>0$, $b>0$, $a\neq1$, $b\neq1$일 때, 다음 등식이 성립함을 설명하여 보자.

(1) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

(2) $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (m, n은 실수, $m\neq0$)

10

목표| 로그의 밑을 변환하여 주어진 문자로 식을 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1)
$$\log_2 18=\frac{\log_5 18}{\log_5 2}=\frac{\log_5(2\times3^2)}{\log_5 2}=\frac{\log_5 2+\log_5 3^2}{\log_5 2}=\frac{\log_5 2+2\log_5 3}{\log_5 2}=\boldsymbol{\frac{a+2b}{a}}$$

(2)
$$\log_{10}\sqrt{6}=\frac{\log_5\sqrt{6}}{\log_5 10}=\frac{\log_5 6^{\frac{1}{2}}}{\log_5(2\times5)}=\frac{\frac{1}{2}\log_5 6}{\log_5 2+\log_5 5}=\frac{\log_5(2\times3)}{2(\log_5 2+1)}=\frac{\log_5 2+\log_5 3}{2(\log_5 2+1)}=\boldsymbol{\frac{a+b}{2(a+1)}}$$

9

목표| 로그의 밑을 변환하여 주어진 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1)
$$\log_8 16=\frac{\log_2 16}{\log_2 8}=\frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3}=\frac{4\log_2 2}{3\log_2 2}=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

(2)
$$\log_{\sqrt{3}} 9=\frac{\log_3 9}{\log_3\sqrt{3}}=\frac{\log_3 3^2}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\log_3 3}{\frac{1}{2}\log_3 3}=\boldsymbol{4}$$

(3)
$$\log_2 3\cdot\log_3 2=\frac{\log_3 3}{\log_3 2}\cdot\frac{\log_3 2}{\log_3 3}=\boldsymbol{1}$$

(4)
$$\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 9=\frac{\log_3 5}{\log_3 3}\cdot\frac{\log_3 7}{\log_3 5}\cdot\frac{\log_3 9}{\log_3 7}=\frac{\log_3 5}{\log_3 3}\cdot\frac{\log_3 7}{\log_3 5}\cdot\frac{2\log_3 3}{\log_3 7}=\boldsymbol{2}$$

사고력 기르기 추론

출제 의도| 로그에 대한 등식을 증명하고, 증명한 등식을 이해함으로써 로그가 포함된 식의 계산력 향상을 위한 것이다.

풀이| (1)
$$\log_a b=\frac{\log_b b}{\log_b a}=\frac{1}{\log_b a}$$

(2)
$$\log_{a^m} b^n=\frac{\log_a b^n}{\log_a a^m}=\frac{n\log_a b}{m\log_a a}=\frac{n\log_a b}{m}=\frac{n}{m}\log_a b$$

02 상용로그

소단원 지도 목표

① 상용로그를 이해하고, 상용로그표를 이용하여 여러 가지 수의 상용로그의 값을 구할 수 있게 한다.
② 로그의 성질을 이용하여 상용로그의 계산을 할 수 있게 한다.
③ 상용로그를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 모든 로그는 밑의 변환을 이용하여 상용로그로 나타낼 수 있음을 알게 한다.

2. 상용로그표를 이용하는 방법은 예를 통하여 간단히 다루고, 상용로그의 지표와 가수, 상용로그표의 비례 부분은 다루지 않는다.

3. 상용로그의 계산에 있어서 공학용 계산기 등의 공학적 도구를 활용할 수 있도록 지도한다.

교과서 196 쪽

02 상용로그

● 상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

상용로그란 무엇인가?

생각 열기 지진의 리히터 규모

2011년 3월 일본 도쿄 동북부 해안에서 리히터 규모 9.0의 강진이 발생하였다. 이로 인하여 약 10 m의 지진 해일이 몰려와서 엄청난 인명 피해가 발생하였다. 리히터 규모란 지진의 강도를 나타내는 단위로 진앙에서 100 km 떨어진 지점에서 최대 진폭을 측정하여 계산하는데 이때 로그가 이용된다.

탐구 활동 진앙에서 100 km 떨어진 어느 지점에서 최대 진폭이 I μm인 지진의 리히터 규모 M은 $M=\log_{10} I+c$ (c는 상수)이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 최대 진폭이 100000 μm일 때, 리히터 규모 M을 구하여 보자. (단, $c=0$)

2. 리히터 규모가 5.0인 지진의 최대 진폭은 리히터 규모가 1.0인 지진의 최대 진폭의 몇 배인지 구하여 보자.

지진의 리히터 규모를 구하는 식에서처럼 일상생활에서는 밑이 10인 로그를 사용하는 경우가 많다.

양수 N에 대하여 10을 밑으로 하는 로그 $\log_{10} N$을 **상용로그**라 하고, 보통 로그의 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

과 같이 나타낸다.

보기 (1) $\log 10000=\log_{10} 10^4=4$

(2) $\log 0.01=\log_{10} \frac{1}{100}=\log_{10} 10^{-2}=-2$

(3) $\log 10\sqrt{10}=\log_{10} \sqrt{1000}=\log_{10} 10^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

새로 나온 용어와 기호

• 상용로그(common logarithm)
• $\log N$

생각 열기 참 / 고 / 자 / 료

리히터 규모는 지진이 일어난 곳(진앙지)으로부터 100 km 떨어진 지점에서 지진계로 측정한 지진파의 최대 진폭을 이용하여 계산한다.
최대 진폭이 I미크론(micron)일 때, 규모 M은 로그를 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$$M=\log_{10} I+c \ (c\text{는 상수})$$

한편 규모 M인 지진에 의해 발생하는 에너지 E는 $\log E=11.8+1.5M$인 관계가 성립하므로 $10^{1.5}$이 약 32임을 이용하면 규모가 1만큼 증가할 때, 에너지가 약 32배로 증가하게 됨을 알 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 리히터 규모를 구하고, 리히터 규모와 지진의 최대 진폭 사이의 관계를 살펴봄으로써 밑이 10인 로그가 이러한 문제를 해결하는 데 사용됨을 알게 하기 위한 것이다.

1. 100000 μm$=10^5$ μm, $c=0$이므로 구하는 리히터 규모 M은 $M=\log_{10} 10^5+0=5\log_{10} 10=5$이다.

2. 리히터 규모가 5.0, 1.0인 지진의 최대 진폭을 각각 I_1, I_2라고 하면

$5.0=\log_{10} I_1+c$ …… ①

$1.0=\log_{10} I_2+c$ …… ②

①에서 ②를 변끼리 빼면

$$4.0=\log_{10} I_1-\log_{10} I_2=\log_{10} \frac{I_1}{I_2}$$

로그의 정의에 의하여 $\frac{I_1}{I_2}=10^{4.0}=10000$

따라서 리히터 규모가 5.0인 지진의 최대 진폭은 리히터 규모가 1.0인 지진의 최대 진폭의 **10000**배이다.

교과서 197 쪽

문제 1 다음 표를 완성하여라.

N	0.001		1	$\sqrt[3]{10}$	100		1000
$\log N$		-1	0			$\frac{5}{2}$	

❶ 이 책의 부록에 있는 상용로그표는 0.01의 간격으로 1.00에서 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값을 반올림하여 소수 넷째 자리까지 나타낸 것이다.

예를 들어 log 2.14의 값은 상용로그표에서 2.1의 행과 4의 열이 만나는 곳에 있는 0.3304이다.

❷ 즉, log 2.14=0.3304이다.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

보기 log 2=0.3010, log 2.28=0.3579

문제 2 상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하여라.

(1) log 5.23 (2) log 8.82

사고력 기르기

추론
의사소통
▸문제 해결

814=100×8.14임을 이용하여 log 814의 값을 구하여 보자. 또 log 0.0814의 값을 구하여 보자. (단, log 8.14는 0.9106으로 계산한다.)

1

목표| 상용로그의 뜻과 로그의 성질을 이용하여 표를 완성할 수 있게 한다.

풀이|

N	$\log N$
0.001	$\mathbf{-3}$
0.1	-1
1	0
$\sqrt[3]{10}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$
100	**2**
$\mathbf{100\sqrt{10}}$	$\frac{5}{2}$
1000	**3**

$\log 0.001=\log_{10}\frac{1}{1000}=\log_{10}10^{-3}=-3$

$\log N=\log_{10}N=-1$에서 $N=10^{-1}=0.1$

$\log\sqrt[3]{10}=\log_{10}10^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log_{10}10=\frac{1}{3}$

$\log 100=\log_{10}100=\log_{10}10^2=2\log_{10}10=2$

$\log N=\log_{10}N=\frac{5}{2}$에서

$N=10^{\frac{5}{2}}=100\sqrt{10}$

$\log 1000=\log_{10}1000=\log_{10}10^3=3$

본문 해설

❶ 계산기를 이용하여 로그의 값을 구한 후 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림하여 구한 값과 상용로그표를 이용하여 구한 값은 서로 같다.

❷ 상용로그표에서 몇가지 경우를 제외하고 상용로그의 값은 반올림한 값으로 나타내지만 등호 =를 사용하여 나타내기로 한다. 예를 들어 log 2의 실제의 값은
0.30102999566398⋯
이지만 log 2=0.3010으로 나타낸다.

2

목표| 상용로그표를 이용하여 주어진 로그의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) log 5.23=**0.7185**

(2) log 8.82=**0.9455**

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 상용로그표에 나타나지 않은 수에 대한 로그의 값을 구해 봄으로써 표에 나타나지 않은 여러 가지 수에 대한 로그의 값을 구할 수 있음을 알게 하기 위한 것이다.

풀이| $\log 814=\log(100\times 8.14)$

$=\log 100+\log 8.14$

$=2+0.9106=\mathbf{2.9106}$

$\log 0.0814=\log(0.01\times 8.14)$

$=\log 0.01+\log 8.14$

$=\log 10^{-2}+\log 8.14$

$=-2+0.9106$

$=\mathbf{-1.0894}$

교과서 198 쪽

실생활 문제를 해결하는 과정에서 복잡한 계산이 필요할 때, 상용로그를 이용하면 편리한 경우가 있다.

예제 01 100만 원을 연이율 3 %, 1년마다의 복리로 10년간 예금하였을 때, 원리합계는 대략 얼마인지 상용로그표를 이용하여 구하여라.

원금이 a원, 연이율이 r %인 예금의 n년 후 복리의 원리합계는 $a\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$원이다.

풀이 10년 후 원리합계는 $100(1+0.03)^{10}=100\times1.03^{10}$(만 원)이다.
1.03^{10}의 값을 구하기 위하여 $\log 1.03^{10}$을 계산하면
상용로그표에서 $\log 1.03=0.0128$이므로

$$\log 1.03^{10}=10\log 1.03=10\times0.0128=0.128$$

상용로그표에서 0.128에 가장 가까운 값을 찾으면

$$\log 1.34=0.1271$$

따라서 $(1.03)^{10}$은 약 1.34이므로 구하는 원리합계는 $100\times1.34=134$(만 원)이다.

답 약 134만 원

문제 3 어느 회사의 영업 이익이 매년 4 %씩 증가하였을 때, 200억의 영업 이익을 거둔 해로부터 10년 뒤의 영업 이익은 대략 얼마인지 상용로그표를 이용하여 구하여라.

실생활

문제 4 세기가 A W(와트)인 전파가 어떤 벽을 투과하여 세기가 B W인 전파로 바뀔 때, 그 벽의 전파 감쇄비를 f dB(데시벨)이라고 하면

$$f=10\log\frac{B}{A}$$

의 관계식이 성립한다고 하자. 전파 감쇄비가 -5 dB인 벽을 투과한 전파의 세기가 1 W일 때, 벽을 투과하기 전 전파의 세기를 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

맨눈으로 측정한 별의 등급을 겉보기 등급이라고 한다. 밝기가 l_1, l_2이고 겉보기 등급이 m_1, m_2인 두 별에 대하여 다음과 같은 등식이 성립한다고 하자.

$$m_2-m_1=-2.5\log\frac{l_2}{l_1}$$

밤하늘에 가장 밝게 보이는 별인 시리우스의 겉보기 등급은 -1.4이고, 북극성의 겉보기 등급은 2.5이다. 시리우스의 밝기는 북극성의 밝기의 약 몇 배인지 구하여라.

(단, $\log 36.3=1.56$으로 계산한다.)

3

목표| 상용로그를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 매년 4 %씩 영업 이익이 증가하므로 영업 이익이 200억인 해로부터 10년 뒤의 영업 이익은 $200(1+0.04)^{10}=200\times1.04^{10}$(억 원)이다.
1.04^{10}의 값을 구하기 위하여 $\log 1.04^{10}$을 계산하면 $\log 1.04=0.0170$이므로

$$\log 1.04^{10}=10\log 1.04=10\times0.0170=0.170$$

상용로그표에서 0.170에 가장 가까운 값을 찾으면 $\log 1.48=0.1703$
따라서 1.04^{10}은 약 1.48이므로
$200\times1.48=$**296(억 원)**이다.

4

목표| 상용로그를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 전파 감쇄비가 -5 dB인 벽을 투과한 전파의 세기가 1 W일 때 벽을 투과하기 전의 전파의 세기를 x W라고 하면

$-5=10\log\frac{1}{x}$에서

$-\frac{1}{2}=\log\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{2}=-\log x$, $\log x=\frac{1}{2}$

이므로 $x=10^{\frac{1}{2}}=$**$\sqrt{10}$(W)**이다.

단원 과제

목표| 상용로그를 이용하여 시리우스의 밝기와 북극성의 밝기를 비교해 봄으로써 상용로그가 실생활에 유용함을 알게 한다.

풀이| 시리우스의 밝기를 l_s, 북극성의 밝기를 l_k라고 하면 시리우스의 겉보기 등급이 -1.4, 북극성의 겉보기 등급이 2.5이므로 다음이 성립한다.

$$-1.4-2.5=-2.5\log\frac{l_s}{l_k},\ \log\frac{l_s}{l_k}=\frac{39}{25}=1.56$$

$\log 36.3=1.56$이므로 $\frac{l_s}{l_k}=36.3$

따라서 시리우스의 밝기는 북극성의 밝기의 **약 36.3배**이다.

읽/기/자/료

기원 전 그리스의 히파르코스(Hipparchos ; ?B.C. 190~?B.C. 125)는 눈에 보이는 별들을 밝기에 따라 가장 밝은 별(1등성)부터 가장 어두운 별(6등성)까지 6등급으로 분류하였다. 그 후에 1등성의 밝기는 6등성의 밝기의 약 100배임을 알게 되었다.
따라서 각 등급 간의 밝기의 비가 일정하다면, 별의 등급이 1등급 작아질 때마다 별의 밝기는 $\sqrt[5]{100}$(약 2.5)배 밝아지게 된다.
1856년에 유도된 포그슨의 공식(Pogson's formula)에 의하면 별의 등급(m)과 별의 밝기(I) 사이의 관계는 다음과 같다.

$$m=-\frac{5}{2}\log I+C\ (\text{단, } C\text{는 상수})$$

단원 과제에서 주어진 등식은 실제로 포그슨의 공식을 이용하여 두 별 사이의 등급의 차를 나타낸 것이다.

중단원 기초

[해답 p.234]

수준별 학습

1 다음 등식을 로그를 사용하여 나타내어라.

01 로그의 뜻과 성질
로그의 뜻

(1) $5^x=7$　　(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=2$

2 다음 값을 구하여라.

01 로그의 뜻과 성질
로그의 성질

(1) $\log_3 1$　　(2) $\log_{27} 3+\log_{27} 9$

(3) $\log_2 \sqrt{3}-\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$　　(4) $\log_{10} 0.001$

3 다음 식을 간단히 하여라.

01 로그의 뜻과 성질
로그의 성질과 밑의 변환

(1) $\log_3 9\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log_3 3$　　(2) $2\log_2 3-\log_2 18$

(3) $\log_9 \frac{1}{3}$　　(4) $\log_3 5\cdot\log_5 81$

4 상용로그표를 이용하여 다음 N의 값을 구하여라.

02 상용로그
상용로그표

(1) $\log 3.09=N$　　(2) $\log 6.15=N$

(3) $\log N=0.3365$　　(4) $\log N=0.6998$

5 외부 자극의 세기 I에 따른 감각의 세기 S는 다음과 같다고 하자.

02 상용로그
상용로그의 활용

$$S=k\log I\ (k\text{는 상수})$$

$k=\frac{1}{6}$일 때, 감각의 세기 $\frac{1}{2}$에 대한 자극의 세기를 구하여라.

중/단/원 기초

1

목표| 등식을 로그를 사용하여 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\boldsymbol{x=\log_5 7}$

(2) $\boldsymbol{x=\log_{\frac{1}{3}} 2}$

2

목표| 로그의 성질을 이용하여 주어진 로그의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\log_3 1=\mathbf{0}$

(2) $\log_{27} 3+\log_{27} 9=\log_{27}(3\times 9)=\log_{27} 27=\mathbf{1}$

(3) $\log_2 \sqrt{3}-\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}=\log_2\left(\sqrt{3}\div\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\log_2 2=\mathbf{1}$

(4) $\log_{10} 0.001=\log_{10}\frac{1}{1000}=\log_{10} 10^{-3}$

$=-3\log_{10} 10=\mathbf{-3}$

3

목표| 로그의 성질과 밑의 변환을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\log_3 9\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log_3 3$

$=\log_3 9\sqrt{3}+\log_3 \sqrt{3}$

$=\log_3(9\sqrt{3}\times\sqrt{3})$

$=\log_3 27=\log_3 3^3$

$=3\log_3 3=\mathbf{3}$

(2) $2\log_2 3-\log_2 18=\log_2 9-\log_2 18$

$=\log_2 \frac{9}{18}=\log_2 \frac{1}{2}$

$=\log_2 2^{-1}=-\log_2 2$

$=\mathbf{-1}$

(3) $\log_9 \frac{1}{3}=\frac{\log_3 \frac{1}{3}}{\log_3 9}=\frac{\log_3 3^{-1}}{\log_3 3^2}$

$=\frac{-\log_3 3}{2\log_3 3}=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

(4) $\log_3 5\cdot\log_5 81=\frac{\log_3 5}{\log_3 3}\cdot\frac{\log_3 81}{\log_3 5}$

$=\frac{\log_3 3^4}{\log_3 3}=4\log_3 3$

$=\mathbf{4}$

4

목표| 상용로그표를 이용하여 상용로그의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) **0.4900**

(2) **0.7889**

(3) **2.17**

(4) **5.01**

5

목표| 상용로그를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $k=\frac{1}{6}$이고, 감각의 세기가 $\frac{1}{2}$일 때 외부 자극의 세기를 x라고 하면

$\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\log x$, $3=\log x$이므로　$x=10^3=1000$

따라서 구하는 자극의 세기는 **1000**이다.

교과서 200 쪽

중단원 기본

[해답 p.235]

수준별 학습

1 $x>1$일 때, 다음 등식을 만족시키는 실수 x의 값을 구하여라.

(1) $\log_9 x=\frac{3}{2}$ (2) $\log_2(\log_3 x)=-1$

01 로그의 뜻과 성질
로그의 뜻

2 $\log_{x-2}(-x^2+6x-5)$의 값이 존재하도록 하는 정수 x를 구하여라.

01 로그의 뜻과 성질
로그의 뜻

3 $\log_5 3=a$, $\log_5 7=b$라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_5 \frac{7}{3}$ (2) $\log_5 \sqrt[3]{63}$

(3) $\log_3 7$ (4) $\log_7 21$

01 로그의 뜻과 성질
로그의 성질과 밑의 변환

4 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $3\log_2 \sqrt[3]{12}+\log_2 \frac{4}{3}$

(2) $2\log_3 3\sqrt{2}-\log_3 \frac{4}{27}+\frac{1}{3}\log_3 216$

(3) $\log_2 12-\log_4 \frac{9}{2}$

(4) $\log_{\frac{1}{3}} 16+\log_3 48$

01 로그의 뜻과 성질
로그의 성질

5 다음은 상용로그를 이용하여 1.05^{40}의 값을 구하는 과정이다. $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

02 상용로그
상용로그의 활용

> 1.05^{40}의 값을 구하기 위해 먼저 1.05^{40}의 상용로그 $\log 1.05^{40}$을 계산한다.
> 상용로그표에서 $\log 1.05=\square$이므로
> $\log 1.05^{40}=\square \log 1.05=\square$
> 상용로그표에서 $\log \square=0.8482$이므로 1.05^{40}은 약 7.05임을 알 수 있다.

중/단/원 기본

1

목표| 등식을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 로그의 정의에 의하여

$$x=9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^3=\mathbf{27}$$

(2) 로그의 정의에 의하여 $\log_3 x=2^{-1}=\frac{1}{2}$

$$x=3^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

2

목표| 밑과 진수의 조건을 만족시키는 정수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (밑)>0, (밑)$\neq1$이고, (진수)>0이므로
$x-2>0$, $x-2\neq1$이고, $-x^2+6x-5>0$
$x>2$, $x\neq3$이고, $1<x<5$
따라서 주어진 로그의 값이 존재하는 정수 x는 **4**이다.

3

목표| 로그의 값을 주어진 문자에 대한 식으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\log_5 \frac{7}{3}=\log_5 7-\log_5 3=\boldsymbol{b-a}$

(2) $\log_5 \sqrt[3]{63}=\frac{1}{3}\log_5(3^2\times7)=\frac{1}{3}(2\log_5 3+\log_5 7)$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b}$$

(3) $\log_3 7=\frac{\log_5 7}{\log_5 3}=\boldsymbol{\frac{b}{a}}$

(4) $\log_7 21=\frac{\log_5 21}{\log_5 7}=\frac{\log_5(3\times7)}{\log_5 7}$

$$=\frac{\log_5 3+\log_5 7}{\log_5 7}=\boldsymbol{\frac{a}{b}+1}$$

4

목표| 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $3\log_2 \sqrt[3]{12}+\log_2 \frac{4}{3}=\log_2(\sqrt[3]{12})^3+\log_2 \frac{4}{3}$

$$=\log_2\left(12\times\frac{4}{3}\right)=\log_2 16$$
$$=\log_2 2^4=4\log_2 2$$
$$=\mathbf{4}$$

(2) $2\log_3 3\sqrt{2}-\log_3 \frac{4}{27}+\frac{1}{3}\log_3 216$

$$=\log_3 18-\log_3 \frac{4}{27}+\log_3 6=\log_3\left(18\times\frac{27}{4}\times6\right)$$
$$=\log_3 3^6=6\log_3 3=\mathbf{6}$$

(3) $\log_2 12-\log_4 \frac{9}{2}=\log_2 12-\log_2 \frac{3}{\sqrt{2}}$

$$=\log_2\left(12\times\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=\log_2 2^{\frac{5}{2}}$$
$$=\frac{5}{2}\log_2 2=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

(4) $\log_{\frac{1}{3}} 16+\log_3 48=\log_3 \frac{1}{16}+\log_3 48$

$$=\log_3\left(\frac{1}{16}\times48\right)$$
$$=\log_3 3=\mathbf{1}$$

5

목표| 상용로그를 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| **0.0212, 40, 0.848, 7.05**

교과서 201 쪽

중단원 실력

[해답 p.235]

수준별 학습

1 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$일 때, $\log_2(a^3-1)-\log_2(a^2+a+1)$의 값을 구하여라.

01 로그의 뜻과 성질
로그의 성질

2 $2^x=9^y=18^z$일 때, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}$의 값을 구하여라. (단, $xyz\neq0$)

01 로그의 뜻과 성질
로그의 성질

3 이차방정식 $x^2-8x+2=0$의 두 근이 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$일 때, $\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha$의 값을 구하여라.

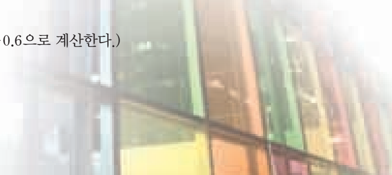
01 로그의 뜻과 성질
로그의 성질

4 $\log\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\log\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\log\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\log\left(1-\dfrac{1}{100}\right)$의 값을 구하여라.

02 상용로그

5 셀로판으로 코팅된 어떤 유리 1장을 빛이 통과할 때마다 그 밝기가 처음의 20 %씩 줄어든다고 하자. 빛의 밝기가 처음의 25 %가 되려면 몇 장의 유리를 통과시켜야 하는지 구하여라.
(단, $\log 0.8=-0.1$, $\log 0.25=-0.6$으로 계산한다.)

02 상용로그
상용로그의 활용



중/단/원 실력

1

목표| 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$이므로

$$\log_2(a^3-1)-\log_2(a^2+a+1)$$
$$=\log_2\frac{a^3-1}{a^2+a+1}=\log_2\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a^2+a+1)}$$
$$=\log_2(a-1)=\log_2\sqrt{2}$$
$$=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

2

목표| 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $2^x=9^y=18^z=a$라고 할 때, 로그의 정의에 의하여

$x=\log_2 a$, $y=\log_9 a$, $z=\log_{18} a$

$$x=\frac{\log_2 a}{\log_2 2},\ y=\frac{\log_2 a}{\log_2 9},\ z=\frac{\log_2 a}{\log_2 18}$$

이므로

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{\log_2 2}{\log_2 a}+\frac{\log_2 9}{\log_2 a}-\frac{\log_2 18}{\log_2 a}$$
$$=\frac{\log_2\left(\frac{2\times9}{18}\right)}{\log_2 a}=\frac{\log_2 1}{\log_2 a}=\mathbf{0}$$

3

목표| 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\log_3\alpha+\log_3\beta=8$, $\log_3\alpha\cdot\log_3\beta=2$

이므로

$$\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha$$
$$=\frac{\log_3\beta}{\log_3\alpha}+\frac{\log_3\alpha}{\log_3\beta}$$
$$=\frac{(\log_3\alpha)^2+(\log_3\beta)^2}{\log_3\alpha\cdot\log_3\beta}$$
$$=\frac{(\log_3\alpha+\log_3\beta)^2-2\log_3\alpha\cdot\log_3\beta}{\log_3\alpha\cdot\log_3\beta}$$
$$=\frac{8^2-2\cdot2}{2}=\mathbf{30}$$

4

목표| 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\log\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\log\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots$
$+\log\left(1-\dfrac{1}{100}\right)$

$$=\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+\cdots+\log\frac{99}{100}$$
$$=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{99}{100}\right)=\log\frac{1}{100}=\mathbf{-2}$$

5

목표| 상용로그를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 유리를 통과하기 전의 빛의 밝기를 a라 하고, 통과시키는 유리를 n장이라고 하면 유리를 통과한 빛의 밝기가 처음의 25 %가 되어야 하므로

$a(1-0.2)^n=a\times0.25$, $a\times0.8^n=a\times0.25$, $0.8^n=0.25$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 0.8^n=\log 0.25$, $n\log 0.8=\log 0.25$

$-0.1\times n=-0.6$, $n=6$

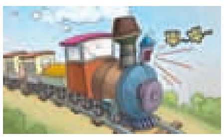
따라서 **6장**의 유리를 통과시키면 빛의 밝기가 처음의 25 %가 된다.

교과서 202 쪽

수행 과제

소리의 크기

데시벨(dB)은 소리의 상대적인 크기를 나타내는 단위로, 기차의 경적 소리는 약 120 dB이고 일상적인 대화는 약 60 dB이다. 여기서 120 dB은 60 dB보다 얼마나 강한 소리일까?


기차의 경적 소리(120 dB)


일상적인 대화(60 dB)

소리의 세기 $I\ \mathrm{W/m^2}$와 데시벨 D dB의 관계는 다음과 같다.

$$D=10\log\frac{I}{I_0}$$

여기서 표준음의 세기 $I_0\ \mathrm{W/m^2}$는 정상적인 사람이 들을 수 있는 가장 작은 소리로, $I_0=10^{-12}$이다.

| 과 제 | 1 다음은 소리의 종류에 따른 소리의 세기를 조사한 것이다. 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

소리의 종류	$I(\mathrm{W/m^2})$	$\frac{I}{I_0}$	D(dB)
표준음	10^{-12}		
일상적인 대화	10^{-6}		
번화가의 소음	10^{-5}		
기차의 경적 소리	10^{0}		

| 과 제 | 2 120 dB인 소리의 세기는 60 dB인 소리의 세기의 몇 배인지 계산하여 보자.

| 과 제 | 3 소음 측정기를 이용하여 교실 내 소리는 몇 dB인지 측정하고, 그 소리의 세기는 표준음의 세기의 몇 배인지 계산하여 보자.

교과서 203 쪽

대단원 학습 내용 정리

1 지수

거듭제곱근

(1) 거듭제곱근

n이 2 이상의 자연수일 때 n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉

$$x^n=a$$

를 만족시키는 수 x를 a의 n제곱근이라고 한다.

(2) a의 실수인 n제곱근

n이 2 이상의 자연수일 때

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$	0	없다.

거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　(2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

지수의 확장과 지수법칙

(1) 정수 지수와 유리수 지수의 정의

(i) $a\neq0$이고 n이 양의 정수일 때

$$a^0=1,\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

(ii) $a>0$이고 m, n $(n\ge2)$이 정수일 때

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ \text{특히 } a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

(2) 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

(i) $a^xa^y=a^{x+y}$　(ii) $(a^x)^y=a^{xy}$

(iii) $(ab)^x=a^xb^x$　(iv) $a^x\div a^y=a^{x-y}$

2 로그

로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재한다.
이때 x를 $x=\log_a N$으로 나타내고, a를 밑으로 하는 N의 로그라고 한다.

$$a^x=N \iff x=\log_a N$$

로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a N^k=k\log_a N$ (k는 실수)

로그의 밑의 변환

a, b, c는 양수이고 $a\neq1$, $c\neq1$일 때

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

상용로그

양수 N에 대하여 10을 밑으로 하는 로그 $\log_{10} N$을 상용로그라 하고, 보통 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

과 같이 나타낸다.

용어와 기호 거듭제곱근, (로그의) 밑, 로그, 진수, 상용로그, $\sqrt[n]{a}$, $\log_a N$, $\log N$

수행 과제

● **수행 과제 의도**

교실 안의 소리의 크기를 측정하고, 소리의 크기와 소리의 세기 사이의 관계식을 이용하여 실제 소리의 세기를 구하는 과정을 통하여 상용로그의 유용함을 느끼고, 실생활 문제 해결 능력을 개발하기 위한 것이다.

과제 1 _풀이

소리의 종류	I $(\mathrm{W/m^2})$	$\frac{I}{I_0}$	D(dB)
표준음	10^{-12}	**1**	**0**
일상적인 대화	10^{-6}	$\mathbf{10^6}$	**60**
번화가의 소음	10^{-5}	$\mathbf{10^7}$	**70**
기차의 경적 소리	10^{0}	$\mathbf{10^{12}}$	**120**

과제 2 _풀이

120 dB, 60 dB인 소리의 세기를 각각 I_1, I_2라고 하면

$120=10\log\frac{I_1}{I_0}$, $60=10\log\frac{I_2}{I_0}$

$I_1=10^{12}\times I_0$, $I_2=10^6\times I_0$이므로

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{10^{12}\times I_0}{10^6\times I_0}=10^6$$

따라서 120 dB인 소리의 세기는 60 dB인 소리의 세기의 **1000000**배이다.

과제 3 _풀이

측정된 교실 내의 소리의 크기가 80 dB이라고 하면 그 소리의 세기 I에 대하여

$80=10\log\frac{I}{I_0}$에서 $I=10^8\times I_0$이므로 측정된 소리의 세기는 표준음의 세기의 $10^8=100000000$배이다.

대 / 단 / 원 평가 문제

Ⅳ. 지수와 로그

선택형

1 16의 네제곱근 중에서 실수인 것들을 모두 곱한 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

2 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2}$ ② $\dfrac{\sqrt[5]{20}}{\sqrt[5]{5}}=\sqrt[5]{4}$
③ $(\sqrt[6]{8})^2=2$ ④ $\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{2}$
⑤ $\sqrt[4]{27}\times\sqrt{\sqrt{3}}=3$

3 $\sqrt[4]{a}=81$, $\sqrt[6]{b}=16$일 때, $\sqrt[8]{ab}$의 값은?

① 24 ② 36 ③ 48
④ 60 ⑤ 72

4 $a>0$에 대하여 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$일 때, $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$의 값은?

① 6 ② 9 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

5 $\log_x(-x^2+4x)$의 값이 존재하도록 하는 모든 정수 x의 합은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

6 $2^x=3^y=36$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $\dfrac{x+y}{xy}$의 값은?

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 5

7 $\dfrac{3}{2}\log_3 2-\log_3\sqrt{6}+\log_3\sqrt{3}$을 간단히 하면?

① $-\log_3 2$ ② $1-\log_3 2$
③ $\log_3 2$ ④ 1
⑤ $1+\log_3 2$

8 $\log_5 2=a$, $\log_5 3=b$라고 할 때, $\log_5\sqrt{24}$를 a, b로 나타내면?

① $\dfrac{a-b}{2a}$ ② $\dfrac{2a-b}{a+b}$ ③ $\dfrac{3a+b}{2}$
④ $\dfrac{a+2b}{2}$ ⑤ $\dfrac{a-3b}{2(1-a)}$

대 / 단 / 원 평가 문제

1

목표| 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 구할 수 있게 한다.

풀이| 16의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=16$이므로
$x^4-16=0$, $(x+2)(x-2)(x^2+4)=0$
$x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$
따라서 16의 세제곱근 중에서 실수인 것의 곱은
$2\times(-2)=-4$

답 ①

2

목표| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| ① $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^4}\times\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{2^{4+3}}=\sqrt[12]{2^7}$

답 ①

3

목표| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt[4]{a}=81$에서 $a=81^4=(3^4)^4=3^{16}$
$\sqrt[6]{b}=16$에서 $b=16^6=(2^4)^6=2^{24}$
$\sqrt[8]{ab}=\sqrt[8]{3^{16}2^{24}}=\sqrt[8]{3^{16}}\cdot\sqrt[8]{2^{24}}=3^2\cdot2^3=72$

답 ⑤

4

목표| 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^3-3\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)$

$=3^3-3\cdot3=18$

답 ⑤

5

목표| 로그의 밑, 진수 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (밑)>0, (밑)$\neq1$에서 $x>0$, $x\neq1$
(진수)>0에서 $-x^2+4x>0$
따라서 $x\neq1$이고 $0<x<4$이므로 정수 x는 2, 3이고, 그 합은 $2+3=5$이다.

답 ④

6

목표| 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 로그의 정의와 로그의 밑의 변환에 의하여

$$x=\log_2 36=\frac{1}{\log_{36}2},\ y=\log_3 36=\frac{1}{\log_{36}3}$$

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_{36}2+\log_{36}3$$

$$=\log_{36}6=\log_{36}36^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

답 ③

교과서 205 쪽

[해답 p.235]

9 세 수 $A=2^{\log_9 3}$, $B=\log_3 3\sqrt{3}$, $C=\log_4 8$ 사이의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A>B=C$ ② $B>C>A$ ③ $A=B>C$
④ $B=C>A$ ⑤ $C>A=B$

10 $\log 3.14=a$라고 할 때, $\log\sqrt{31.4}$의 값은?

① $\frac{a-1}{2}$ ② $\frac{a+1}{2}$ ③ $\frac{a}{2}+1$
④ $2a-1$ ⑤ $2a+1$

11 $\log(\log_2 3)+\log(\log_3 4)+\log(\log_4 5)+\cdots+\log(\log_{63} 64)$를 간단히 하면?

① $\log 3$ ② $\log 4$ ③ $\log 5$
④ $\log 6$ ⑤ $\log 7$

서답형

12 $5^{\sqrt{32}}\div 5^{\sqrt{50}}\times 5^{\sqrt{8}}$의 값을 구하여라.

13 $a>0$, $a\neq 1$일 때, $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=a^k$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하여라.

14 $\log_2(a+b)=3$, $\log_2 ab=2$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

15 두 양수 a, b에 대하여 $a^3b^2=1$일 때, $\log_a ab^4$의 값을 구하여라. (단, $a\neq 1$)

서술형

16 $10^{0.8}$의 값을 상용로그표를 이용하여 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

서술형

17 어떤 전자레인지로 피자를 데울 때, 피자 조각의 개수 n과 데우는 데 걸리는 시간 t분 사이에는

$$t=1.2\times n^{\frac{1}{2}}$$

의 관계가 성립한다고 하자. 피자 16조각을 데우는 데 걸리는 시간은 피자 2조각을 데우는 데 걸리는 시간의 몇 배인지 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

7

목표| 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{3}{2}\log_3 2-\log_3\sqrt{6}+\log_3\sqrt{3}$

$=\log_3 2\sqrt{2}-\log_3(\sqrt{2}\times\sqrt{3})+\log_3\sqrt{3}$

$=\log_3\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\log_3 2$

답 ③

8

목표| 로그의 성질을 이용하여 로그의 값을 주어진 문자에 대한 식으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| $\log_5\sqrt{24}=\log_5(2^3\times 3)^{\frac{1}{2}}$

$=\log_5 2^{\frac{3}{2}}+\log_5 3^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{3}{2}\log_5 2+\frac{1}{2}\log_5 3$

$=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b=\frac{3a+b}{2}$

답 ③

9

목표| 로그의 성질을 이용하여 세 수의 대소 관계를 알게 한다.

풀이| $A=2^{\log_9 3}=2^{\log_{3^2} 3}=2^{\frac{1}{2}\log_3 3}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$B=\log_3 3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\log_3 3=\frac{3}{2}$

$C=\log_4 8=\log_{2^2} 2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$

이므로 $B=C>A$이다.

답 ④

10

목표| 로그의 성질을 이용하여 로그의 값을 주어진 문자에 대한 식으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| $\log\sqrt{31.4}=\log 31.4^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log 31.4$

$=\frac{1}{2}\log(3.14\times 10)$

$=\frac{1}{2}(\log 3.14+\log 10)$

$=\frac{1}{2}(a+1)$

$=\frac{a+1}{2}$

답 ②

11

목표| 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| $\log(\log_2 3)+\log(\log_3 4)+\log(\log_4 5)+\cdots+\log(\log_{63} 64)$

$=\log(\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\cdots\times\log_{63} 64)$

$=\log\left(\frac{\log 3}{\log 2}\times\frac{\log 4}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 4}\times\cdots\times\frac{\log 64}{\log 63}\right)$

$=\log\left(\frac{\log 64}{\log 2}\right)=\log(\log_2 64)$

$=\log(\log_2 2^6)=\log(6\log_2 2)$

$=\log 6$

답 ④

12

목표| 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $5^{\sqrt{32}}\div5^{\sqrt{50}}\times5^{\sqrt{8}}$

$$=\frac{5^{\sqrt{32}+\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{50}}}=\frac{5^{4\sqrt{2}+2\sqrt{2}}}{5^{5\sqrt{2}}}=\frac{5^{6\sqrt{2}}}{5^{5\sqrt{2}}}$$

$$=5^{6\sqrt{2}-5\sqrt{2}}=5^{\sqrt{2}}$$

답 $5^{\sqrt{2}}$

13

목표| 거듭제곱근의 성질과 지수법칙을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=\sqrt{a\times\sqrt{a\times a^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt{a\sqrt{a^{1+\frac{1}{2}}}}$

$=\sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt{a\times a^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}}$

$=\sqrt{a\times a^{\frac{3}{4}}}=\sqrt{a^{1+\frac{3}{4}}}$

$=\sqrt{a^{\frac{7}{4}}}=a^{\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{8}}$

이므로 $a^{\frac{7}{8}}=a^k$에서 $k=\frac{7}{8}$

답 $\frac{7}{8}$

14

목표| 조건을 만족시키는 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 로그의 정의에 의하여 $a+b=2^3$, $ab=2^2$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(2^3)^2-2\cdot2^2=(2^3)^2-2^{1+2}$

$=2^6-2^3=64-8$

$=56$

답 56

15

목표| 조건을 만족시키는 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a^3b^2=1$의 양변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a a^3b^2=\log_a 1=0$, $\log_a a^3+\log_a b^2=0$

$3\log_a a+2\log_a b=0$, $2\log_a b=-3\log_a a$

$\log_a b=-\frac{3}{2}$

$\log_a ab^4=\log_a a+\log_a b^4$

$=1+4\log_a b$

$=1+4\times\left(-\frac{3}{2}\right)$

$=1-6$

$=-5$

답 -5

16

목표| 상용로그표를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $10^{0.8}$의 값을 구하기 위하여 $\log 10^{0.8}$의 값을 계산하면

$\log 10^{0.8}=0.8\log 10=0.8$

상용로그표에서 $\log 6.31=0.8$이므로 $10^{0.8}$의 값은 약 6.31이다.

답 6.31

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	$10^{0.8}$의 값을 구하기 위하여 $\log 10^{0.8}$의 값을 구해야 함을 알기	20%
	로그의 성질을 이용하여 $\log 10^{0.8}$의 값 구하기	40%
	상용로그표에서 로그의 값이 $\log 10^{0.8}$의 값과 같은 진수 찾기	30%
답 구하기	$10^{0.8}$의 값 구하기	10%

17

목표| 지수법칙을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 피자 16조각을 데우는 데 걸리는 시간이 피자 2조각을 데우는 데 걸리는 시간의 a배라고 하면

$1.2\times16^{\frac{1}{2}}=a\times1.2\times2^{\frac{1}{2}}$

$16^{\frac{1}{2}}=a\times2^{\frac{1}{2}}$

$a=16^{\frac{1}{2}}\div2^{\frac{1}{2}}=(2^4)^{\frac{1}{2}}\div2^{\frac{1}{2}}=2^{2-\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$

따라서 피자 16조각을 데우는 데 걸리는 시간은 피자 2조각을 데우는 데 걸리는 시간보다 $2^{\frac{3}{2}}$배 더 걸린다.

답 $2^{\frac{3}{2}}$배

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	피자 16조각을 데우는 데 걸리는 시간이 피자 2조각을 데우는 데 걸리는 시간의 a배라고 놓기	20%
	관계식을 이용하여 a에 대한 식 세우기	40%
답 구하기	지수법칙을 이용하여 a의 값 구하기	40%

M+ Engineering

수 학 + 공 학

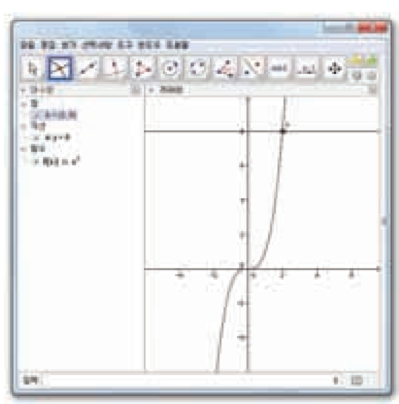
컴퓨터로 거듭제곱근을 구하여 보자.

기하 작도용 소프트웨어를 이용하여 함수의 그래프를 그리고 거듭제곱근을 구하여 보자. 그래프를 이용하면 거듭제곱근의 여러 가지 성질도 확인할 수 있다.

1 \ 8의 세제곱근을 구하여 보자.

❶ 입력창에 '$y=x$^3' 을 입력한 다음, Enter 키를 누르고, 다시 '$y=8$' 을 입력하여 Enter 키를 누르면 두 함수 $y=x^3$, $y=8$의 그래프가 한 화면에 그려진다.

❷ 아이콘 에서 ▽를 클릭하여 '두 대상의 교점 ' 을 선택하고 $y=x^3$과 $y=8$의 두 그래프를 클릭하면 다음 그림과 같이 대수창과 기하창에 두 그래프의 교점의 좌표 $(2,\ 8)$이 나타난다. 따라서 8의 세제곱근 중 실수인 것은 2임을 알 수 있다.



로그의 탄생과 활용


네이피어

천문학에서 다루는 수는 매우 커서 복잡한 계산이 필요한데, 과거에는 컴퓨터와 같은 공학적 도구가 없었으므로 일일이 계산할 수밖에 없었다. 측량할 때 계산을 도와주는 것은 삼각함수표가 고작이었고 계산 단계도 복잡하였다.

이런 과정에서 탄생한 것이 스코틀랜드의 수학자 네이피어(Napier, J. ; 1550~1617)가 창안한 로그이다.

로그를 이용하면 곱셈을 덧셈으로, 나눗셈을 뺄셈으로 바꿔 주기 때문에 큰 수를 계산할 때 편리하다. 또한 아무리 큰 수도 로그로 계산하면 그 값은 얼마 되지 않는다. 예를 들어 1억의 상용로그 값도 8로 작아진다.

프랑스의 수학자 라플라스(Laplace, P. S. ; 1749~1827)는 "로그의 발명으로 천문학자의 수명이 두 배로 연장되었다."라고 했는데, 이는 천문학 계산에서 로그가 차지하는 비중이 얼마나 큰지를 단적으로 보여 주는 예이다.

로그는 이와 더불어 여러 분야의 단위에서 사용되고 있다. 지진의 강도를 나타내는 리히터 규모와 소리의 세기인 데시벨(dB), 산성도를 나타내는 pH, 별의 밝기인 등성 등은 모두 로그를 사용하는 단위의 예이다.

이렇듯 학문의 필요에 의해 단순한 계산 도구로 창안된 로그는 다양한 분야에서 많은 사람들에게 혜택을 주고 있다.

수 학 ✚ 역 사

M+ History

상용로그표 ①

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

상용로그표 ②

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

● 수학 용어

용어	외국어	한자
〈ㄱ〉		
가정	hypothesis	假定
감소	decreasing	減少
거듭제곱근	radical root	
결론	conclusion	結論
(집합의) 결합법칙	associative law	結合法則
계수	coefficient	係數
계승	factorial	階乘
곱의 법칙	multiplication principle	
공간벡터	space vector	
공간좌표	coordinates in space	空間座標
공비	common ratio	公比
공역	codomain	共域
공집합	empty set	空集合
공차	common difference	公差
교선	line of intersection	交線
교집합	intersection	交集合
(집합의) 교환법칙	commutative law	交換法則
구간	interval	區間
구분구적법	quadrature by parts	區分求積法
귀납적 정의	inductive definition	歸納的定義
귀류법	reduction to absurdity	歸謬法
극값	extreme values	
극대	local maximum	極大
극댓값	local maximum	
극소	local minimum	極小
극솟값	local minimum	
극한(값)	limit (value)	極限
근	root	根
근의 공식	quadratic formula	根 — 公式
근호	radical sign	根號
급수	series	級數
급수의 합	sum of series	級數 — 合
기댓값	expected value	
기울기	slope	
〈ㄴ〉		
나머지정리	remainder theorem	
내분	internal division	內分

용어	외국어	한자
내적	inner product	內積
〈ㄷ〉		
다항식	polynomial	多項式
다항함수	polynomial function	多項函數
단위벡터	unit vector	
단항식	monomial	單項式
닫힌 구간	closed interval	
대우	contraposition	對偶
대응	correspondence	對應
대입	substitution	代入
대칭이동	reflection	對稱移動
덧셈정리	addition theorem	
도함수	derivatives	導函數
독립	independence	獨立
독립시행	independent trials	獨立試行
동경	radius	動徑
동류항	similar term	同類項
두 점 사이의 거리	distance between two points	
드모르간의 법칙	De Morgan's law	
등비급수	geometric series	等比級數
등비수열	geometric sequence	等比數列
등비중항	geometric means	等比中項
등차수열	arithmetic sequence	等差數列
등차중항	arithmetic means	等差中項
〈ㄹ〉		
라디안	radian	
로그	logarithm	
로그함수	logarithmic function	
롤의 정리	Rolle's theorem	
〈ㅁ〉		
매개변수	parameter	媒介變數
명제	proposition	命題
모분산	population variance	母分散
모비율	population ratio	母比率
모집단	population	母集團
모평균	population mean	母平均
모표준편차	population standard deviation	母標準偏差
무리수	irrational number	無理數

용어	외국어	한자
무리식	irrational expression	無理式
무리함수	irrational function	無理函數
무한대	infinity	無限大
미분가능	differentiable	微分可能
미분계수	derivative	微分係數
미적분의 기본 정리	fundamental theorem of calculus	微積分－基本定理
미정계수법	method of undetermined coefficients	未定係數法
미지수	unknown	未知數
(로그의) 밑	base	
〈ㅂ〉		
반닫힌(반열린) 구간	half closed(open) interval	
발산	divergence	發散
방향벡터	direction vector	
배반사건	exclusive events	排反事件
법선벡터	normal vector	
벡터	vector	
벡터의 성분	component of vector	
벡터의 크기	norm of vector	
벤 다이어그램	Venn diagram	
변곡점	point of inflection	變曲點
복소수	complex number	複素數
부등식	inequality	不等式
부분적분법	integration by parts	部分積分法
부분집합	subset	部分集合
부분합	partial sum	部分合
부정	negation	否定
부정적분	indefinite integral	不定積分
분모의 유리화	rationalization of denominator	分母— 有理化
(집합의) 분배법칙	distributive law	分配法則
불연속	discontinuous	不連續
〈ㅅ〉		
사이값 정리	intermediate value theorem	
사인	sine	
사인함수	sine function	
삼각비	trigonometric ratio	三角比
삼각함수	trigonometric function	三角函數
삼수선의 정리	theorem of three perpendiculars	三垂線— 定理
상수함수	constant function	常數函數

용어	외국어	한자
상수항	constant term	常數項
상용로그	common logarithm	
(집합의) 서로소	disjoint	
수렴	convergence	收斂
수열	sequence	數列
수학적 귀납법	mathematical induction	數學的歸納法
수학적 확률	mathematical probability	數學的確率
순간변화율	instantaneous rate of change	瞬間變化率
순서쌍	ordered pair	順序雙
순열	permutation	順列
시점	initial point	始點
시초선	ray	始初線
시행	trial	試行
식의 값	numerical value of expression	
신뢰구간	confidence interval	信賴區間
신뢰도	confidence coefficient	信賴度
실근	real root	實根
실수	real number	實數
실수배	real number multiple	實數倍
실수부분	real part	實數部分
쌍곡선	hyperbola	雙曲線
쌍곡선의 꼭짓점	vertex of hyperbola	
쌍곡선의 점근선	asymptotic line of hyperbola	雙曲線— 漸近線
쌍곡선의 주축	principal axis of hyperbola	雙曲線— 主軸
쌍곡선의 중심	center of hyperbola	雙曲線— 中心
쌍곡선의 초점	focus of hyperbola	雙曲線— 焦點
〈ㅇ〉		
x절편	x-intercept	
x좌표	x-coordinate	
x축	x-axis	
여사건	complementary event	餘事件
여집합	complement	餘集合
역	converse	逆
역함수	inverse function	逆函數
연립일차방정식	simultaneous linear equations	聯立一次方程式
연립일차부등식	simultaneous linear inequalities	聯立一次不等式
연속	continuous	連續
연속함수	continuous function	連續函數

용어	외국어	한자
연속확률변수	continuous random variable	連續確率變數
열린 구간	open interval	
영벡터	zero vector	
y절편	y-intercept	
y좌표	y-coordinate	
y축	y-axis	
완전제곱식	perfect square(expression)	
외분	external division	外分
우극한	right-handed limit	右極限
원소	element	元素
원순열	circular permutation	圓順列
원점	origin	原點
위치벡터	position vector	
유리식	rational expression	有理式
유리함수	rational function	有理函數
음함수	implicit function	陰函數
이계도함수	second order derivatives	二階導函數
이면각	dihedral angle	二面角
이면각의 면	faces of a dihedral angle	二面角— 面
이면각의 변	edge of dihedral angle	二面角— 邊
이면각의 크기	measure of a dihedral angle	
이산확률변수	discrete random variable	離散確率變數
이차곡선	quadratic curve	二次曲線
이차방정식	quadratic equation	二次方程式
이차함수	quadratic function	二次函數
이항	transposition	移項
이항계수	binomial coefficient	二項係數
이항분포	binomial distribution	二項分布
이항정리	binomial theorem	二項定理
인수	factor	因數
인수분해	factorization	因數分解
인수정리	factor theorem	因數定理
일대일 대응	one to one correspondence	一對一對應
일대일함수	one to one function	一對一函數
일반각	general angle	一般角
일반항	general term	一般項
일차방정식	linear equation	一次方程式
일차부등식	linear inequality	一次不等式

용어	외국어	한자
일차함수	linear function	一次函數
임의추출	random sampling	任意抽出
〈ㅈ〉		
자연로그	natural logarithm	
자연수의 분할	partitions of natural number	自然數— 分割
적분상수	integral constant	積分常數
전개	expansion	展開
전개식	expansion	展開式
전수조사	total inspection	全數調査
전체집합	universal set	全體集合
절대부등식	absolute inequality	絕對不等式
정규분포	normal distribution	正規分布
정리	theorem	定理
정사영	orthogonal projection	正射影
정의	definition	定義
정의역	domain	定義域
정적분	definite integral	定積分
제곱근	square root	
조건	condition	條件
조건부확률	conditional probability	條件附確率
조립제법	synthetic division	組立除法
조합	combination	組合
종속	dependence	從屬
종점	terminal point	終點
좌극한	left-handed limit	左極限
좌표	coordinate	座標
좌표공간	coordinate space	座標空間
좌표축	coordinate axis	座標軸
좌표평면	coordinate plane	座標平面
주기	period	週期
주기함수	periodic function	週期函數
중근	multiple root	重根
중복순열	repeated permutation	重複順列
중복조합	repeated combination	重複組合
중점	midpoint	中點
증가	increasing	增加
증명	proof	證明
증분	increment	增分

용어	외국어	한자
지수함수	exponential function	指數函數
진리집합	truth set	眞理集合
진부분집합	proper subset	眞部分集合
진수	antilogarithm	眞數
집합	set	集合
집합의 분할	partition of a set	集合—分割
〈ㅊ〉		
차수	degree	次數
차집합	difference set	差集合
최대 · 최소 정리	maximum−minimum theorem	最大最小定理
최댓값	absolute maximum	最大
최솟값	absolute minimum	最小
추정	estimation	推定
충분조건	sufficient condition	充分條件
치역	range	値域
치환적분법	integration by substitution	置換積分法
〈ㅋ〉		
켤레복소수	complex conjugates	
코사인	cosine	
코사인함수	cosine function	
큰 수의 법칙	law of large numbers	
〈ㅌ〉		
타원	ellipse	楕圓
타원의 꼭짓점	vertex of ellipse	
타원의 단축	minor axis of ellipse	楕圓— 短軸
타원의 장축	major axis of ellipse	楕圓— 長軸
타원의 중심	center of ellipse	楕圓— 中心
타원의 초점	focal point of ellipse	楕圓— 焦點
탄젠트	tangent	
탄젠트함수	tangent function	
통계적 확률	statistical probability	統計的 確率
〈ㅍ〉		
파스칼의 삼각형	Pascal's triangle	
판별식	discriminant	判別式
평균값 정리	mean value theorem	
평균변화율	mean rate of change	平均變化率
평면벡터	plane vector	
평행이동	translation	平行移動

용어	외국어	한자
포물선	parabola	抛物線
포물선의 꼭짓점	vertex of parabola	
포물선의 준선	directrix of parabola	抛物線— 準線
포물선의 초점	focal point of parabola	抛物線— 焦點
포물선의 축	axis of parabola	抛物線— 軸
표본	sample	標本
표본분산	sample variance	標本分散
표본비율	sample rate	標本比率
표본조사	sample survey	標本調査
표본평균	sample mean	標本平均
표본표준편차	sample standard deviation	標本標準偏差
표준정규분포	standard normal distribution	標準正規分布
표준화	standardization	標準化
피타고라스 정리	Pythagorean theorem	
필요조건	necessary condition	必要條件
필요충분조건	necessary and sufficient condition	必要充分條件
〈ㅎ〉		
함수의 그래프	graph of a function	
합성함수	composite function	合成函數
합의 법칙	addition principle	
합집합	union	合集合
항	term	項
항등식	identity	恒等式
항등함수	identity function	恒等函數
해	root	解
허근	imaginary root	虛根
허수	imaginary number	虛數
허수단위	imaginary unit	虛數單位
허수부분	imaginary part	虛數部分
호도법	circular measure	弧度法
확률밀도함수	probability density function	確率密度函數
확률변수	random variable	確率變數
확률분포	probability distribution	確率分布
확률질량함수	probability mass function	確率質量函數

집필진 소개

신항균
현 서울교육대학교 총장

이광연
현 한서대학교 교수

박세원
현 신경대학교 교수

신범영
현 청담중학교 교감

이계세
현 병점고등학교 교사

김정화
현 서울사대부속고등학교 교사

박문환
현 인천인제고등학교 교사

윤정호
현 대구과학고등학교 교사

박상의
현 장충고등학교 교사

서원호
현 청원고등학교 교감

전제동
현 창원중앙고등학교 교사

이동흔
현 하나고등학교 교사

만든 사람들
개발 책임 김경수
편집 윤준원, 김은빛
아트 디렉터 허영인
표지 디자인 김의수
본문 디자인 유지인
컷 김상준, 이도훈
조제판 벽호미디어

고등학교 수학 II 교사용 지도서

2014. 3. 1. 초판 발행 정가 원

지은이 신항균 외 11인
발행인 (주)지학사 서울시 마포구 신촌로 6길 5
인쇄인 (주)벽호 경기도 파주시 한빛로 43
내용 관련 문의 (주)지학사 콘텐츠본부 수학팀 전화 02-330-5440 전송 02-325-8009
구입 관련 문의 (주)지학사 영업본부 영업관리팀 전화 02-330-5302 전송 02-325-8010
공급 업무 대행 사단법인 한국검인정교과서 경기도 파주시 조리읍 당재봉로 29-28

ISBN 978-89-05-04084-0 53410

고|등|학|교 수학 Ⅱ

53410
9 788905 040840
ISBN 978-89-05-04084-0